

Pružnost a plasticita

NDA015

Luděk Brdečko

VUT v Brně, Fakulta stavební,
Ústav stavební mechaniky

tel: 541147368

email: brdecko.l @ fce.vutbr.cz

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/brdecko.l/html/distcz.htm>

Obsah předmětu

- 1. přednáška

- spolehlivost konstrukcí
- výpočtové modely
- základní veličiny pružnosti
- základní vztahy pružnosti
- nelineární pružnost

- 2. přednáška

- těleso (základní veličiny a vztahy)
- prut (základní veličiny a vztahy)

- 3. přednáška

- Rovinný problém - stěny (základní veličiny a vztahy)
- desky (základní veličiny a vztahy)
- skořepiny

- 4. přednáška

- metody řešení – přesné, přibližné
- variační metody – Ritzova metoda, Metoda konečných prvků

Rovinný problém

- 2D model konstrukce
- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha je rovinná
zatížení a okrajové podmínky působí
ve střednicové rovině

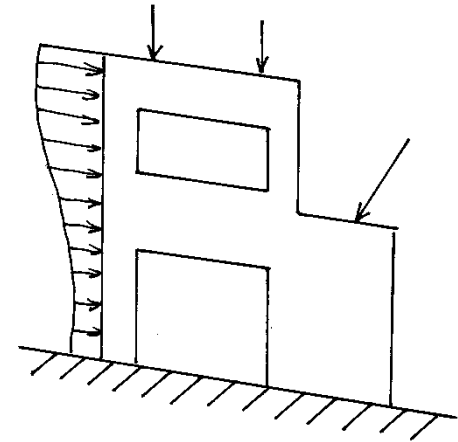
→ $w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$

Předpoklady odvození:

deformace a napětí ve střednicové rovině xy se ve směru z kolmém na tuto rovinu nemění

→ všechny veličiny jsou funkcí xy

→ $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$



Rovinný problém

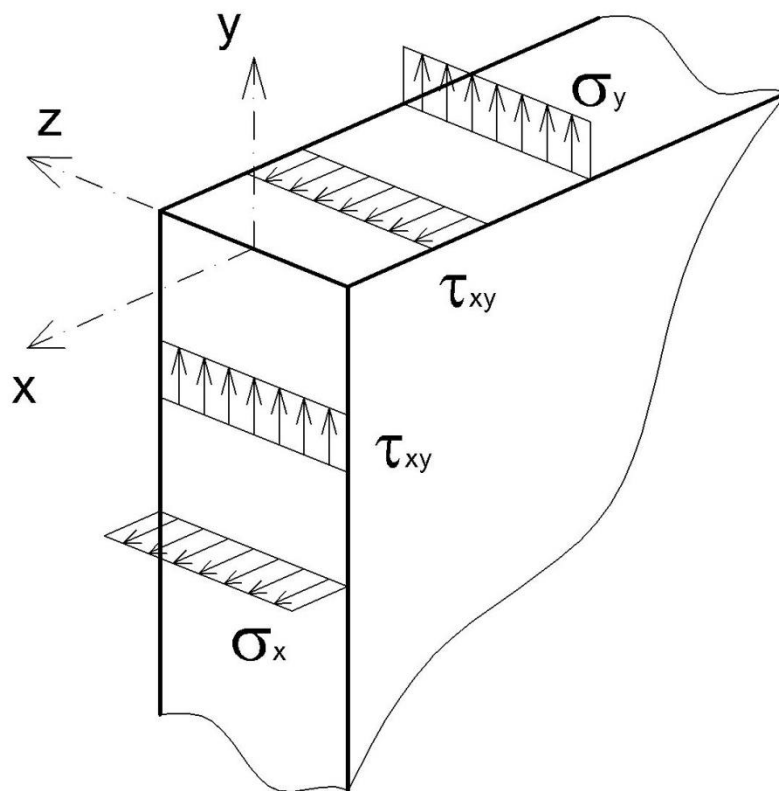
- Důsledky předpokladů

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$$

Rovinný problém

- napětí ve stěně



Rovinný problém

- dvě varianty fyzikálních vztahů

1. rovinná napjatost

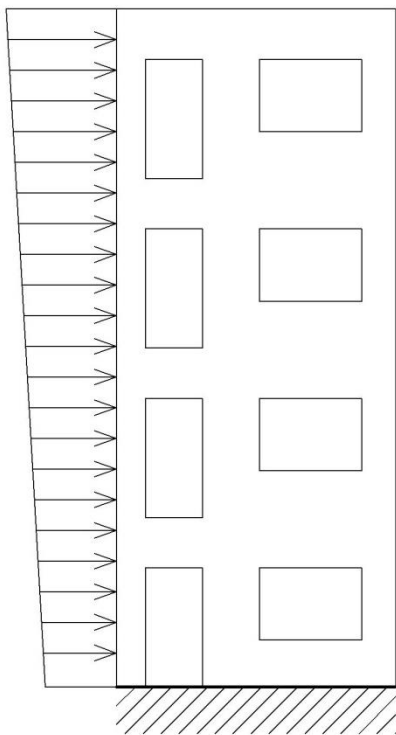
- deformace v příčném směru není omezena
- **napětí** vzniká pouze **v rovině střednice**
- typickým příkladem je běžná stěna

2. rovinná deformace

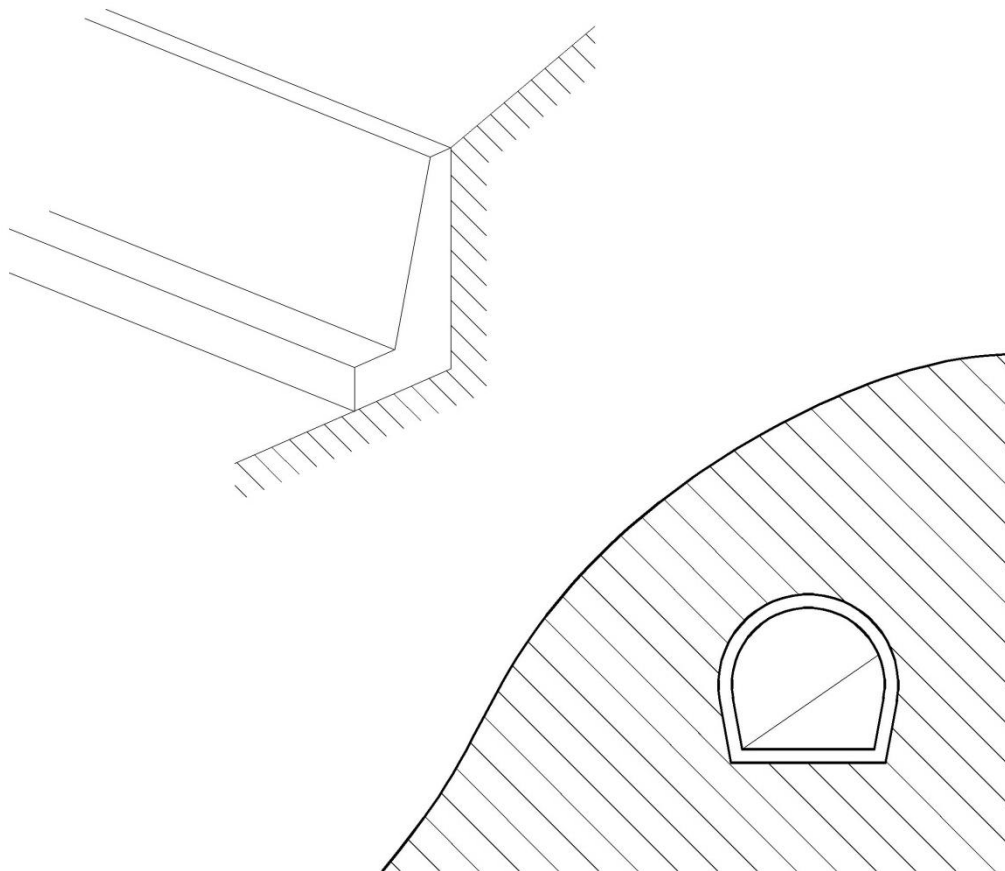
- je zamezen posun bodů ve směru kolmém na střednici
- **deformace** vzniká pouze **v rovině střednice**
- použije se pro výseky dlouhých prizmatických konstrukcí jako jsou opěrné zdi, tunely apod.
- pokud jsou okrajové podmínky konstantní ve směru z lze tímto způsobem redukovat 3D na 2D

Rovinný problém

- dvě varianty fyzikálních vztahů
- rovinná napjatost

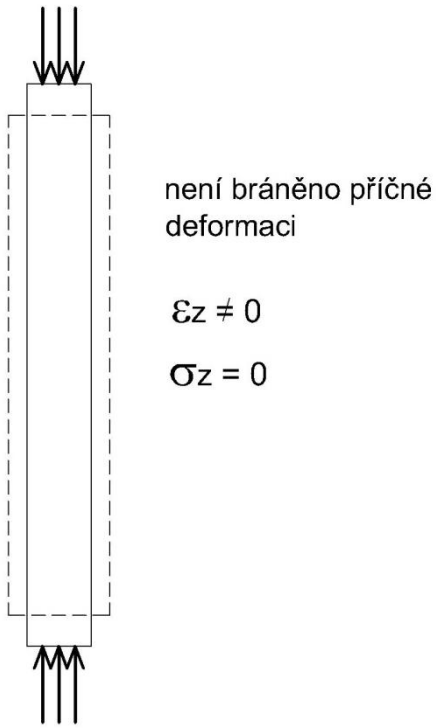


- rovinná deformace

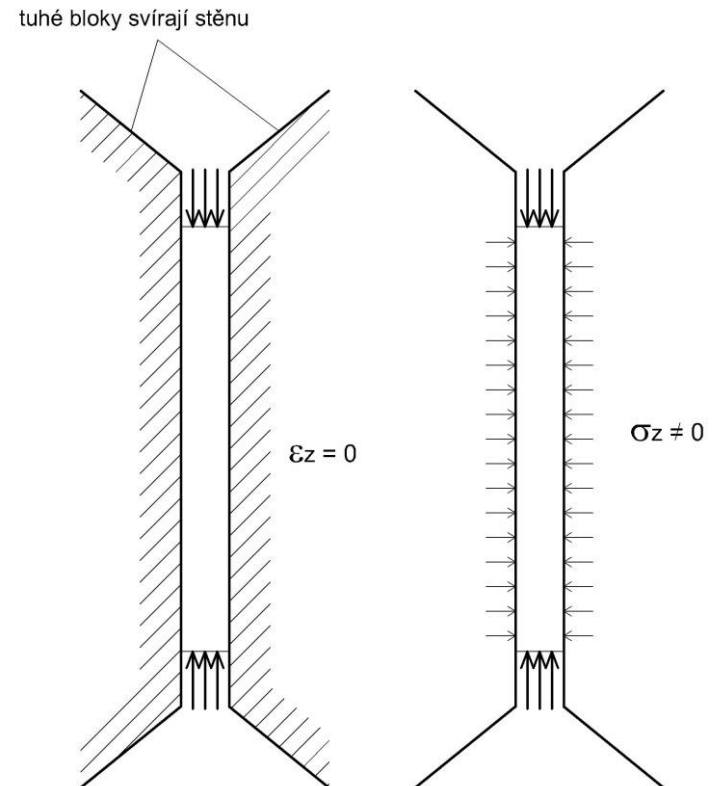


Rovinný problém

- dvě varianty fyzikálních vztahů
- rovinná napjatost



- rovinná deformace



Rovinný problém

- **Rovinná napjatost**
- pouze složky napětí ležící v rovině xy jsou nenulové
- není bráněno deformaci v příčném směru $\rightarrow$ nevzniká žádné napětí $\sigma_z = 0$
- vektor napětí má tedy tvar

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, 0, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$$

- dosazením vektoru napětí do fyzikálních vztahů

$$\varepsilon = C\sigma$$

Rovinný problém

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- se obdrží vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$$

- deformace v příčném směru ε_z je způsobena vlivem Poissonova součinitele a vzniká působením normálových napětí ve střednicové rovině
- deformaci ε_z je možno vyjádřit dodatečně, ale při výpočtu se s ní nepracuje

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

Rovinný problém

- zbylé tři rovnice lze zapsat pomocí matice poddajnosti

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad \varepsilon = C\sigma \quad \begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \end{aligned}$$

- matice tuhosti se získá inverzí $[D]=[C]^{-1}$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad \sigma = D\varepsilon$$

Rovinný problém

- **Rovinná deformace**
- pouze složky deformace ležící v rovině xy jsou nenulové
- posun bodů ve směru osy z je nulový → nevzniká žádná deformace v tomto směru

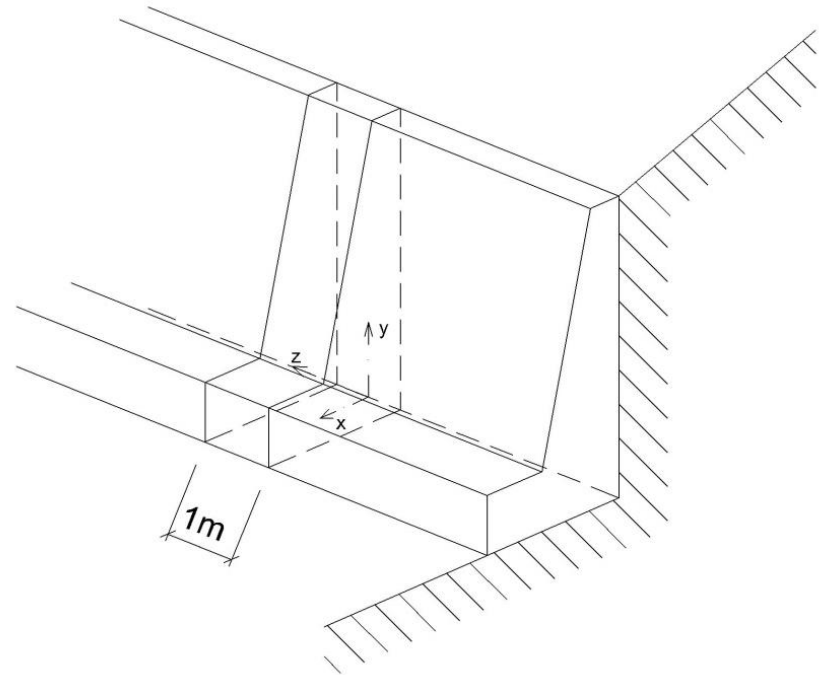
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- vektor deformace má tedy tvar

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$$

- dosazením vektoru deformace do fyzikálních vztahů

$$\sigma = D\varepsilon$$



Rovinný problém

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- se obdrží vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$$

- napětí v příčném směru je způsobeno vlivem Poissonova součinitele
- napětí σ_z je možno vyjádřit dodatečně, ale při výpočtu se s ním nepracuje

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \neq 0$$

Rovinný problém

- zbylé tři rovnice lze zapsat pomocí matice tuhosti

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad \sigma = D\varepsilon$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

- matice poddajnosti se získá inverzí $[D]=[C]^{-1}$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

$$[C] = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = C\sigma$$

Rovinný problém

- **geometrické vztahy**
- získají se redukcí prostorových vztahů pro rovinu xy

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- maticový zápis

$$\varepsilon - \partial^T \mathbf{u} = 0$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \{u_x, u_y\}^T \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

Rovinný problém

- diferenciální podmínky rovnováhy
- získají se redukcí prostorových vztahů do roviny xy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- maticový zápis

$$\partial \sigma + X = 0$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

kde $X = \{X, Y\}^T$

je vektor objemových sil

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

Rovinný problém

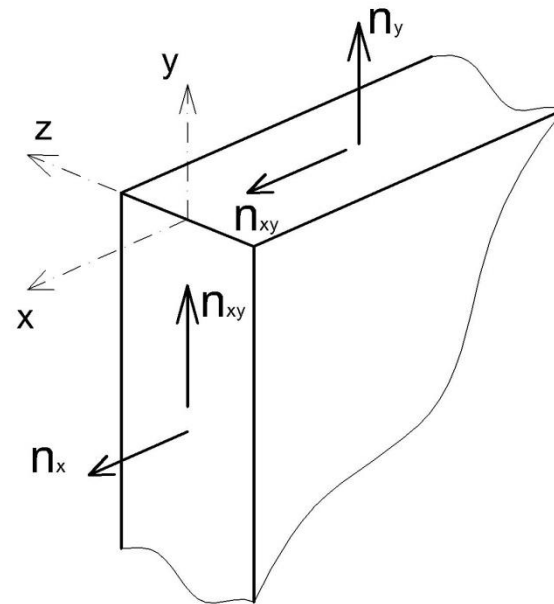
- **vnitřní síly ve stěně**
- předpoklad konstantního rozložení napětí a deformace po tloušťce stěny
- vnitřní síly jsou definovány na jednotku délky řezu
- jednotkou je kN/m

$$n_x = \sigma_x t$$

$$n_y = \sigma_y t$$

$$n_{xy} = \tau_{xy} t$$

- t ... je tloušťka desky



Rovinný problém

- Rekapitulace veličin

- vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

- vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

- vektor přemístění

$$\{u\} = \{u_x, u_y\}^T$$

- Rekapitulace vztahů

- diferenciální podmínky rovnováhy (2)

$$\partial\sigma + X = 0$$

- fyzikální vztahy (3)

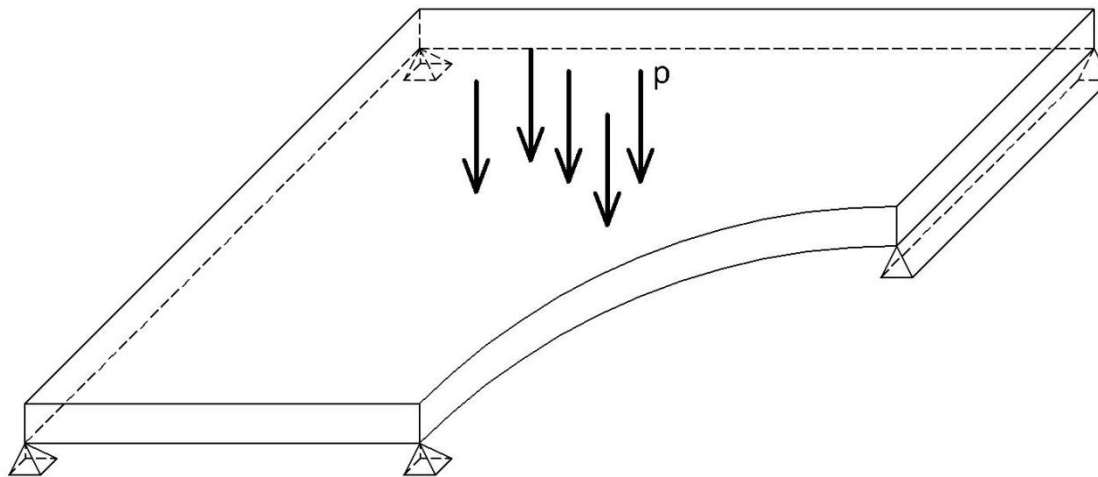
$$\varepsilon = C\sigma \quad \text{nebo} \quad \sigma = D\varepsilon$$

- geometrické vztahy (3)

$$\varepsilon - \partial^T u = 0$$

Desky

- Definice
- 2D model konstrukce
- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha je rovinná
- zatížení a okrajové podmínky působí kolmo ke střednicové rovině

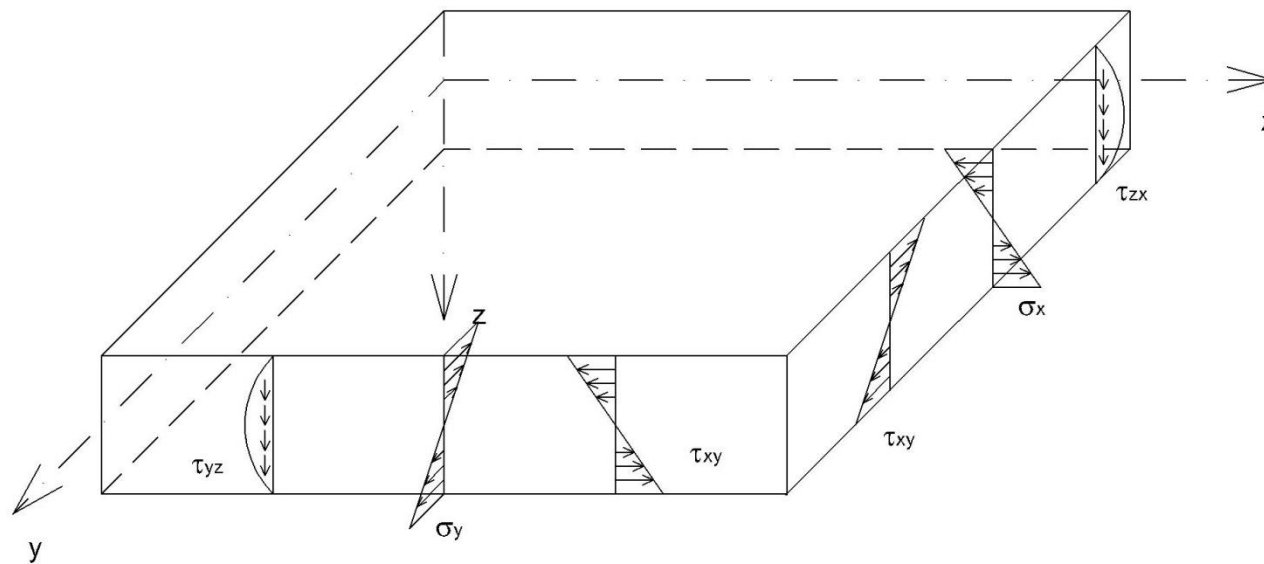


Desky

- Předpoklady odvození
- Kirchhofova (tenká) deska – technická teorie desek
 - body střednicové roviny se v této rovině neposunují
 - normálové napětí a deformace ve směru normály ke střednicové rovině se zanedbají
 - body na normále ke střednici zůstávají po deformaci v přímce, která je kolmá k ohybové ploše
- Mindlinova (tlustá) deska
 - body střednicové roviny se v této rovině neposunují
 - normálové napětí a deformace ve směru normály ke střednicové rovině se zanedbají
 - body na normále ke střednici zůstávají po deformaci v přímce, která není kolmá k ohybové ploše
- Rozdíl pojetí
 - u tlusté desky se uvažuje vliv smyku na průhyb desky, deformace od smykového působení způsobí změnu úhlu mezi ohybovou plochou a původní normálou ke střednicové ploše.

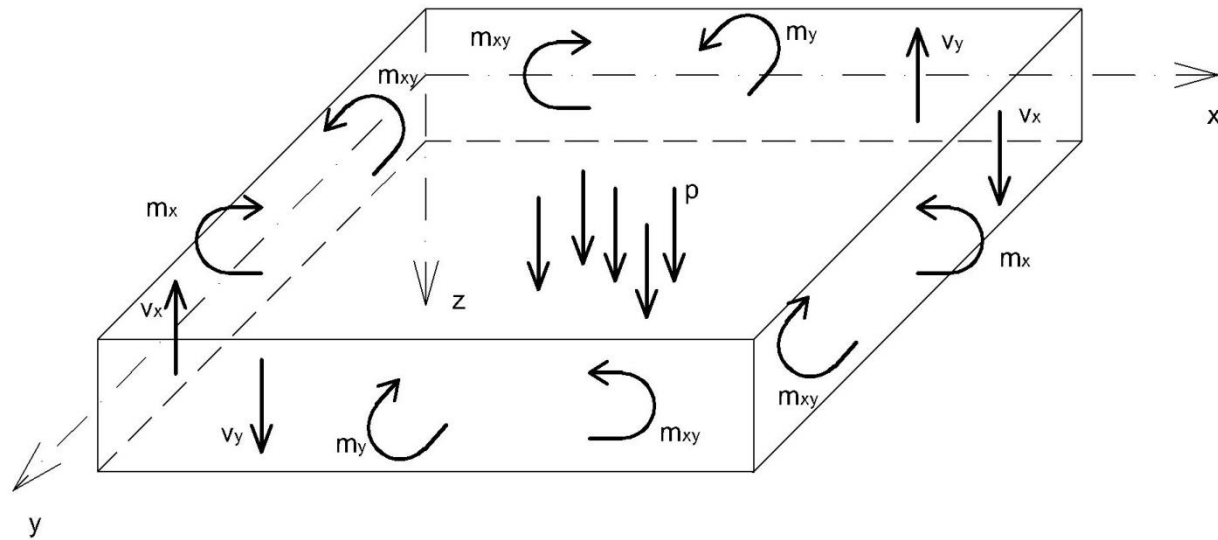
Desky

- napětí v desce



Desky

- vnitřní síly v desce



Desky

- podmínky rovnováhy
- silová $\Sigma F_{z,i}=0$

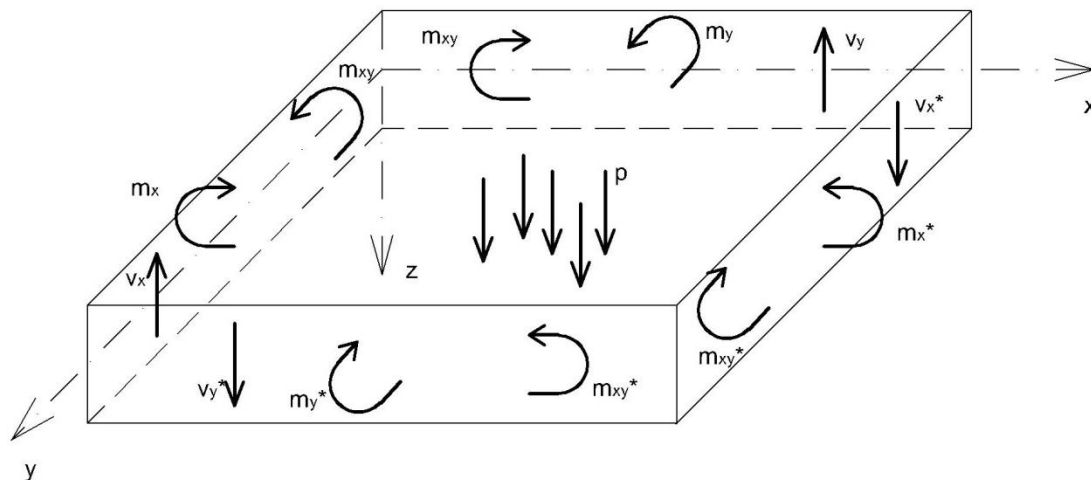
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

- momentové
- $\Sigma M_{y,i}=0$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

- $\Sigma M_{x,i}=0$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_y = 0$$



Desky

- geometrické vztahy - ohyb

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = \varepsilon_{mx} z$$

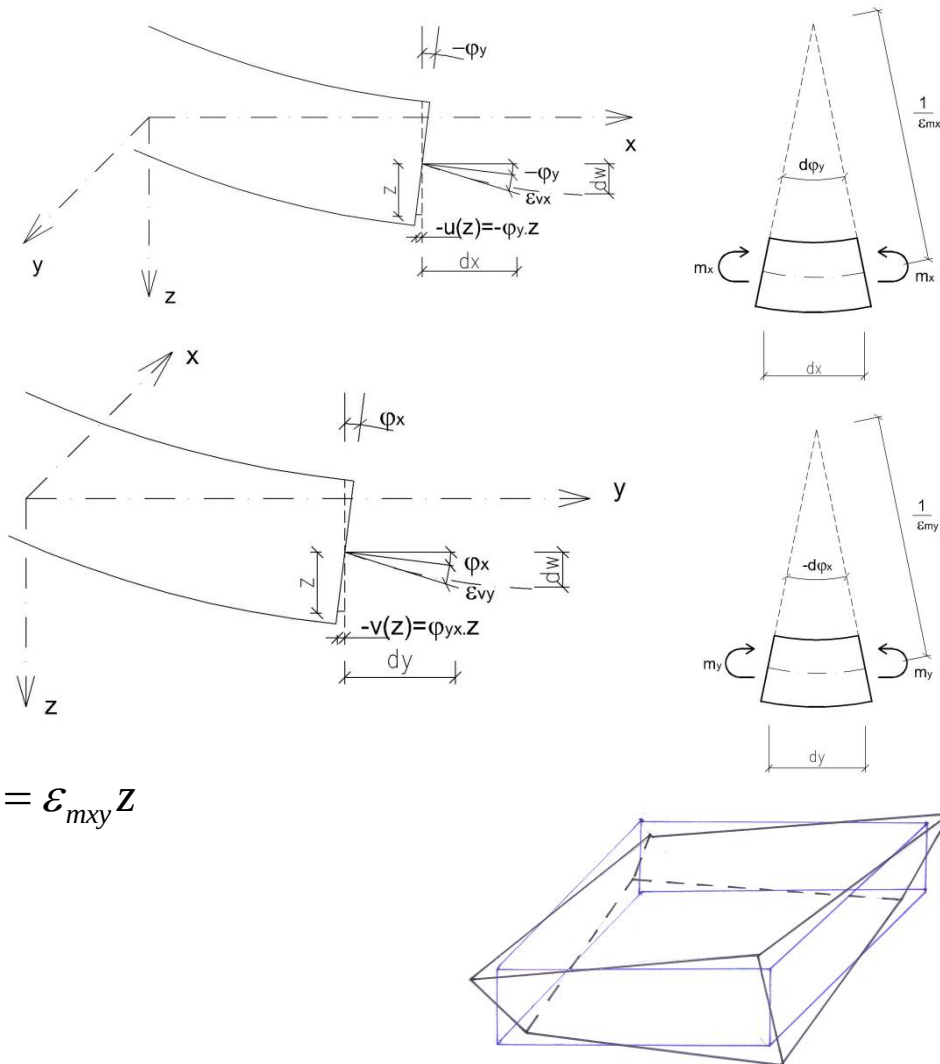
$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y(z) = \frac{\partial v(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = \varepsilon_{my} z$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}(x) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) z = \varepsilon_{mxy} z$$

$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

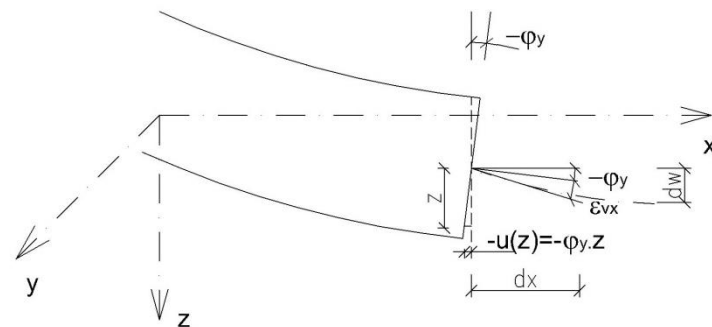
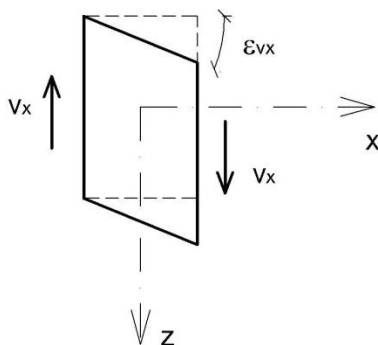


Desky

- geometrické vztahy – vliv smyku

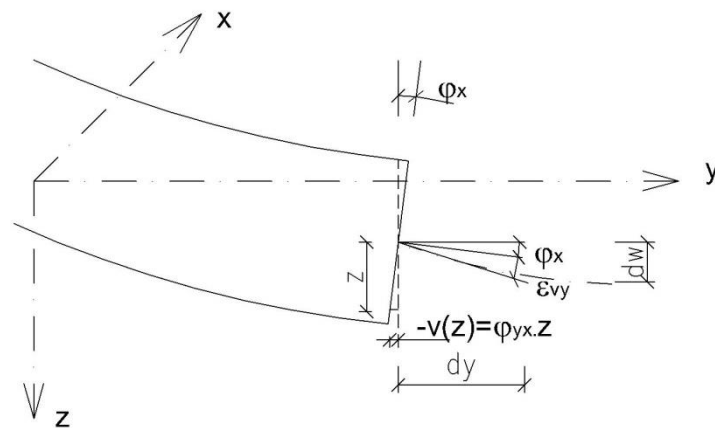
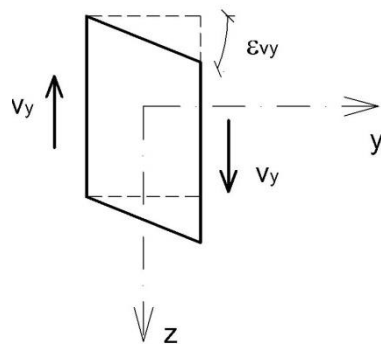
$$\frac{dw}{dx} = -\varphi_y + \varepsilon_{vx}$$

$$\varepsilon_{vx} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$$



$$\frac{dw}{dy} = \varphi_x + \varepsilon_{vy}$$

$$\varepsilon_{vy} = \frac{dw}{dy} - \varphi_x$$



Desky

- Fyzikální podmínky - ohyb
- každá vrstva ve stavu rovinné napjatosti:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} (1-\nu) \gamma_{xy}$$

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y] z \, dz$$

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x] z \, dz$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(1-\nu)}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xy} z \, dz$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

kde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ je tzv. **desková tuhost**

Desky

- fyzikální podmínky - smyk

- platí obdobné vztahy jako pro prut

- průřez je obdélník -> redukovaná smyková plocha: $A_k = \frac{A}{1.2}$

$$v_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz$$

$$v_x = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vx}$$

$$V = GA_k \varepsilon_v = G \frac{A}{1.2} \varepsilon_v$$

$$v_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

$$v_y = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vy}$$

- vztahy jsou odvozeny na základě energetických podmínek

Desky

- Mindlinova deska (s vlivem smyku) versus Kirchhofova deska
- u Kirchhofovy desky zanedbáváme vliv smyku na průhyb a uvažujeme

$$Gh = \infty \quad \varepsilon_{vx} = \varepsilon_{vy} = 0$$

- normála ke střednici, zůstává po deformaci normálou k ohybové ploše
- fyzikální podmínky pro měrné posouvající síly a zkosení ztrácí význam

$$v_x = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vx} \quad v_y = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vy}$$

- dosazením za ε_v a vyloučením φ se získají nové geom. pod.

$$\varepsilon_{vy} = \frac{dw}{dy} - \varphi_x$$

$$\varphi_x = \frac{dw}{dy}$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{vx} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$$

$$\varphi_y = -\frac{dw}{dx}$$

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

Desky

- rekapitulace veličin / vztahů - Mindlinova – tlustá deska (s vlivem smyku)
- měrné vnitřní síly $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- deformace průřezu $\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \varepsilon_{mxy}, \varepsilon_{vx}, \varepsilon_{vy}$
- přemístění w, φ_x, φ_y

podmínky statické

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

podmínky geometrické

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{vx} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$$

$$\varepsilon_{vy} = \frac{dw}{dy} - \varphi_x$$

podmínky fyzikální

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

$$v_x = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vx}$$

$$v_y = \frac{Gh}{1.2} \varepsilon_{vy}$$

Desky

- rekapitulace veličin / vztahů - Kirchhofova – tenká deska (bez vlivu smyku)
- měrné vnitřní síly $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- deformace průřezu $\varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \varepsilon_{mxy}$
- přemístění w

podmínky statické

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

podmínky geometrické

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

podmínky fyzikální

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

Desky

- Tenká deska – vnitřní síly vyjádřené pomocí průhybů

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$$

$$m_x = D \left[\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my} \right]$$

$$m_y = D \left[\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx} \right]$$

$$m_{xy} = D \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{mxy}$$

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \right)$$

Desky

- Desková rovnice

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ m_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - \nu_x = 0$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - \nu_x = 0$$

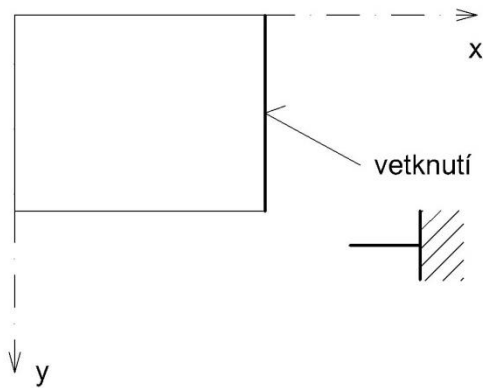
$$\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$



Desky

- Okrajové podmínky - vetknutí

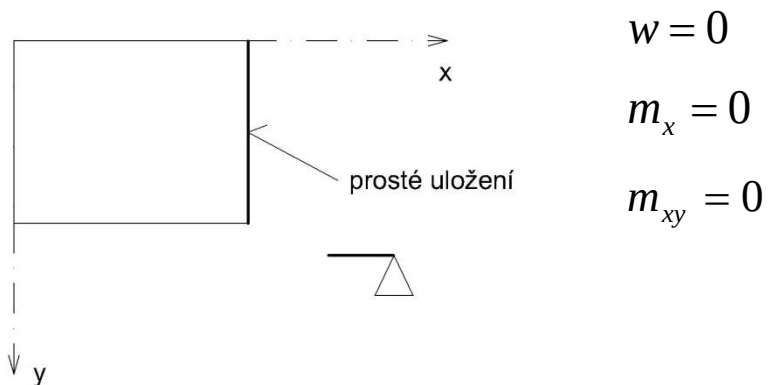


$$\begin{aligned}w &= 0 \\ \varphi_y &= 0 \\ m_{xy} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w = 0 &\quad \longrightarrow \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varphi_y = 0 &\quad \longrightarrow \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial x} = 0\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned}w = 0 \\ \varphi_y = 0\end{aligned}} \right\} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_{xy} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Desky

- Okrajové podmínky – prosté podepření



$$\left. \begin{aligned} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\text{green arrow}} \varphi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ &m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

zbývá vyřešit kroutící momenty (převedou se do posouvajících sil na hraně)

Desky

- Okrajové podmínky – prosté podepření

- Kroutící moment na délce Δy $M = m_{xy} \Delta y$

- nahrazený dvojicí sil $F = \frac{M}{\Delta y} = m_{xy}$

- rozdíl sousedních sil $\Delta F = F_{i+1} - F_i = m_{xy,i+1} - m_{xy,i}$

- pomocí Taylorova rozvoje

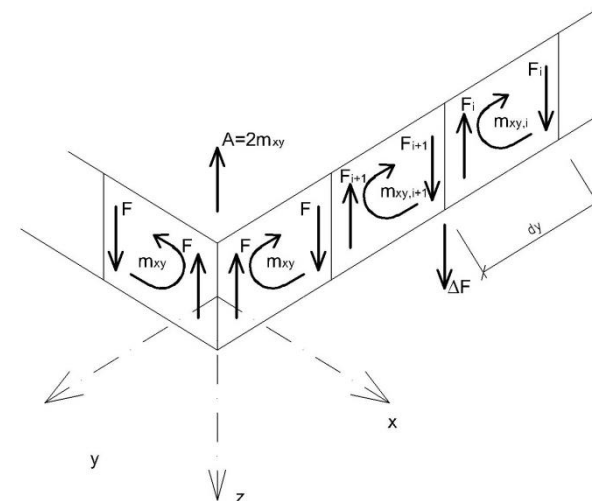
$$\Delta F = m_{xy,i+1} - m_{xy,i} = m_{xy}(y + \Delta y) - m_{xy}(y) = m_{xy}(y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Delta y - m_{xy}(y) = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Delta y$$

- přírůstek síly vyjádřený na jednotku délky

$$\Delta v_x = \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

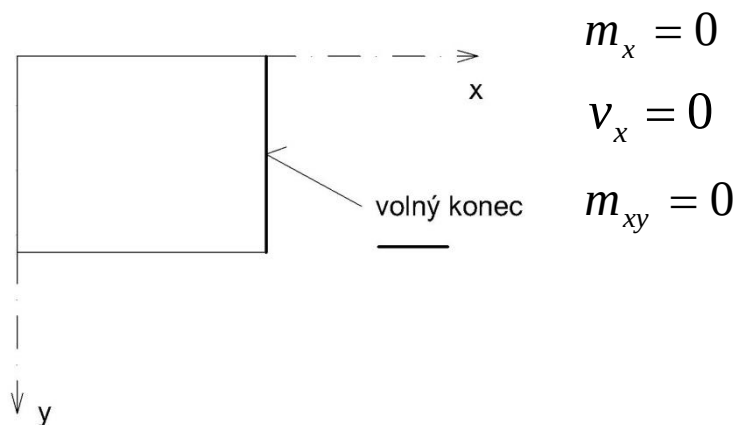
- se přidá k posouvajícím silám na hraně
(doplněná posouvající síla)

$$\bar{v}_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$



Desky

- Okrajové podmínky – volný okraj



$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_x = 0$$

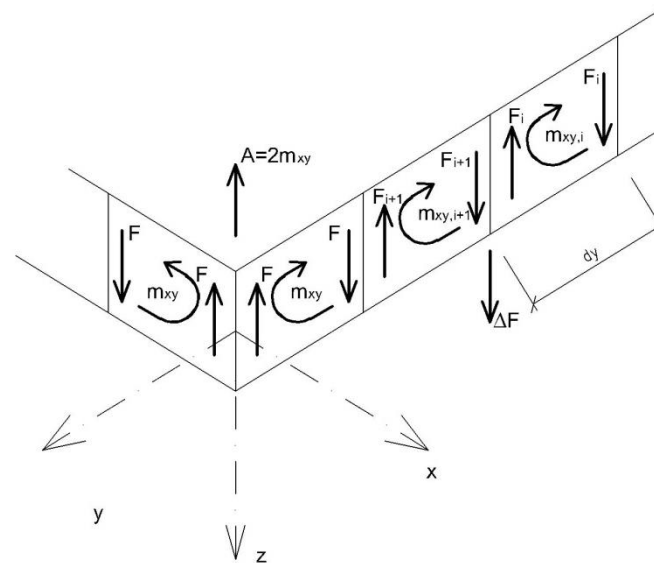
$$\bar{v}_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = 0 \\ m_{xy} = 0 \end{array} \right.$$

Desky

- rohové síly
- dvojice sil od kroutících momentů se v rozích nevyruší, ale sečtou, vznikne rohová síla

$$A = 2m_{xy}$$

- pokud nejsou rohy desky uchyceny, zvedají se, zvýší se momenty v poli a průhyby
- pokud jsou uchyceny vznikají v rozích kroutící momenty



Deskostěna

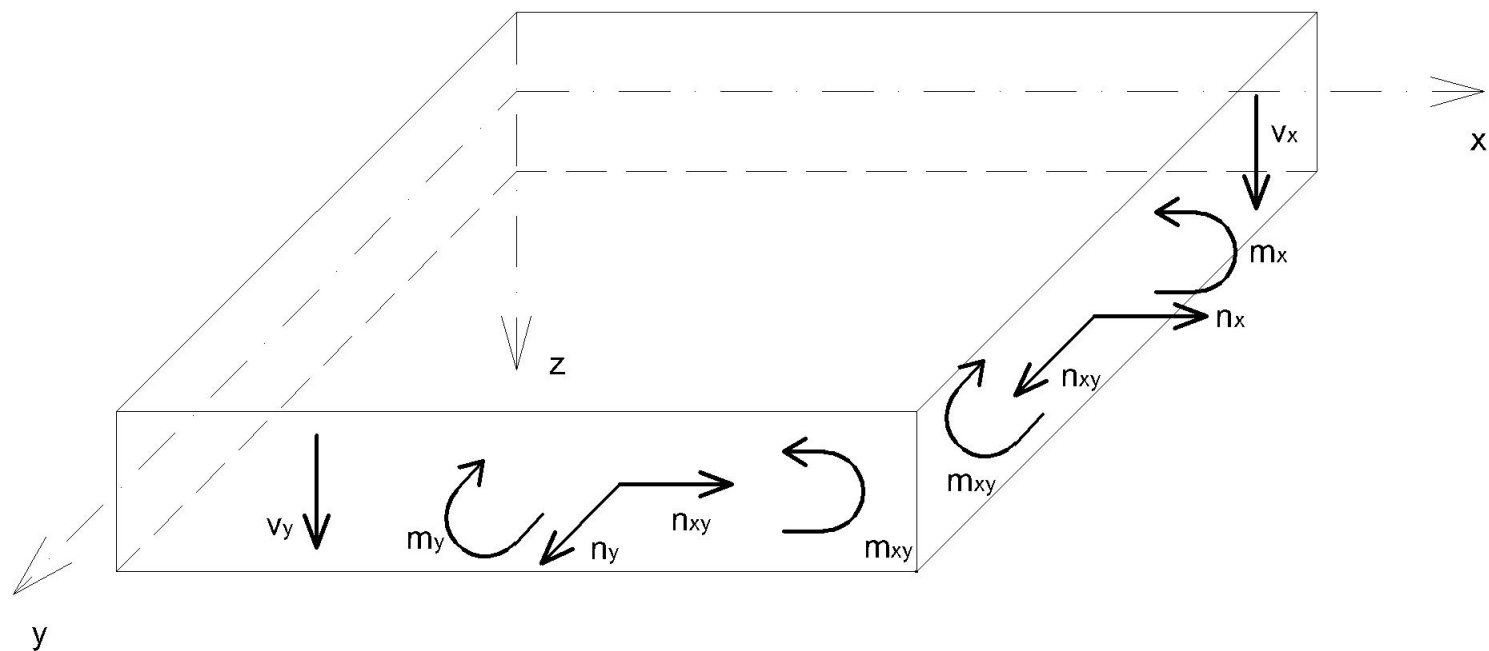
- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha **je** rovinná
- zatížení a okrajové podmínky působí **obecně**
- **měrné vnitřní síly** – definované na jednotku délky řezu
- **membránové**

$$n_x, n_y, n_{xy}$$

- - od konstantního průběhu napětí po tloušťce (obdoba stěnového chování)
- **ohybové**
 $m_x, m_y, m_{xy}, v_x, v_y$
- - od lineárního průběhu napětí po tloušťce a příčného smyku (obdoba deskového chování)

Deskostěna

- vnitřní síly



Skořepiny

- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha **není** rovinná
- zatížení a okrajové podmínky působí **obecně**
- **měrné vnitřní síly** – definované na jednotku délky řezu
- **membránové**

$$n_x, n_y, n_{xy}, n_{yx}$$

- - od konstantního průběhu napětí po tloušťce (obdoba stěnového chování)
- **ohybové**

$$m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}, v_x, v_y$$

- - od lineárního průběhu napětí po tloušťce a příčného smyku (obdoba deskového chování)
- **Technická teorie tenkých skořepin:**

$$h \ll L_x, L_y \quad (\text{tloušťka, rozměry})$$

$$h \ll r_x, r_y \quad (\text{poloměry křivosti})$$

$$m_{xy} = m_{yx} \quad n_{xy} = n_{yx}$$

- **Oblý tvar** u dobře navržené skořepiny zajišťuje výrazně membránové působení – efektivní využití materiálu – štíhlé konstrukce

Skořepiny

- vnitřní síly

