

Pružnost a plasticita II

NDA015

Luděk Brdečko

VUT v Brně, Fakulta stavební,
Ústav stavební mechaniky

tel: 541147368

email: brdecko.l @ fce.vutbr.cz

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/brdecko.l/html/distcz.htm>

Obsah předmětu

- 1. přednáška

- spolehlivost konstrukcí
- výpočtové modely
- základní veličiny pružnosti
- základní vztahy pružnosti
- nelineární pružnost

- 2. přednáška

- 3D problém - těleso (základní veličiny a vztahy)
- prut (základní veličiny a vztahy)

- 3. přednáška

- Rovinný problém - stěny (základní veličiny a vztahy)
- desky (základní veličiny a vztahy)
- skořepiny

- 4. přednáška

- metody řešení – přesné, přibližné
- variační metody – Ritzova metoda, Metoda konečných prvků

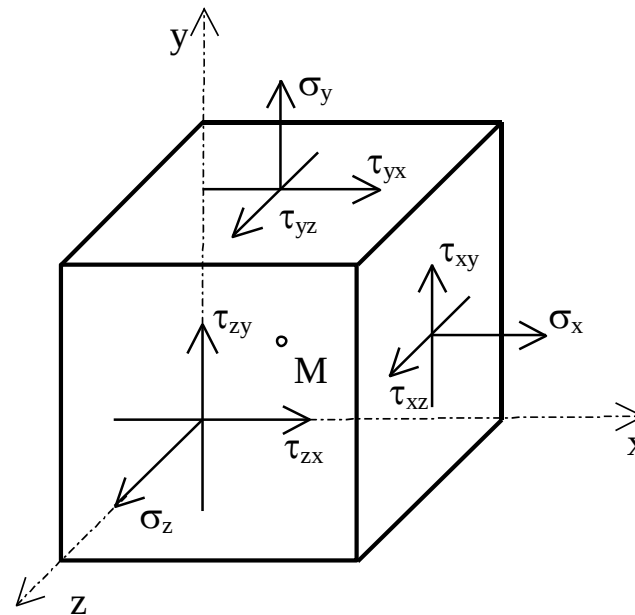
Těleso

- **Prostorový model**
- základní veličiny a vztahy nejlépe odrážejí skutečnost
- obtížně řešitelný systém rovnic
- obtížnější interpretace výsledků

- základní vztahy poskytují rámec pro odvození 1D a 2D modelů
- 1D a 2D modely zavádí další předpoklady, pomocí kterých se redukuje dimenze úlohy i počet rovnic a jejich neznámých veličin

Těleso

- napětí na prostorovém elementu
- normálové
 - působí kolmo k ploše
- smykové
 - působí v ploše
- první index – normála k ploše
- druhý index – směr působení
- kladná plocha – plocha s větší souřadnicí
- kladný směr napětí
 - na kladné ploše působí souhlasně s kladnými souřadnými osami



Těleso

- podmínky rovnováhy - momentové

- momentová rovnováha k ose z'

□ $\Sigma M_{z'} = 0$

$$(\tau_{xy} + \tau'_{xy}) dy dz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + \tau'_{yx}) dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

- z Taylorova rozvoje: $\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ $\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$

$$(2\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy dz \frac{dx}{2} - (2\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

- vynechají se členy s dx^2 a dy^2 a získá se $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

- analogicky pro další osy

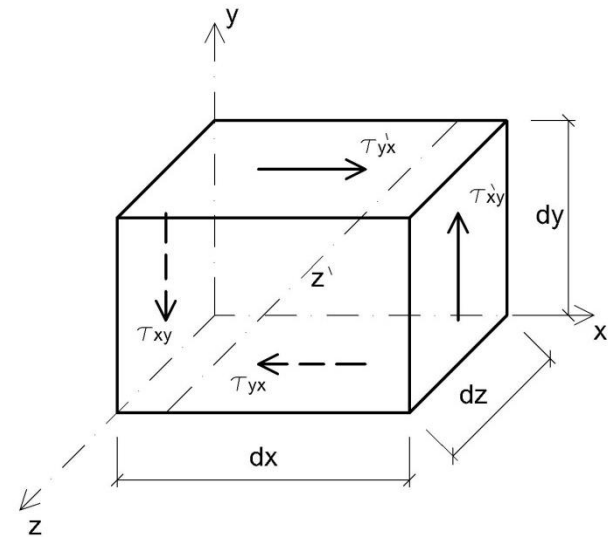
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- tato zákonitost se nazývá **vzájemnost smykových napětí**

- díky vzájemnosti smykových napětí je možno pracovat jen se 6 složkami napětí, ale také pouze se třemi podmínkami rovnováhy (silovými)

- nový vektor napětí má tvar

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$



Těleso

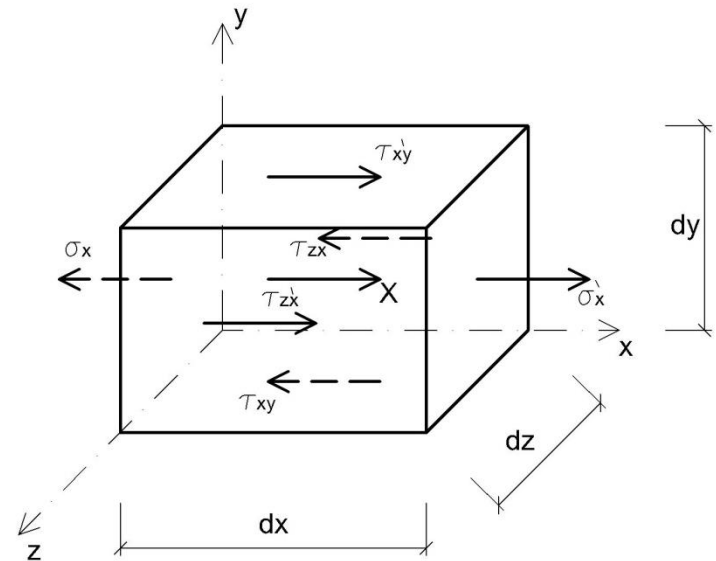
- Statické rovnice – diferenciální podmínky rovnováhy - silové
- vyjadřují silovou rovnováhu na diferenciálním elementu tělesa.
- v bodě posunutém o diferenciální délku je možno jejich hodnotu definovat pomocí Taylorova rozvoje využitím první parciální derivace dané veličiny
- např. σ_x se v bodě posunutém o dx definuje

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

- např. pro **směr x** se podmínka $\Sigma F_{x,i}=0$ vyjádří ve tvaru:

$$(\sigma_x^* - \sigma_x) dy dz + (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}) dx dz + (\tau_{zx}^* - \tau_{zx}) dx dy + X dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$



Těleso

- podmínky rovnováhy silové
- zbývající se získají z podmínek rovnováhy pro další směry $\Sigma F_{yi}=0$ a $\Sigma F_{zi}=0$, nebo cyklickou záměnou indexů $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- maticový zápis

$$\partial \sigma + X = 0$$

- kde $X = \{X, Y, Z\}^T$

je vektor objemových sil

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

Těleso

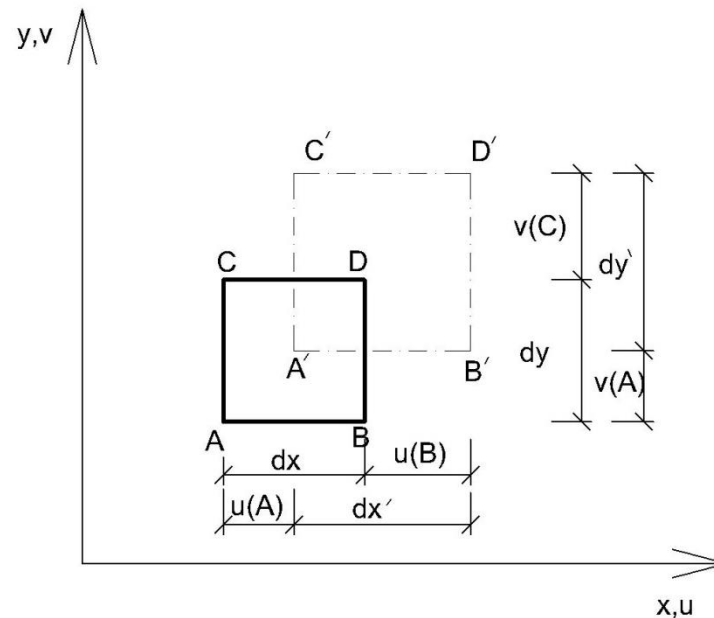
- Geometrické vztahy
- vyjadřují závislost mezi přemístěními a deformacemi ($u - \varepsilon$)
- odvodí se z geometrických závislostí na elementu tělesa, který deformací změní tvar

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} \\ &= \frac{(dx + u(B) - u(A)) - dx}{dx} \\ &= \frac{\left(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u\right) - dx}{dx}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(A) = u(x) = u$$

$$u(B) = u(x + dx) = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$



Těleso

$$u(A) = u(x, y) \qquad u(C) = u(x, y + dy) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

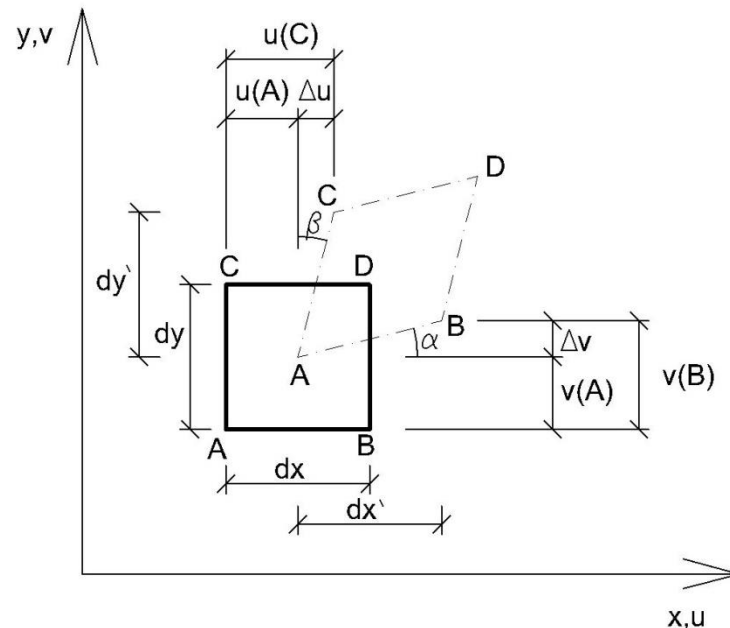
$$v(A) = v(x, y) \qquad v(B) = v(x + dx, y) = v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \frac{\Delta v}{dx'} + \frac{\Delta u}{dy'} =$$

$$\frac{v(B) - v(A)}{dx'} + \frac{u(C) - u(A)}{dy'}$$

$$\approx \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



Těleso

- Geometrické vztahy
- Zbývající složky vektoru deformace se odvodí ze závislostí ve zbývajících dvou rovinách (možno získat také cyklickou záměnou $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$ a $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

- maticový zápis

$$\varepsilon - \partial^T \mathbf{u} = 0$$

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

Těleso

1. Fyzikální vztahy

- vztah napětí deformace ($\sigma - \varepsilon$)
deformace od normálového napětí

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

- pro ostatní směry

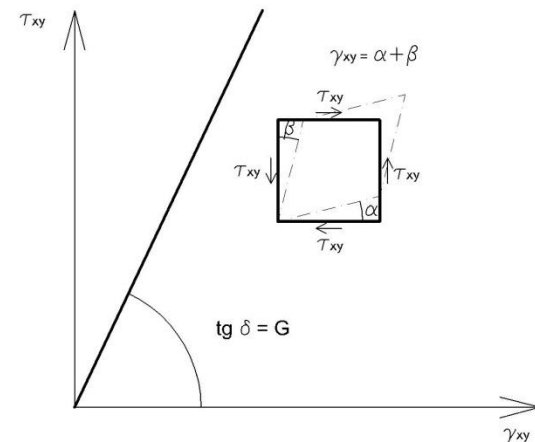
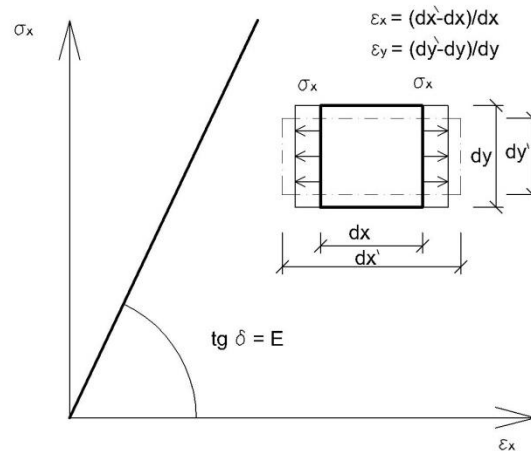
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

- smykové napětí

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}$$

- materiálové charakteristiky:
- E ... Youngův modul pružnosti
- ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce
- G... modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Těleso

- Fyzikální vztahy
- deformace ε_x od napětí ve všech směrech

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad \varepsilon_x = -\frac{1}{E} \nu \sigma_y \quad \varepsilon_x = -\frac{1}{E} \nu \sigma_z$$

- součtem deformací se získá

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

- pro další směry lze odvodit stejným způsobem nebo cyklickou záměnou indexů

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

- deformace od smyku jsou pro jednotlivé roviny nezávislé, opět lze získat záměnou indexů

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Těleso

- Fyzikální vztahy
- maticově

$$\varepsilon = C\sigma$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

- kde **C** je matice poddajnosti

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Těleso

- Fyzikální vztahy
- vyjádření závislostí napětí na deformacích se získá inverzí vztahů

$$\sigma = D\varepsilon$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

kde **D** je matice tuhosti
a získá se inverzí
matice poddajnosti **C**

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

$$[D] = [C]^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

Těleso

- Rekapitulace veličin

- vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

- vektor přemístění

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T$$

- Rekapitulace vztahů

- diferenciální podmínky rovnováhy (3)

$$\partial\sigma + X = 0$$

- fyzikální vztahy (6)

$$\varepsilon = C\sigma \quad \text{nebo} \quad \sigma = D\varepsilon$$

- geometrické vztahy (6)

$$\varepsilon - \partial^T u = 0$$

Hlavní napětí

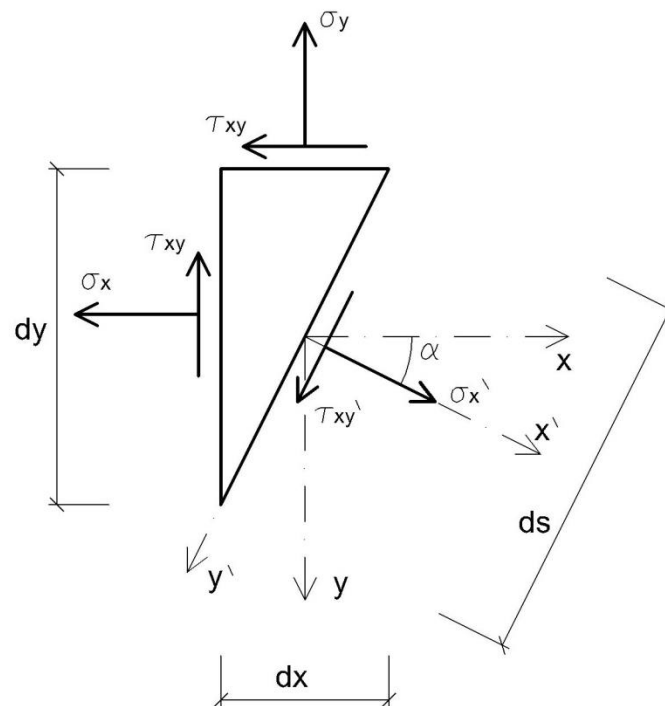
- Transformace napětí v rovině
- otáčením souřadného systému se mění hodnoty vektoru napětí

$$\sigma_x^* = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_y^* = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{xy}^* = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

- Tyto vztahy je možné odvodit z rovnováhy na seříznutém elementu



Hlavní napětí

- Hlavní napětí v rovině
- pro určitý úhel pootočení se získá stav následující napjatosti, kdy normálová napětí dosahují extrémních hodnot ze všech možných směrů
- úhel pootočení souřadného systému, lze získat z podmínky extrému:

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \alpha_o} = 0$$

- provedením derivace a porovnáním se vzorcem pro transformovaná smyková napětí

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \alpha_o} = -\sigma_x \sin 2\alpha + \sigma_y \sin 2\alpha + 2\tau_{yz} \cos 2\alpha = 2\tau_{xy}^* = 0$$

se zjistí, že smykové napětí je nulové pro tento souřadný systém (hlavní osy)

$$\tau_{xy}^* = 0$$

a pro úhel pootočení hlavních os platí:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Hlavní napětí

- Hlavní napětí v rovině
- Dosazením úhlu pootočení hlavních os do transformačních vztahů pro normálová napětí se získají hlavní napětí σ_1, σ_2 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

- obvykle je σ_1 označováno algebraicky větší z obou hlavních napětí (uvažuje se (+) ve vzorci)

$$\sigma_1 = \max \quad \sigma_2 = \min$$

- Hlavní osy jsou na sebe kolmé, algebraicky větší napětí svírá menší úhel s prvním hlavním napětím

Hlavní napětí

- Hlavní napětí v prostoru
- normálová napětí pro tři navzájem kolmé směry nabývají hodnot:

$$\sigma_1 = \max \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \sigma_3 = \min$$

- smyková napětí jsou nulová

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

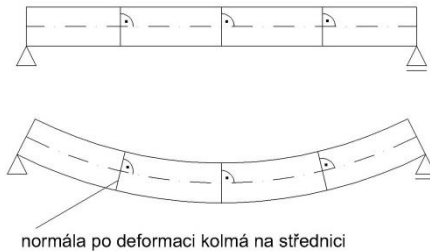
- hlavní napětí σ jsou řešením kubické rovnice:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

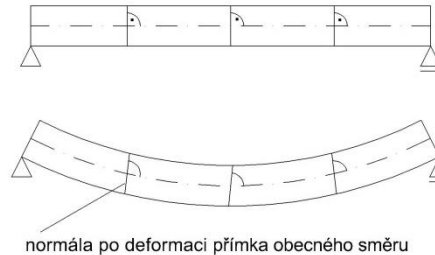
Prut

- **Základní předpoklady rovinného prutu**
- průřezy zůstanou po deformaci **rovinné** a
 - **kolmé** na osu prutu (**prut bez vlivu práce posouvajících sil**)
 - obecně **libovolně natočené** vzhledem k ose prutu (**prut s vlivem práce posouvajících sil**)
- normálové napětí ve směru kolmém na osu prutu je **nulové**

Prut bez vlivu smyku



Prut s vlivem smyku



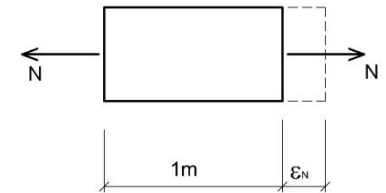
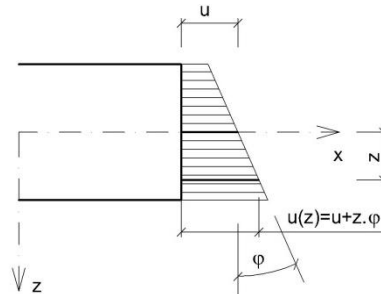
- **z předpokladů plyne**
- lineární průběh deformace ε_x a napětí σ_x po výšce průřezu
- svislý posun je po výšce konstantní
- vodorovný posun, resp. normálovou deformaci po výšce lze vyjádřit pomocí veličin na ose prutu (u , φ) resp. (ε_N , ε_M)

Prut

- geometrické podmínky
- tah - deformace v ose prutu

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{x,(z=0)} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_N = u'$$



- tah + ohyb
- vodorovný posun, resp. normálovou deformaci po výšce lze vyjádřit pomocí veličin na ose prutu (u , φ) resp. (ε_N , ε_M)

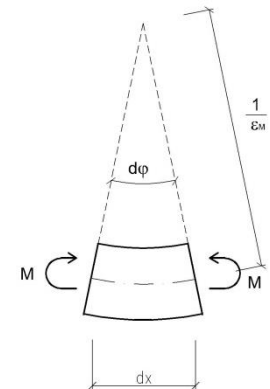
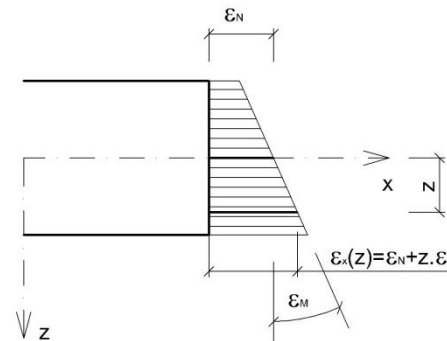
$$u(z) = u + z \cdot \varphi$$

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z = \varepsilon_N + \varepsilon_M \cdot z$$

kde

$$\varepsilon_M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

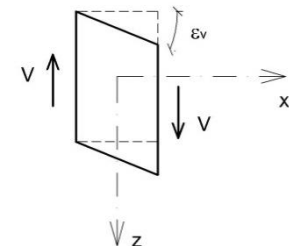
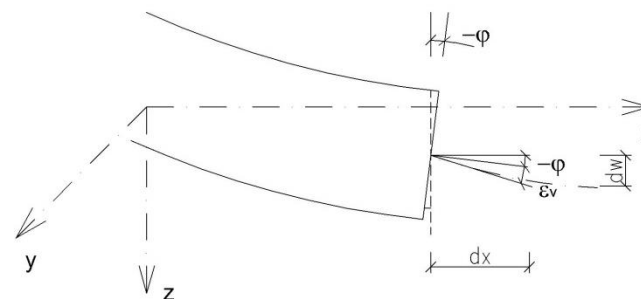
$$\varepsilon_M = \varphi'$$



- ohyb + smyk
- natočení střednice je způsobeno natočením průřezu (φ) a zkosením (ε_V)

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi + \varepsilon_V$$

$$\varepsilon_V = w' + \varphi$$



Prut

- Diferenciální podmínky rovnováhy
- hodnota funkce v posunutém bodě (z Taylorova rozvoje)

$$N^* = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \quad V^* = V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad M^* = M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

- $\Sigma F_{xi}=0$

$$-N + N^* + n dx = 0$$

$$N' + n = 0$$

- $\Sigma F_{zi}=0$

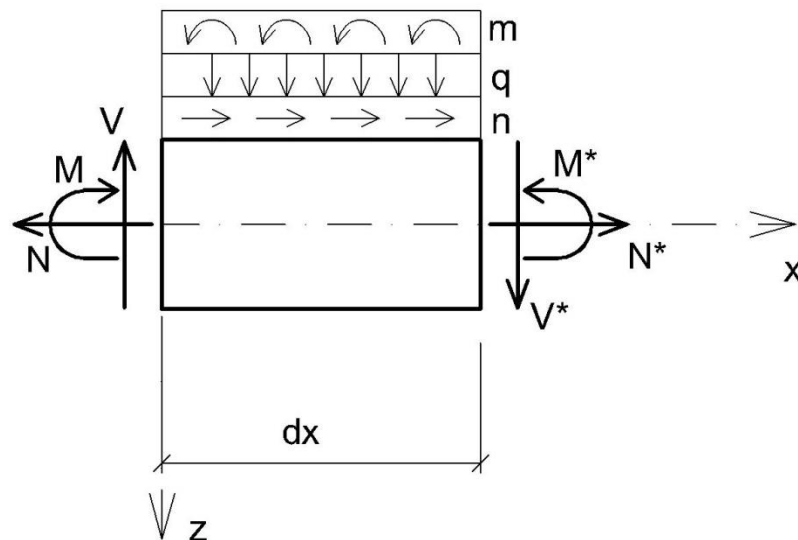
$$-V + V^* + q dx = 0$$

$$V' + q = 0$$

- $\Sigma M_{zi}=0$

$$-M + M^* + m dx - V^* dx - q dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$M' - V + m = 0$$



Prut

- Fyzikální podmínky

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = \int_A E(\varepsilon_N + z \varepsilon_M) dA =$$
$$E \varepsilon_N \int_A dA + E \varepsilon_M \int_A z dA = EA \varepsilon_N + ES \varepsilon_M$$

k těžišťové ose je $S=0$

$$N = EA \varepsilon$$

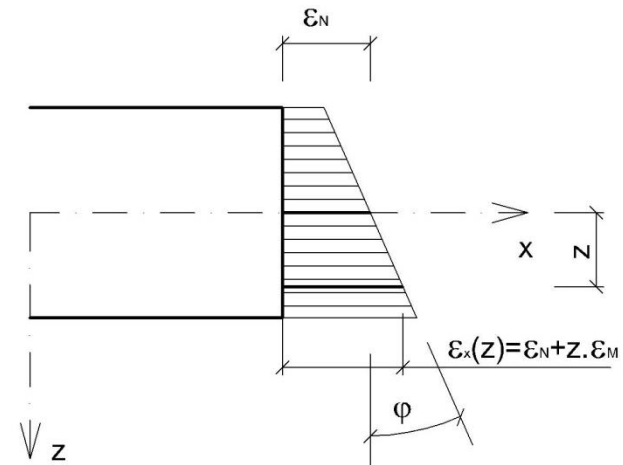
$$M = \int_A z \sigma_x dA = \int_A E z \varepsilon_x dA = \int_A E z (\varepsilon_N + z \varepsilon_M) dA =$$
$$E \varepsilon_N \int_A z dA + E \varepsilon_M \int_A z^2 dA = ES \varepsilon_N + EI \varepsilon_M$$

$$M = EI \varepsilon_M$$

$$V = \int_A \tau_{zx} dA = \int_A G \gamma_{xz} dA = GA_k \varepsilon_V$$

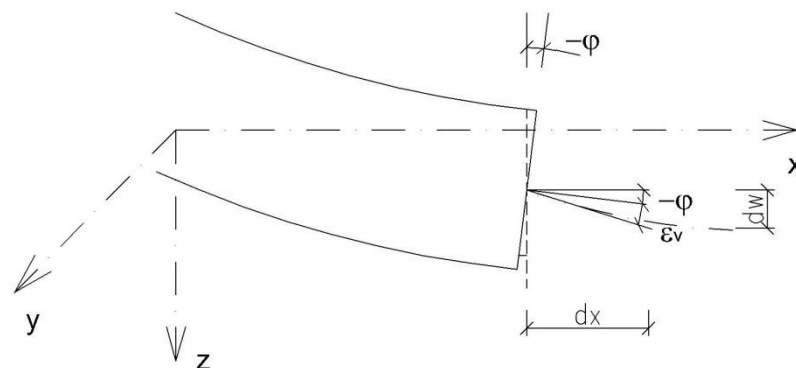
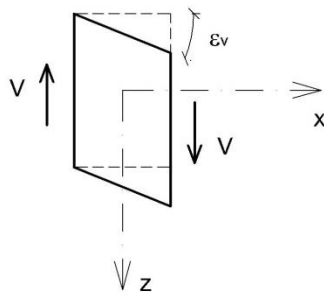
A_k redukovaná smyková plocha – odvozeno z energetické podmínky

$$V = GA_k \varepsilon_V$$



Prut

- vlivem smyku na průhyb
- Prut s vlivem smyku



- Prut se zanedbáním vlivu smyku
- normála ke střednici zůstává normálou i po deformaci prutu
- předpoklad $\varepsilon_v = 0$
 $A_k = \infty$
- pak podmínku $V = GA_k \varepsilon_v$ nelze vyjádřit
- a podmínky $\varepsilon_M = \varphi' \quad \varepsilon_v = w' + \varphi$
se upraví na $\varepsilon_M = -w''$

Prut

- Prut s vlivem smyku
- Rekapitulace veličin
- vnitřní síly N , V , M
- deformace ε_N , ε_V , ε_M
- přemístění u , w , φ
- Rekapitulace vztahů
- statické podmínky

$$N' + n = 0$$

$$V' + q = 0$$

$$M' - V + m = 0$$

- fyzikální podmínky

$$N = EA\varepsilon_N$$

$$V = GA_K\varepsilon_V$$

$$M = EI\varepsilon_M$$

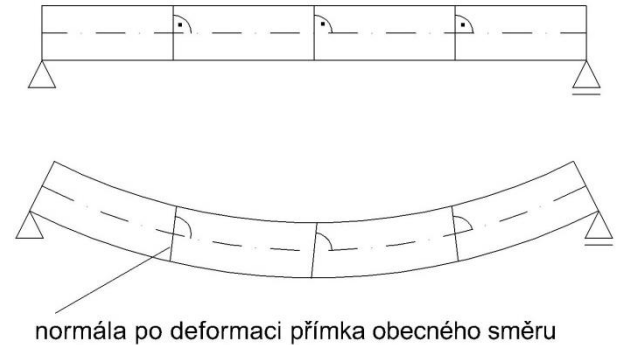
- geometrické podmínky

$$\varepsilon_N = u'$$

$$\varepsilon_M = \varphi'$$

$$\varepsilon_V = w' + \varphi$$

Prut s vlivem smyku



Prut

- Prut bez vlivu smyku
- Rekapitulace veličin
- vnitřní síly N , V , M
- deformace ε_N , ε_M
- přemístění u , w
- Rekapitulace vztahů
- statické podmínky

$$N' + n = 0$$

$$V' + q = 0$$

$$M' - V + m = 0$$

- fyzikální podmínky

$$N = EA\varepsilon_N$$

$$M = EI\varepsilon_M$$

- geometrické podmínky

$$\varepsilon_N = u'$$

$$\varepsilon_M = -w''$$

Prut bez vlivu smyku

