

Pružnost a plasticita

NDA015

Luděk Brdečko

VUT v Brně, Fakulta stavební,
Ústav stavební mechaniky

tel: 541147368

email: brdecko.l @ fce.vutbr.cz

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/brdecko.l/html/distcz.htm>

Obsah předmětu

- 1. přednáška

- spolehlivost konstrukcí
- výpočtové modely
- základní veličiny pružnosti
- základní vztahy pružnosti
- nelineární pružnost

- 2. přednáška

- těleso (základní veličiny a vztahy)
- prut (základní veličiny a vztahy)

- 3. přednáška

- Rovinný problém - stěny (základní veličiny a vztahy)
- desky (základní veličiny a vztahy)
- skořepiny

- 4. přednáška

- metody řešení – přesné, přibližné
- variační metody – Ritzova metoda, Metoda konečných prvků

Těleso

- Rekapitulace veličin

- vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

- vektor přemístění

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T$$

- Rekapitulace vztahů

- diferenciální podmínky rovnováhy (3)

$$\partial\sigma + X = 0$$

- fyzikální vztahy (6)

$$\varepsilon = C\sigma \quad \text{nebo} \quad \sigma = D\varepsilon$$

- geometrické vztahy (6)

$$\varepsilon - \partial^T u = 0$$

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

Prut

- Prut s vlivem smyku
- Rekapitulace veličin
- vnitřní síly N , V , M
- deformace ε_N , ε_V , ε_M
- přemístění u , w , φ
- Rekapitulace vztahů
- statické podmínky

$$N' + n = 0$$

$$V' + q = 0$$

$$M' - V + m = 0$$

- fyzikální podmínky

$$N = EA\varepsilon_N$$

$$V = GA_K\varepsilon_V$$

$$M = EI\varepsilon_M$$

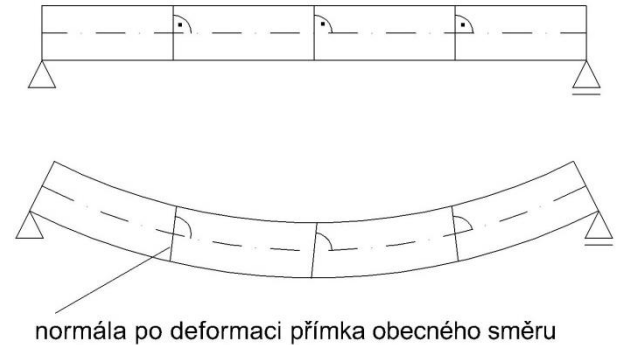
- geometrické podmínky

$$\varepsilon_N = u'$$

$$\varepsilon_M = \varphi'$$

$$\varepsilon_V = w' + \varphi$$

Prut s vlivem smyku



Prut

- Prut bez vlivu smyku
- Rekapitulace veličin
- vnitřní síly N , V , M
- deformace ε_N , ε_M
- přemístění u , w
- Rekapitulace vztahů
- statické podmínky

$$N' + n = 0$$

$$V' + q = 0$$

$$M' - V + m = 0$$

- fyzikální podmínky

$$N = EA\varepsilon_N$$

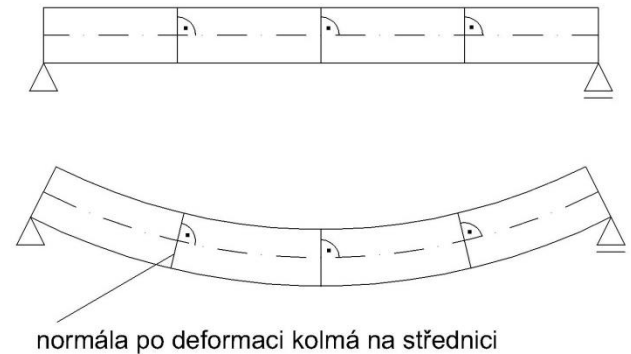
$$M = EI\varepsilon_M$$

- geometrické podmínky

$$\varepsilon_N = u'$$

$$\varepsilon_M = -w''$$

Prut bez vlivu smyku



Rovinný problém

- Rekapitulace veličin

- vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

- vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

- vektor přemístění

$$\{u\} = \{u_x, u_y\}^T$$

- Rekapitulace vztahů

- diferenciální podmínky rovnováhy (2)

$$\partial \sigma + X = 0$$

- fyzikální vztahy (3)

$$\varepsilon = C \sigma \quad \text{nebo} \quad \sigma = D \varepsilon$$

- geometrické vztahy (3)

$$\varepsilon - \partial^T u = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

rovinná napjatost

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

rovinná deformace

$$[C] = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Desky

- rekapitulace veličin / vztahů - Mindlinova – tlustá deska (s vlivem smyku)
- měrné vnitřní síly $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- deformace průřezu $\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \varepsilon_{mxy}, \varepsilon_{vx}, \varepsilon_{vy}$
- přemístění w, φ_x, φ_y

podmínky statické

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

podmínky geometrické

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{vx} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$$

$$\varepsilon_{vy} = \frac{dw}{dy} - \varphi_x$$

podmínky fyzikální

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

$$v_x = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vx}$$

$$v_y = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vy}$$

Desky

- rekapitulace veličin / vztahů - Kirchhofova – tenká deska (bez vlivu smyku)
- měrné vnitřní síly $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- deformace průřezu $\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \varepsilon_{mxy}$
- přemístění w

podmínky statické

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

podmínky geometrické

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

podmínky fyzikální

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

Metody řešení

- z hlediska kvality dosaženého výsledku

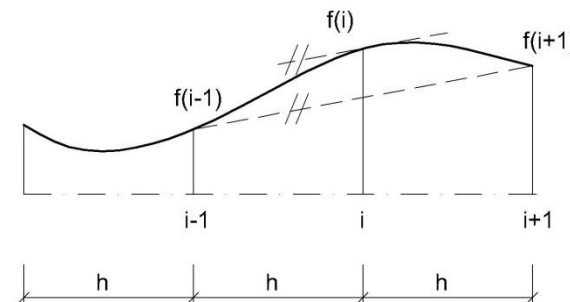
1) přesné metody – přímé řešení diferenciálních rovnic, většinou pro jednoduché konstrukce

- např. řešení ohybu prutu přímou integrací

2) přibližné metody – náhrada hledané funkce nějakou aproximací, se kterou se lépe pracuje. Např.:

- řešení pomocí nekonečných trigonometrických řad (použije se konečný počet členů)
- diferenční metoda, metoda sítí (funkce je definována v diskrétních bodech, derivace funkce jsou vyjádřeny pomocí hodnot v okolních bodech a vzdáleností těchto bodů)

$$f'_{(i)} = \frac{f_{(i+1)} - f_{(i-1)}}{2h}$$



- Ritzova metoda
- metoda konečných prvků

Metody řešení

vycházejí:

- přímo z diferenciálních rovnic sestavených pomocí základních vztahů (statické, fyzikální, geometrické rovnice, popř. podmínky kompatibility), např.:
- řešení pomocí nekonečných řad
- metoda sítí
- z energetických principů (vyjádření potenciální energie, popř. virtuální práce), např.:
- Ritzova metoda
- metoda konečných prvků

Metody řešení

- podle primárních neznámých a využitých rovnic
- silová metoda
 - primární neznámé jsou silové veličiny – vnitřní síly nebo napětí
 - využijí se podmínky kompatibility, fyzikální a statické podmínky
 - např.: stěnová rovnice
- deformační metoda
 - primární neznámé jsou přemístění
 - využijí se geometrické, fyzikální a statické rovnice
 - např.: desková rovnice, ohybová čára prutu

Metody řešení

- příklad silové metody – odvození stěnové rovnice
- výchozí rovnice: podmínka kompatibility (1), fyzikální rovnice (3), statické rovnice (2)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon = C \sigma$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned}$$

- neznámé: deformace (3), napětí (3)
- podmínka kompatibility se vyjádří v napětích pomocí fyzikálních podmínek 3 rovnice pro 3 napětí
- výsledná stěnová rovnice (pro $X=Y=0$)

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

kde $F(x, y)$

je tzv. Airyho funkce napětí, ze které lze přímo odderivovat složky vektoru napětí

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Metody řešení

- příklad deformační metody – odvození ohybu prutu bez vlivu smyku

- výchozí rovnice:

- statické rovnice (2) $V' = -q$

$$M' = V$$

- fyzikální rovnice(1) $M = EI\varepsilon_M$

- geometrické podmínky (2) $\varphi' = \varepsilon_M$

$$w' = -\varphi$$

- neznámé:

- vnitřní síly (V,M)

- deformace průřezu (ε_M)

- přemístění (w,φ)

- výsledná rovnice ohybové čáry $(EIw'')'' = q$

Metody řešení

- Kirchhofova – tenká deska (bez vlivu smyku) – deformační metoda

- měrné vnitřní síly $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- deformace průřezu $\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \varepsilon_{mxy}$
- přemístění w

podmínky statické

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_y = 0$$

podmínky geometrické

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

podmínky fyzikální

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

Dosazení podmínek geometrických do fyzikálních, fyzikálních do statických a druhé a třetí statické do první -> **desková rovnice**

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Energetické principy

- Energetické principy
- princip virtuálních prací
- princip minima potenciální energie

Energetické principy

- **Princip virtuálních prací**
- **Virtuální deformace** – libovolný myšlený deformační stav tělesa (popsaný přemístěními a deformacemi), který splňuje kinematické okrajové podmínky (předepsaná přemístění v podporách) a geometrické podmínky (vztah mezi přemístěními a deformacemi)
- **Virtuální síly** – libovolný myšlený silový stav tělesa (popsaný vnějšími a vnitřními silami), který splňuje statické podmínky rovnováhy
- **Virtuální práce:**
- Práce skutečných sil na virtuálních deformacích
$$\delta W = \sum \{\delta u\}^T \cdot \{F\} - \int_L \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{N\} dx$$
- Práce virtuálních sil na skutečných deformacích
$$\delta W = \sum \{\delta F\}^T \cdot \{u\} - \int_L \{\delta N\}^T \cdot \{\varepsilon\} dx$$
- **Skutečné a virtuální veličiny jsou na sobě nezávislé - POSUNY NEVZNIKLY DÍKY SILÁM!!!!**

Energetické principy

- Princip virtuálních prací
- Virtuální práce vnějších a vnitřních sil je nulová

$$\delta W = 0$$

- Lagrangeův princip virtuálních přemístění

$$\delta W = \sum \{\delta u\}^T \cdot \{F\} - \int_L \{\delta \varepsilon\}^T \cdot \{N\} dx = 0$$

- Použití: např. odvození deformační varianty metody konečných prvků

- Castigliánův princip virtuálních sil

$$\delta W = \sum \{\delta F\}^T \cdot \{u\} - \int_L \{\delta N\}^T \cdot \{\varepsilon\} dx = 0$$

- Použití: např.: Metoda jednotkových sil pro výpočet přemístění

Energetické principy

- Princip virtuálních sil
- Aplikace: Metoda jednotkových sil pro výpočet přemístění
- Virtuální práce

$$\delta W = \sum \{\delta F\}^T \cdot \{u\} - \int_L \{\delta N\}^T \cdot \{\varepsilon\} dx$$

- Vyjádřená pro prut

$$\delta W = \Delta \cdot \delta F - \int_L \varepsilon_N \delta N dx - \int_L \varepsilon_V \delta V dx - \int_L \varepsilon_M \delta M dx$$

- Dosadí se za deformace z fyzikálních podmínek

$$\Delta \cdot \delta F = \int_L \frac{N}{EA} \delta N dx + \int_L \frac{V}{GA_k} \delta V dx + \int_L \frac{M}{EI} \delta M dx$$

- Za virtuální sílu δF se uvažuje jednotkový impulz (síla nebo moment) v místě a směru hledaného přemístění (posun nebo pootočení). Δ představuje hledané přemístění.

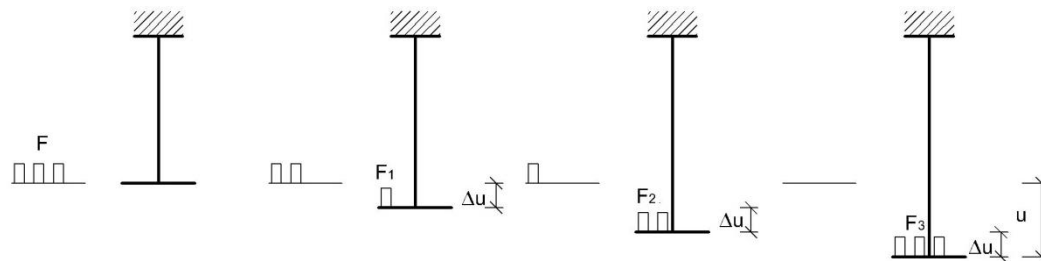
$$\Delta = \int_L \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_L \frac{V\bar{V}}{GA_k} dx + \int_L \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

Energetické principy

Přetvárná práce vnějších sil

- práce, kterou koná závaží na protažení táhla

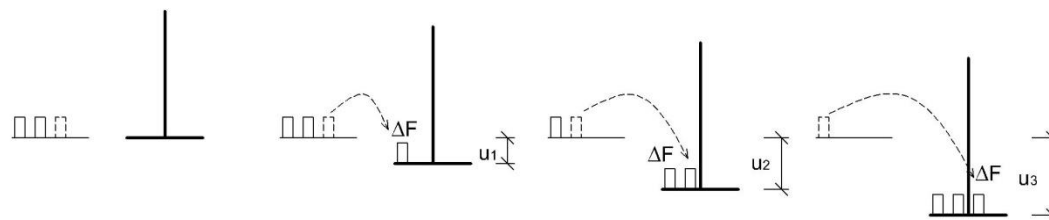
$$L_e = \sum_{i=1}^n F_i \Delta u = \int_0^{u_t} F(u) du$$



Doplňková práce vnějších sil

- práce, která je konána při přesouvání závaží na plošinu

$$L_e^* = \sum_{i=1}^n u_i \Delta F = \int_0^{F_t} u(F) dF$$



Obecně

$$L + L_e^* = F_t u_t$$

lineárně pružný materiál

$$L_e = L_e^* = \frac{1}{2} F_t u_t$$

Silové a deformační veličiny jsou na sobě závislé -> postupně narůstají -> odtud 1/2

Energetické principy

- **Deformační energie**
- energie, která se akumuluje v konstrukci při její deformaci vlivem zatěžování
- konstrukce je schopna ji vydat zpět při odtěžování
- odpovídá přetvárné práci vnějších sil (Pro pružné těleso)

$$\Pi_i = L_e$$

- **obecně pro těleso**

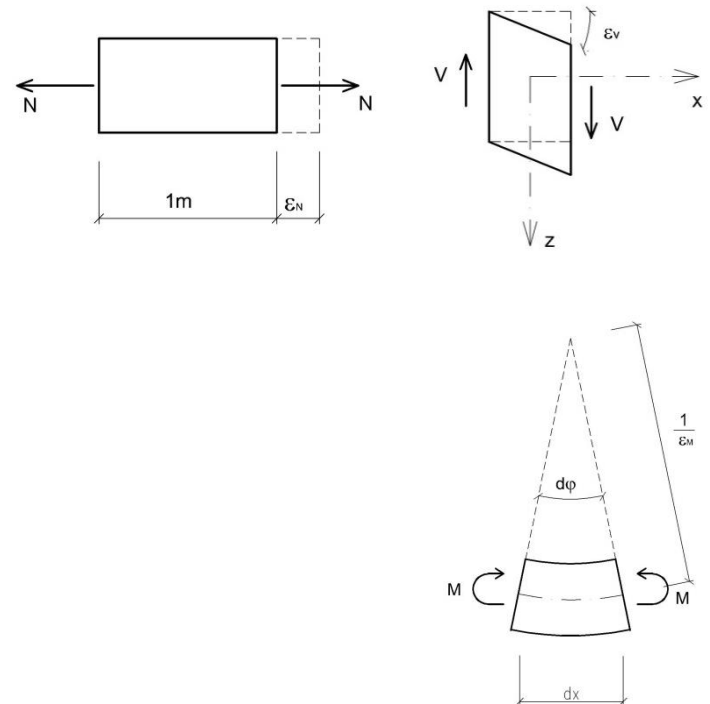
$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

- **pro prut**

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_L \varepsilon_N N dx + \frac{1}{2} \int_L \varepsilon_V V dx + \frac{1}{2} \int_L \varepsilon_M M dx$$

- po dosazení fyzikálních podmínek

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_L EA \varepsilon_N^2 dx + \frac{1}{2} \int_L GA_k \varepsilon_V^2 dx + \frac{1}{2} \int_L EI \varepsilon_M^2 dx$$



Energetické principy

- **Mechanický systém**
- mechanický systém = konstrukce + zatížení
- **Potenciální energie systému**
- změna celkové energie mechanického systému vlivem zatěžování
- **potenciální energie vnitřních sil** – energie akumulovaná v konstrukci (kladná)

$$\Pi_i = L_e$$

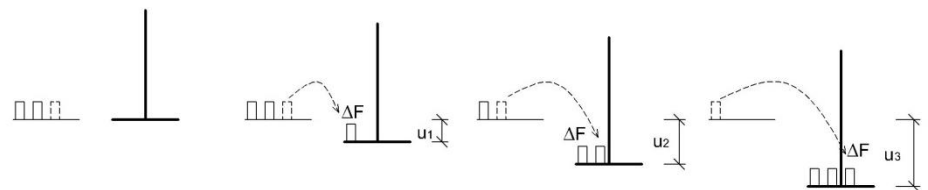
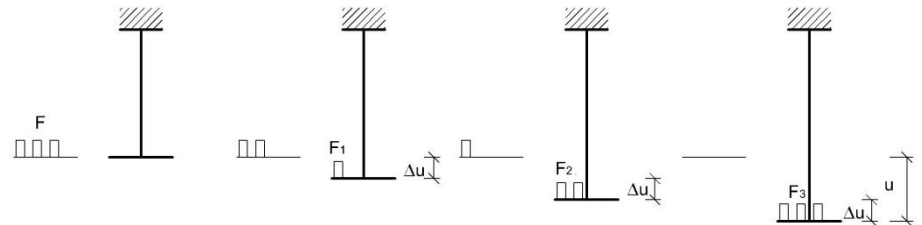
- **potenciální energie vnějších sil** – ztráta polohy břemene (záporná)

$$\Pi_e = -F u = -(L_e + L_e^*)$$

- **celková potenciální energie**

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e$$

$$\Pi = L_e - (L_e + L_e^*) = -L_e^*$$



Energetické principy

- Princip minima potenciální energie
- Ze všech možných deformačních stavů pružného tělesa, které neporušují jeho spojitost a respektují veškeré kinematické okrajové podmínky nastane právě ten, při němž je potenciální energie systému minimální.

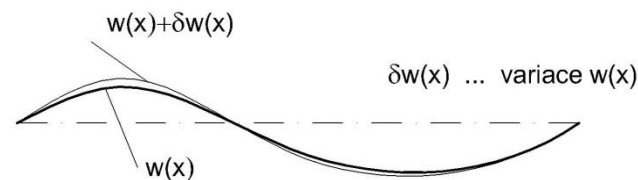
$$\Pi = \min$$

Variační metody

- **Variační metody**
- matematické postupy k hledání funkce udělující extrém danému funkcionalu F
- **funkcionál** – integrál z operátoru nad funkcemi a jejich derivacemi

$$F = \int L(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad y = f(x)$$

- **variacel funkce** – infinitesimální změna celého průběhu funkce



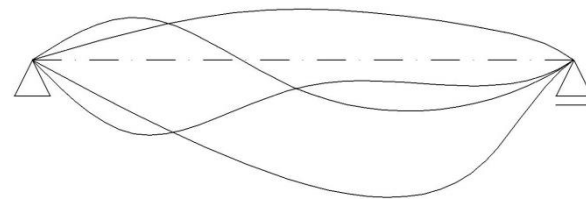
- **přípustná funkce** – funkce splňující okrajové podmínky
- variační metoda převádí úlohu o nalezení funkce udělující minimum funkcionalu F

$$F = \text{extrém}$$

na tvar

$$\delta F = 0$$

přípustné funkce



Variační metody

- Případ ohybu prutu
- funkcionál – potenciální energie

$$\Pi = f(w, w')$$

- podmínka extrému

$$\Pi = \min$$

- hledaná funkce – funkce průhybu

$$w(x)$$

- přípustná funkce – funkce splňující okrajové podmínky. Např.:

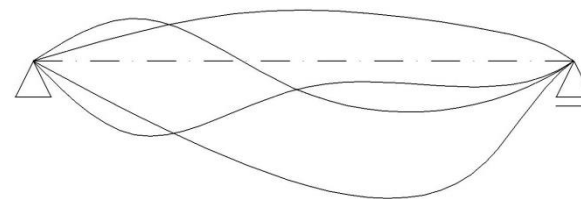
$$w(x) \quad w \begin{pmatrix} x=0 \\ x=l \end{pmatrix} = 0$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_L EI \varepsilon_M^2 dx = \frac{1}{2} \int_L EI (w'')^2 dx$$

$$\Pi_e = -Fw$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{1}{2} \int_L EI (w'')^2 dx - Fw$$

přípustné funkce



Ritzova metoda

- aproximace přemístění

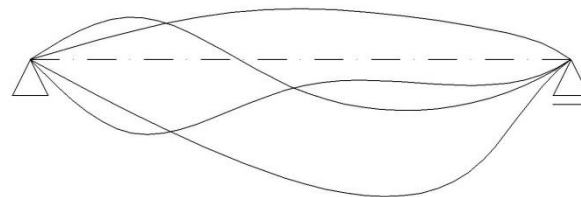
$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(x)$$

$\phi(x)$ bázová funkce definovaná na celé oblasti konstrukce, splňuje okrajové podmínky

a_i neznámé koeficienty: mají pouze matematický význam – definují váhu dané bázové funkce

- Bázové funkce

- volí se omezený počet funkcí.
- variační princip z nich vybere nejlepší možné řešení z hlediska minima potenciální energie
- pokud je mezi zvolenými bázovými funkcemi správné PŘESNÉ řešení, je variačním principem vybráno



Ritzova metoda

- podmínka minima $\Pi = \min$
- vyjádřená $\delta \Pi = 0$
- vyjádření variace – parciální derivace podle všech proměnných parametrů vede na soustavu rovnic

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$$

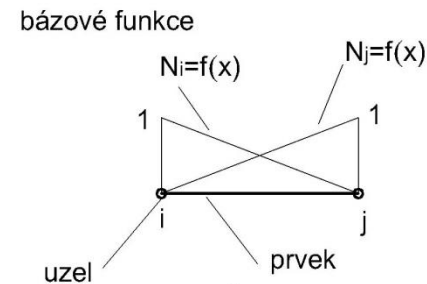
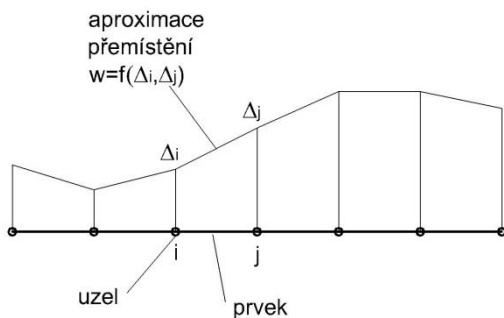
jejíž řešením jsou neznámé koeficienty a_i .

Ty se zpětně dosadí do původní aproximace a získáme rovnici přemístění.

$$w(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(x)$$

Metoda konečných prvků

- Aproximace přemístění
- Rozdělení konstrukce na prvky a uzly



- Bázové funkce N_i patřící k jednomu uzlovému parametru jsou nenulové pouze na okolních prvcích k danému uzlu
- Uzlové parametry Δ mají konkrétní fyzikální význam – hodnota daného přemístění v uzlu
 - představují primární neznámé, pomocí kterých se vše ostatní vyjadřuje
- Vyjádření přemístění po oblasti prvku

$$u(x) = [N]\{\Delta\}$$

Metoda konečných prvků

- Vyjádření **deformací** – z **geometrických podmínek**

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{\Delta\} = [B]\{\Delta\}$$

- Vyjádření **napětí** – z **fyzikálních podmínek**

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\Delta\}$$

- Vyjádření **potenciální energie**

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\Delta\} = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\}$$

$$\Pi_e = -\{\Delta\}^T \{F\}$$

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \{F\}$$

- kde K ... matice tuhosti
 Δ ... vektor uzlových parametrů
 F ... vektor uzlových sil

Metoda konečných prvků

- Vyjádření **minima potenciální energie** podle **variačního principu**

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Ize provést

- pro **každý prvek**
 - pro **celou konstrukci**
 - soustava se stává řešitelnou po zavedení **okrajových podmínek**
 - řešením jsou **uzlová přemístění Δ** , pomocí kterých se zpětně vyjádří
 - **přemístění u**
 - **deformace ε**
 - **napětí (resp. vnitřní síly) σ**
- na jednotlivých prvcích

Metoda konečných prvků

$$[K]\{\Delta\} = \{F\}$$

- **okrajové podmínky**
- **homogenní, nehomogenní** – dosazení příslušného přemístění do uzlového parametru
- **pružné vazby** – přidání tuhosti pružiny do matice tuhosti konstrukce na pozici odpovídající dané síle a posunu
- **zatížení**
- **prvkové** (spojitá zatížení po oblasti prvku) – přetransformuje se do uzlů -> vektor zatížení prvku -> vektor zatížení konstrukce
- **uzlové** (osamělá břemena přímo v uzlech) – dosazují se přímo do vektoru zatížení konstrukce

Metoda konečných prvků

Fáze výpočtu

- analýza prvku
- sestavení matic tuhostí prvků (dle geometrie, průřezových a materiálových charakteristik)
- sestavení vektorů zatížení prvků (dle zatížení po oblasti prvku)
- analýza konstrukce
- sestavení vektoru uzlových parametrů konstrukce
- sestavení matice tuhosti konstrukce (z matic tuhostí jednotlivých prvků)
- sestavení vektoru zatížení konstrukce (z vektorů zatížení prvků a z břemen působících v uzlech)
- zavedení okrajových podmínek
- řešení soustavy rovnic -> vektor uzlových parametrů konstrukce, reakce
- dokončení analýzy prvku
- sestavení vektoru uzlových parametrů prvku (z vektoru uzlových parametrů konstrukce)
- výpočet deformací (z geometrických vztahů)
- výpočet napětí (z fyzikálních vztahů)

Metoda konečných prvků

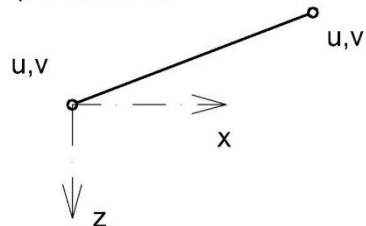
definice úlohy

- typ prvku
- dimenze úlohy
- tvar prvku, uzly na prvu
- uzlové parametry, klouby na prutech
- geometrie modelu
- definice uzlů (souřadnice) a prvků (dle uzlů)
- definice oblastí + automatické generování uzlů a prutů
- průřezové charakteristiky + přiřazení k prvkům
- číselně, z katalogu
- materiálové charakteristiky + přiřazení k prvkům
- číselně, z katalogu
- podepření
- předepsaná přemístění uzlů, pružné vazby
- zatížení + kombinace zatěžovacích stavů
- uzlová, prvková

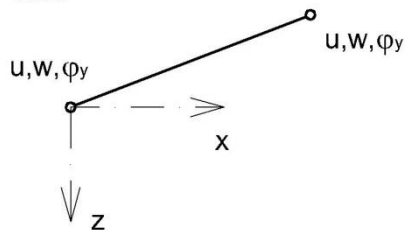
Metoda konečných prvků

Prvky a jejich stupně volnosti (uzlové parametry)

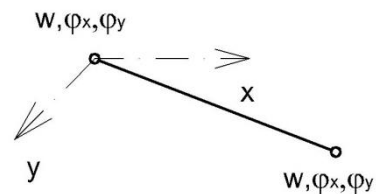
rovinná
příhradovina



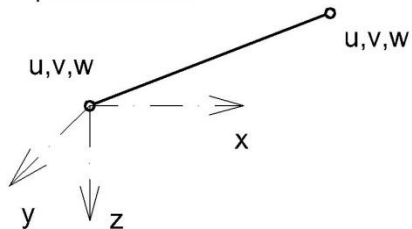
rovinný
rám



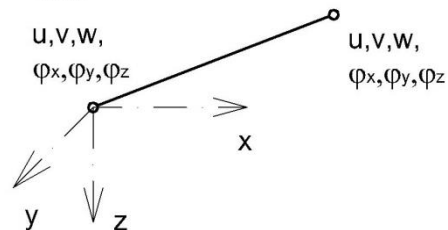
rošt



prostorová
příhradovina



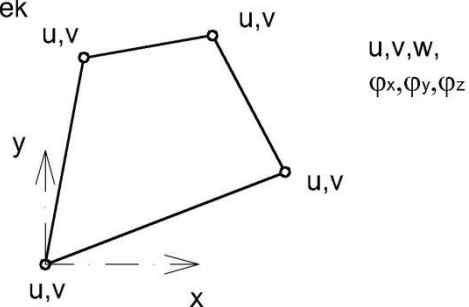
prostorový
rám



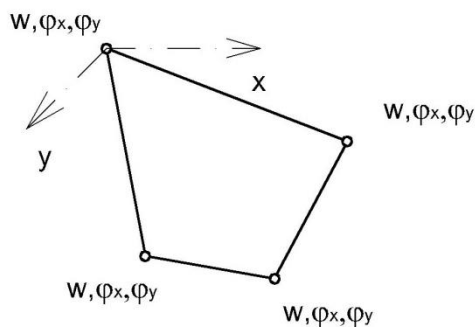
Metoda konečných prvků

Prvky a jejich stupně volnosti (uzlové parametry)

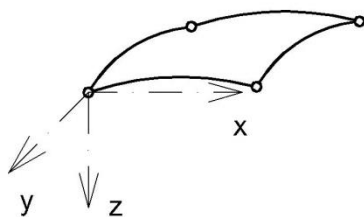
stěnový
prvek



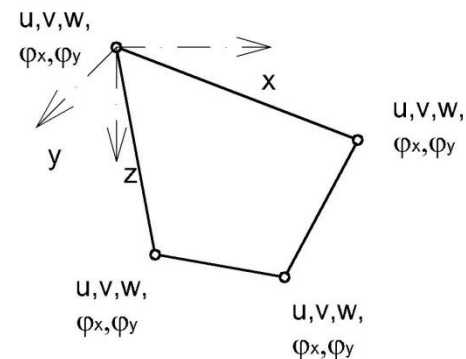
deskový
prvek



skořepinový
prvek



deskostěnový
prvek



prostorový
prvek

