

Pružnost a plasticita

NDA015

Luděk Brdečko

VUT v Brně, Fakulta stavební,
Ústav stavební mechaniky

email: brdecko.l @ fce.vutbr.cz

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/brdecko.l/html/distcz.htm>

Obsah předmětu

- 1. přednáška

- spolehlivost konstrukcí
- výpočtové modely
- základní veličiny pružnosti
- základní vztahy pružnosti
- nelineární pružnost

- 2. přednáška

- těleso (základní veličiny a vztahy)
- prut (základní veličiny a vztahy)

- 3. přednáška

- Rovinný problém - stěny (základní veličiny a vztahy)
- desky (základní veličiny a vztahy)
- skořepiny

- 4. přednáška

- metody řešení – přesné, přibližné
- variační metody – Ritzova metoda, Metoda konečných prvků

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- Mezní stavy únosnosti

EQU - ztráta stability tělesa jako celku

STR - porušení konstrukce překročením pevnosti materiálu

GEO - porušení nebo nadměrné přetvoření základové půdy

FAT - porušení konstrukce únavou materiálu

- Mezní stavy použitelnosti

posuzuje se:

- deformace
- kmitání
- poškození (trhliny....)

z hledisek:

- vzhled (není u kmitání)
- pohoda uživatelů
- provozuschopnost (porušení vestavěných konstrukcí, výplní otvorů, technologie apod.

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- Návrhové situace
- trvalá (běžný provoz)
- dočasná (výstavba, rekonstrukce)
- mimořádná (výbuch, požár, náraz)
- seismická (zemětřesení)

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- 1. první mezní stav – základní podmínka

$$E_d \leq R_d$$

- E_d návrhová hodnota účinku zatížení
- R_d návrhová hodnota příslušné únosnosti

$$E_d = (F_d, a_d)$$

- F_d návrhová hodnota zatížení
- a_d návrhová hodnota rozměrů

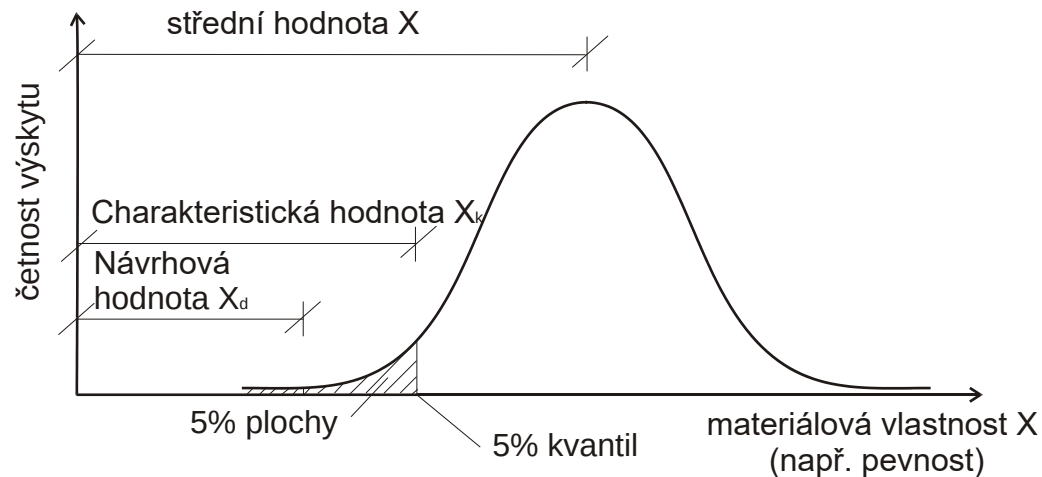
$$R_d = (X_d, a_d)$$

- X_d návrhová hodnota vlastností materiálu

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- Vlastnosti materiálů

$$X_d = \frac{X_k}{\gamma_M}$$



γ_M dílčí součinitel vlastností materiálu, který zohledňuje nepříznivé odchylky vlastností od charakteristické hodnoty

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- **Zatížení**

Označení:

G,g	stálá
Q,q	proměnná
P	předpínací síla
A	mimořádné
A _E	seismické

F_k charakteristická hodnota zatížení – určitá charakteristika skutečného výskytu zatížení

F_{rep} representativní hodnota zatížení ψF_k

ψ součinitel vyjadřující současnost působení proměnných zatížení --> kombinace

F_d návrhová hodnota zatížení daná $\gamma_f F_{rep}$

γ_f dílčí součinitel zatížení (zajišťuje spolehlivost návrhu)

$$F_d = \gamma_G G_k + \gamma_Q \psi Q_k$$

Spolehlivost konstrukcí - Eurokódy

- Kombinace zatížení

rozdílné součinitele γ a ψ

$$F_d = \gamma_G G_k + \gamma_Q \psi Q_k$$

MSU – mezní stav únosnosti

- Návrhová kombinace

MSP – mezní stav použitelnosti

zohledňují dobu trvání jednotlivých zatížení

- Charakteristická kombinace
- Častá kombinace
- Kvazistálá kombinace

Výpočtový model konstrukce

- Idealizace konstrukce

Tvorba výpočtového modelu zahrnuje idealizaci:

- tvaru
- materiálu
- okrajových podmínek
- zatížení

- Typy modelů konstrukcí

- těleso (3D)
- prut (1D)
- stěna (2D - zatížení a podepření v rovině střednicové plochy)
- deska (2D - zatížení a podepření kolmo na rovinu střednicové plochy)
- deskostěna (2D - zatížení a podepření kolmo na rovinu i v rovině střednicové plochy)
- skořepina (2D - střednicová plocha není rovinná)

Výpočtový model konstrukce

- 3D modely
 - nejvěrohodnější, bez dalších zjednodušujících geometrických předpokladů, ale obtížně řešitelné
 - přesnými postupy neřešitelné
 - pracuje se s napětími a poměrnými přetvořeními
- 2D, 1D modely
 - zavádí geometrické předpoklady, kterými se redukuje jeden nebo dva méně významné rozměry.
 - 1D modely a vybrané 2D modely lze řešit přesně v rámci lineární pružnosti
 - pracuje se integrálními hodnotami napětí po průřezu - vnitřními a měrnými vnitřními silami a deformacemi průřezu.
 - kromě posunutí se jako přemístění zavádí také pootočení průřezu

Zatížení

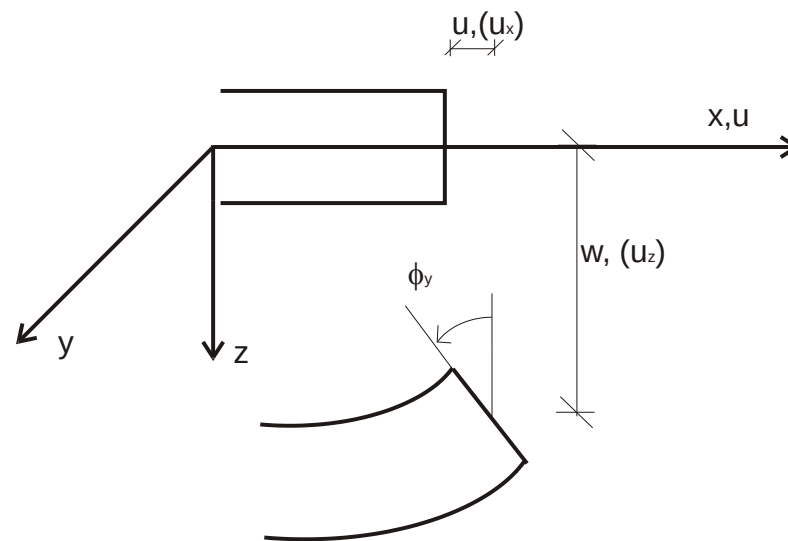
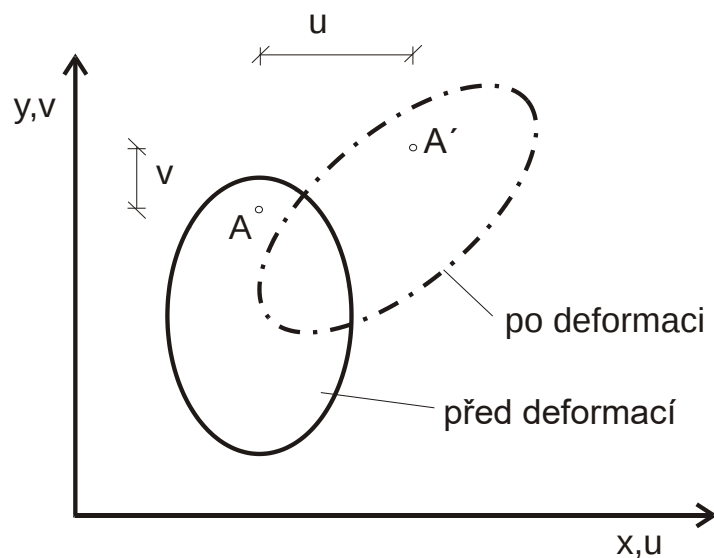
- **silové**
 - tíha konstrukcí, předmětů, sněhu ...
 - tlaky větru, zemin, kapalin, sypkých hmot...
 - působení jiných těles
- **deformační**
 - vynucená přemístění (poklesy základů), zrychlení
 - teplotní deformace
 - deformace od smršťování a dotvarování

silové zatížení

- osamělá břemena F [kN], M [kNm]
- liniová zatížení n, q [kN.m⁻¹], m [kN]
- plošné tlaky q [kN.m⁻²]
- objemové síly (od vlastní tíhy) X [kN.m⁻³]

Základní veličiny

- Přemístění
- vyjadřují změnu polohy (posun) daného bodu tělesa vlivem zatížení
- pro 1D a 2D modely jsou definovány přemístění celého průřezu ve formě posunů u a pootočení ϕ (úhel natočení průřezu vlivem zatížení)

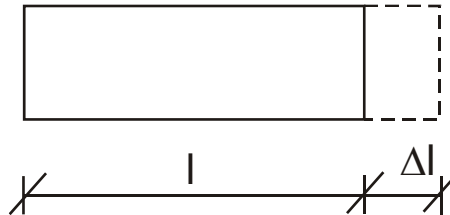


Základní veličiny

- Deformace (poměrná přetvoření)
- vyjadřují relativní délkové a úhlové změny vyvolané zatížením

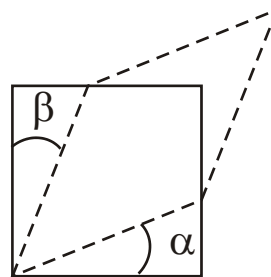
- poměrné protažení

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



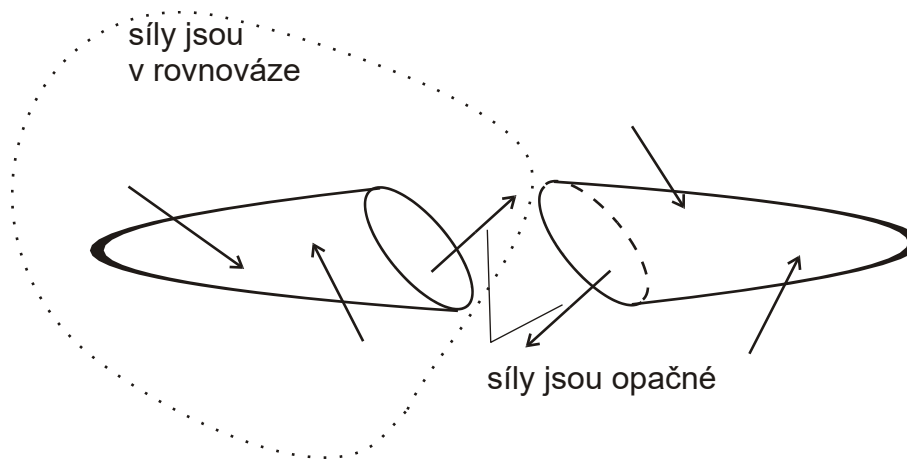
- zkosení

$$\gamma = \alpha + \beta$$



Základní veličiny

- **Vnitřní síly**
- jsou vyvolané vnějším zatížením
- jsou definovány na řezu tělesem
- vyjadřují vzájemné působení dvou částí těles oddělených řezem z principu akce a reakce
- uvádějí do rovnováhy jednotlivé části těles oddělené řezem



Základní veličiny

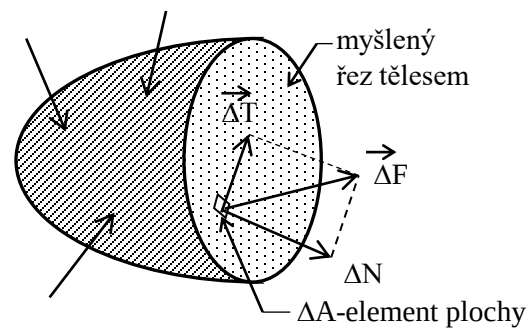
- **Napětí**

- vyjadřují míru silového namáhání daného bodu řezu
- normálová napětí (působí kolmo na plochu řezu):

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta A}$$

- smyková napětí (působí v ploše řezu):

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A}$$



Základní vztahy

- 1. Fyzikální vztahy

- vztah napětí deformace ($\sigma - \varepsilon$)

lineárně pružný materiál - Hookův zákon

- deformace od normálového napětí

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

- pro ostatní směry

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

- smykové napětí

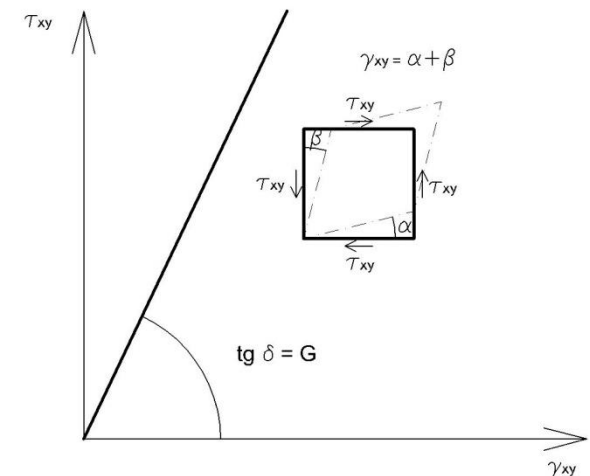
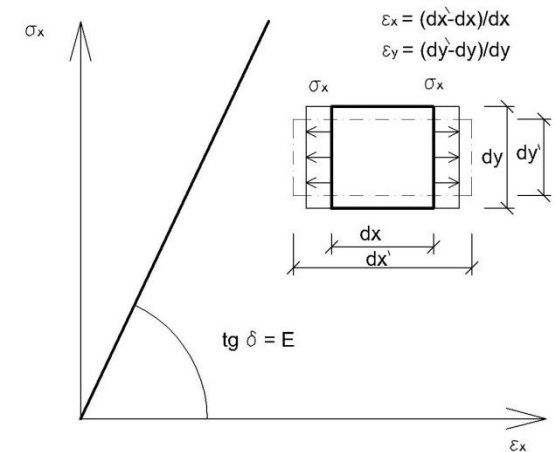
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}$$

- materiálové charakteristiky:

- E ... Youngův modul pružnosti

- ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce

- G... modul pružnosti ve smyku



Základní vztahy

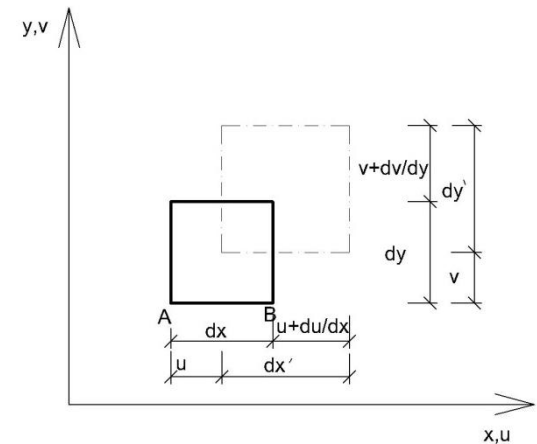
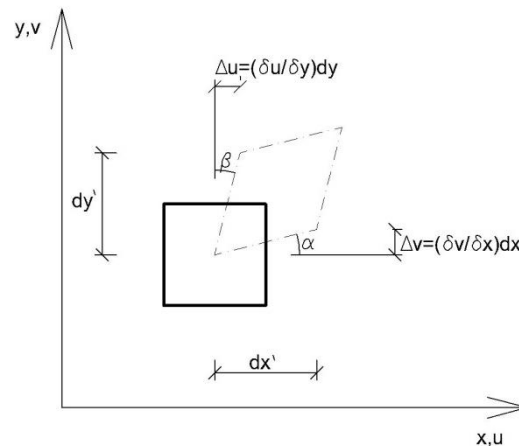
2. Geometrické vztahy

- vyjadřují závislost mezi přemístěními a deformacemi ($u - \varepsilon$)
- odvodí se z geometrických závislostí na elementu tělesa který deformací změní tvar

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



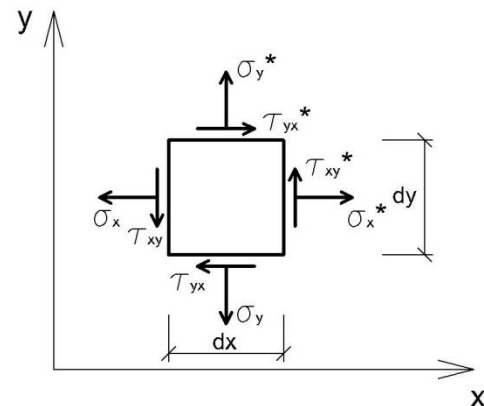
Základní vztahy

- 3. Statické rovnice – diferenciální podmínky rovnováhy
- vyjadřují silovou nebo momentovou rovnováhu na diferenciálním elementu tělesa.
- pro těleso je to vztah mezi napětími a objemovými silami ($\sigma - X$)
- pro 1D a 2D se obvykle vyjadřují ve vztahu vnitřních sil a zatížení ($N - q$)
- napětí jsou definovány pro bod konstrukce
- v bodě posunutém o diferenciální délku je možno jejich hodnotu definovat pomocí Taylorova rozvoje využitím první parciální derivace dané veličiny
- např. σ_x se v bodě posunutém o dx definuje

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

- např. pro rovinu xy podmínka
a pro směr x se vyjádří ve tvaru:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$



Základní vztahy

- 4. Podmínky kompatibility
- podmínky kompatibility vyjadřují spojitost pole deformací, tj. že nedojde k nějakým diskontinuitám, popřípadě překrytí materiálu.
- vyjadřují vzájemný vztah jednotlivých složek deformací ε
- lze je vyjádřit z geometrických vztahů vyloučením přemístění
- např. pro rovinu:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Základní vztahy

- 5. Okrajové podmínky

- a) *statické okrajové podmínky* - definují napjatost na povrchu tělesa vlivem zatížení
- b) *kinematické (geometrické) okrajové podmínky* - definují přemístění povrchu tělesa v oblasti podepření

celý povrch tělesa lze rozdělit na dvě oblasti:

- a) s předepsaným zatížením - posuny mohou být libovolné
- b) s předepsanými posuny - reakce mohou být libovolné

pozn.:

Kde není předepsané žádné zatížení ani přemístění se jedná v podstatě o varianta a) s předepsaným nulovým zatížením a libovolným přemístěním.

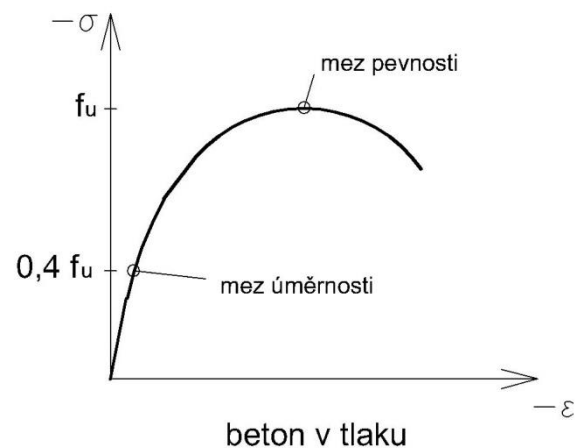
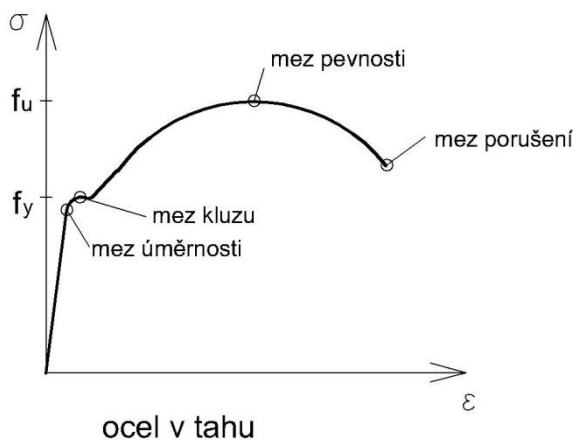
homogenní okrajová podmínka - předepsané přemístění je rovno nule

nehomogenní okrajová podmínka - předepsané přemístění je nenulové

Nelineární pružnost

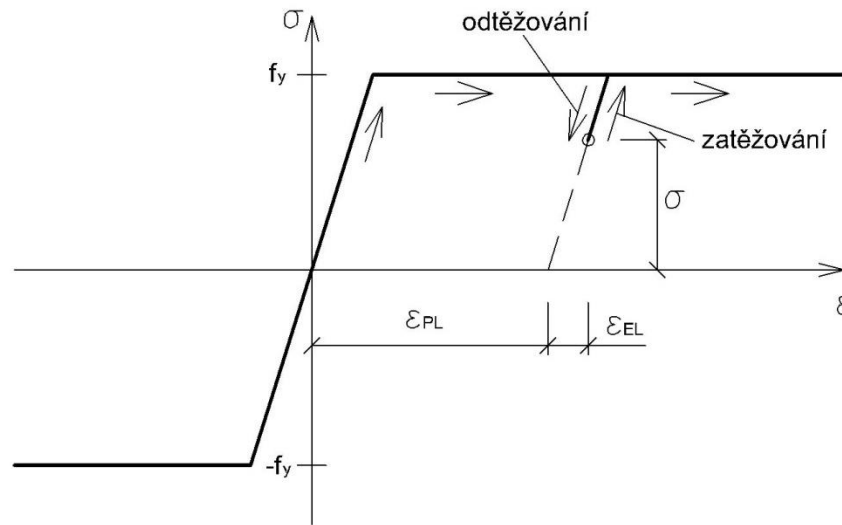
- Fyzikální nelinearita

- fyzikální vztahy nejsou lineární – neplatí Hookův zákon



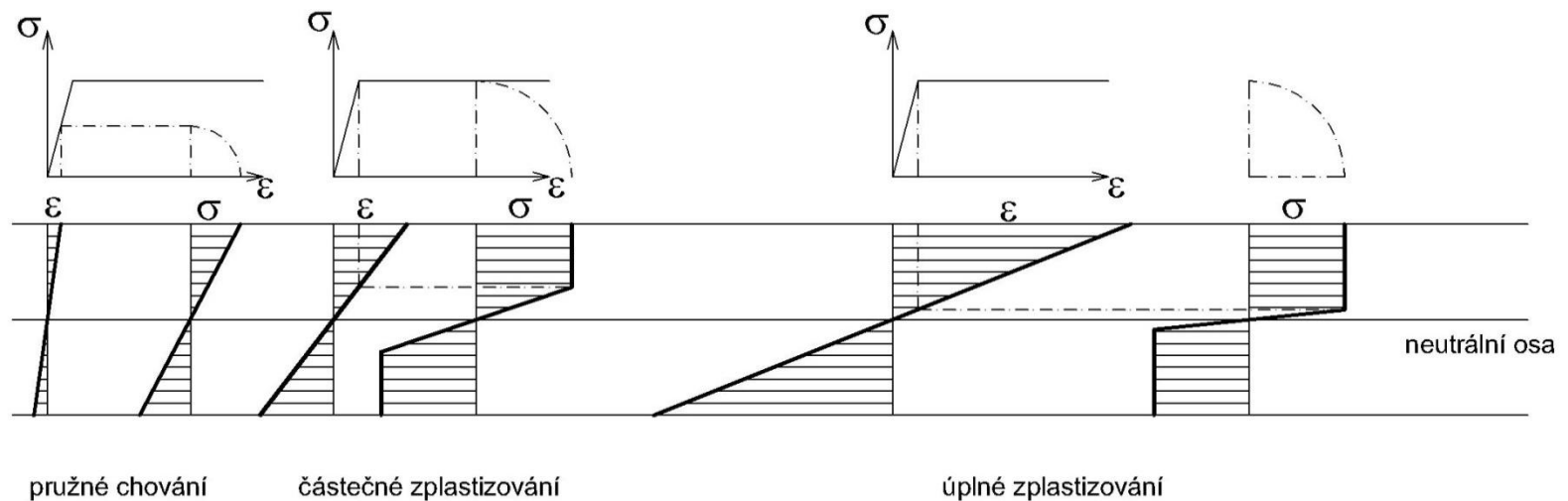
Nelineární pružnost

- **Plasticita**
- pokud napětí překročí mez plasticity nastávají nevratné deformace (zůstávají i po odtížení)
- ideálně pružnoplastický diagram bez zpevnění – deformace narůstají bez nárůstu napětí



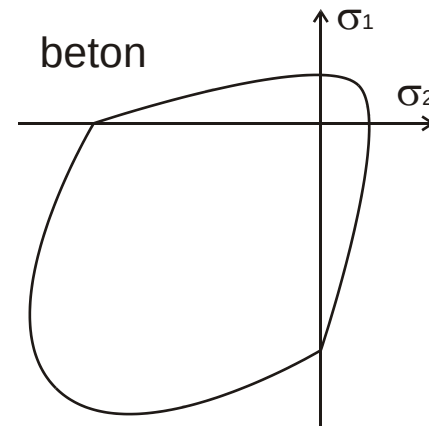
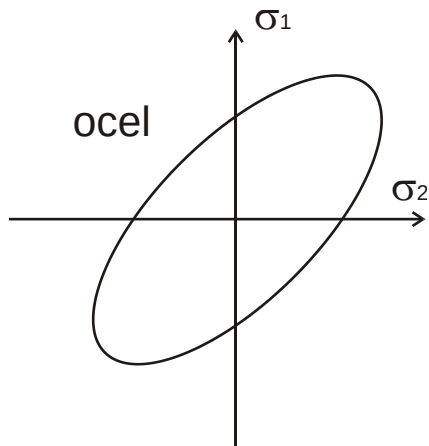
Nelineární pružnost

- Plasticita – ohýbaný průřez
- zahrnutím plasticity do výpočtu obdržíme vyšší vypočtenou únosnost než je tomu u pružného výpočtu



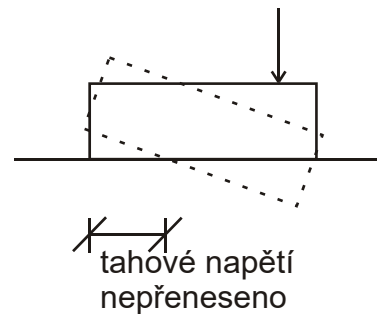
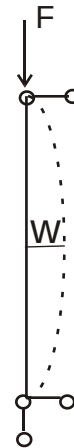
Nelineární pružnost

- **Porušování**
- nastává při dosažení pevnosti materiálu
- víceosá napjatost – podmínka porušení
- beton – různé pevnosti v tahu a tlaku



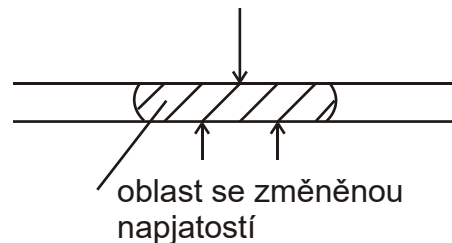
Nelineární pružnost

- **Geometrická nelinearita**
 - rovnováha se vyjadřuje na deformované konstrukce
 - např. vzpěr prutů, boulení, klopení
- **Konstrukční nelinearita**
 - při změně znaménka napětí nedochází k přenosu tohoto napětí
 - např.: základová spára – přenáší jenom tlak
lano – přenáší jenom tah



Některé principy

- **Princip superposice účinků**
 - účinky jednotlivých vlivů lze řešit samostatně a pak je sečíst
 - platí pouze pro fyzikální, geometrickou a konstrukční linearitu
- **Saint Vénantův princip lokálnosti účinků**
 - **rovnovážná soustava sil** působící na malou část konstrukce ovlivňuje napjatost a deformační stav konstrukce pouze v blízkém okolí jejího působení
 - umožňuje nahrazovat ve výpočtovém modelu skutečné zatížení jednodušším staticky ekvivalentním



Další materiálové vlastnosti

- Homogenní materiál
 - stejné vlastnosti ve všech bodech tělesa
- Materiálová izotropie
 - stejné vlastnosti materiálu ve všech směrech
 - lze popsat dvěma konstantami např. E a ν nebo E a G
 - patří sem např. ocel nebo beton
 - neplatí pro dřevo (různé vlastnosti ve směru a kolmo k vláknům)

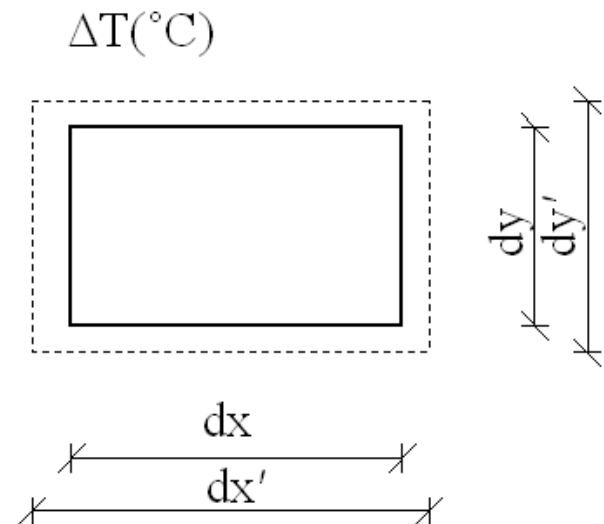
Další materiálové vlastnosti

- vliv teploty
- s narůstající teplotou dochází k protažení materiálu

$$\varepsilon_{xT} = \varepsilon_{yT} = \varepsilon_{zTD} = \alpha_T \Delta T$$

$$\gamma_{xyTD} = \gamma_{yzT} = \gamma_{zxT} = 0$$

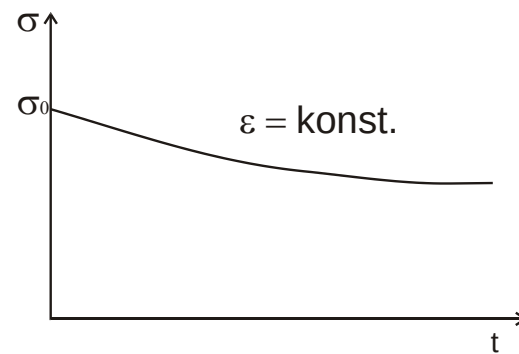
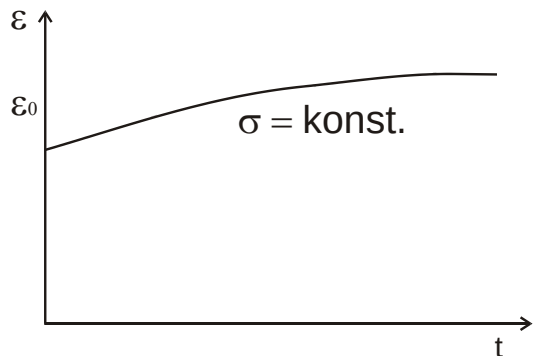
- α_T součinitel teplotní roztažnosti [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
- do výpočtu se zavede jako počáteční deformace
- není-li deformaci bráněno (staticky určité konstrukce) – mění se pouze deformační stav konstrukce
- je-li deformaci bráněno je ovlivněna i napjatost konstrukce



Další materiálové vlastnosti

časově závislé děje (beton, dřevo):

- vlastnosti měnící se s časem – nejvyšší nárůst na počátku
- smršťování
 - deformace vyvolaná prostředím
 - suché prostředí – smršťování, mokré prostředí – nabývání
 - zavádí se do výpočtu obdobně jako teplota
- dotvarování
 - změny vyvolané dlouhodobě působícím napětím v konstrukci
 - zavádí se redukcí modulu pružnosti



Další materiálové vlastnosti

- únava materiálu
- pokles pevnosti materiálu vyvolaný mnohokrát opakovanou změnou velikosti (znaménka) zatížení
- závisí převážně na počtu cyklů a rozkmitu zatížení (max. a min. hodnotě napětí), popřípadě střídání znaménka napětí

