VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

# BDA016 Stavební mechanika 2

- Obecná deformační metoda – rovinný rám

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

# ODM – TRANSFORMACE

## Transformace do globálního souřadnicového systému

- soustava rovnic se sestavuje v globálních souřadnicích
- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T$$

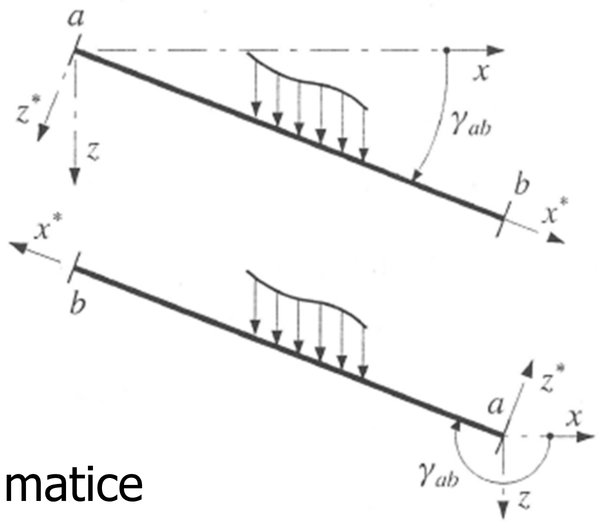
$$\mathbf{r}^*_{ab} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{r}_{ab} \qquad \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{ab}\mathbf{r}^*_{ab}$$

- vektor celkových koncových sil prutu

$$\mathbf{R}^*_{ab} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{R}_{ab} \qquad \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{ab}\mathbf{R}^*_{ab}$$

- matice tuhosti prutu

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}_{ab}\mathbf{k}^*_{ab}\mathbf{T}_{ab}$$




Transformační matice

$$\mathbf{T}_{ab} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\cos\gamma_{ab} & \sin\gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\gamma_{ab} & \cos\gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cos\gamma_{ab} & \sin\gamma_{ab} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\gamma_{ab} & \cos\gamma_{ab} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

# ODM – ROVINNÝ RÁM

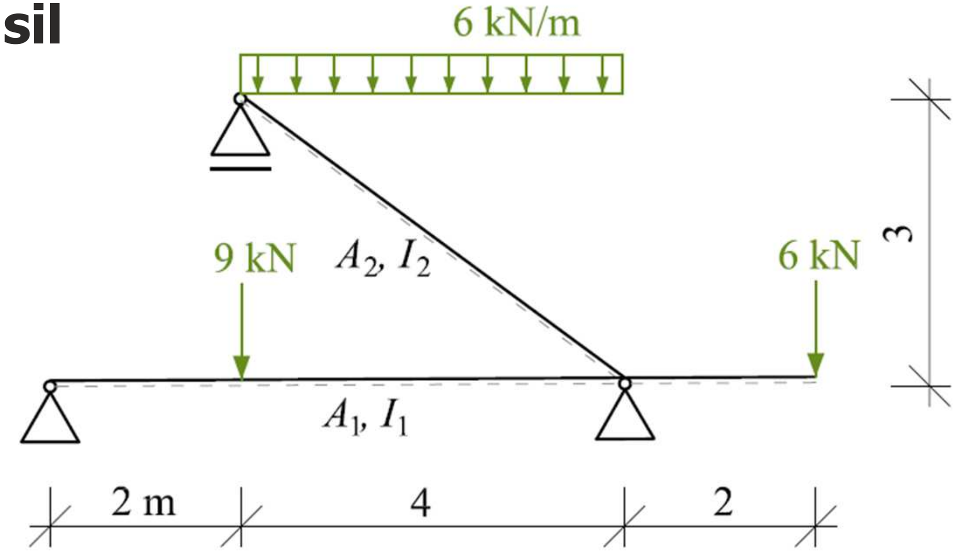
**Na zadané prutové konstrukci pomocí obecné deformační metody vykreslete průběhy vnitřních sil**

$E = 25\ \mathrm{GPa}$

$A_1 = 0{,}2\ \mathrm{m}^2;\ I_1 = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4$

$A_2 = 0{,}1\ \mathrm{m}^2;\ I_2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^4$

$n_p =$



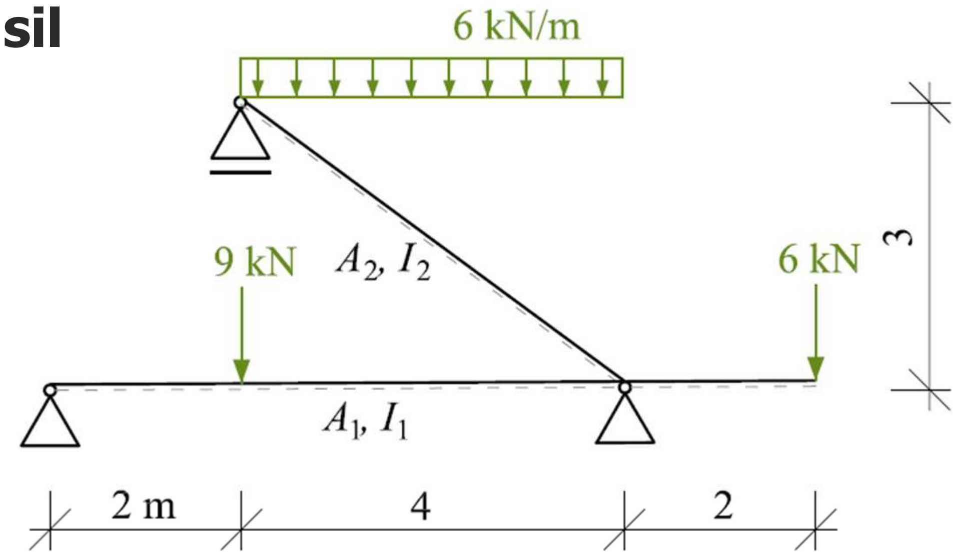
# ODM – ROVINNÝ RÁM

**Na zadané prutové konstrukci pomocí obecné deformační metody vykreslete průběhy vnitřních sil**

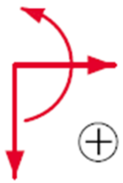
$E = 25\ \text{GPa}$

$A_1 = 0{,}2\ \text{m}^2;\ I_1 = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^4$

$A_2 = 0{,}1\ \text{m}^2;\ I_2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^4$

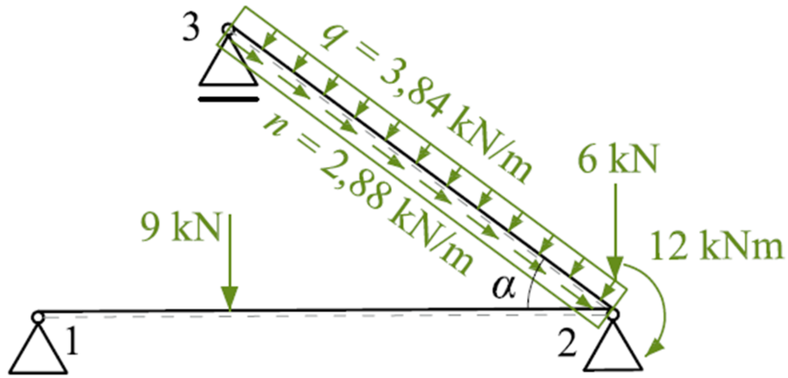



$n_p = 2\ (\varphi_2, u_3)$



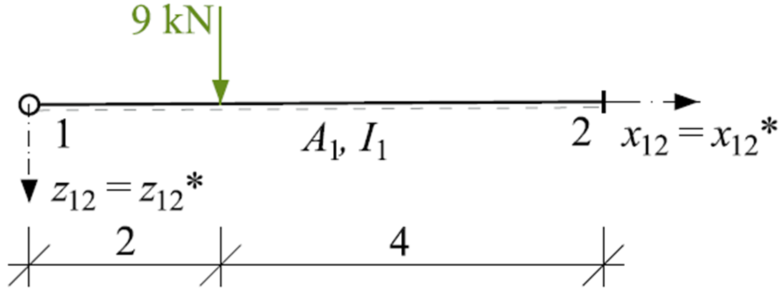

globální vektor deformací

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$




globální vektor uzlových zatížení

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$




## Prut 1–2

- vektor primárních koncových sil (tab. 8.1 c/1)

$$\bar{\mathbf{R}}_{12}^* = \bar{\mathbf{R}}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{14}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{3} \\ -8 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

- matice tuhosti (tab. 8.3 c)

$$\mathbf{k}_{12}^* = \mathbf{k}_{12} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{25}{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{25}{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 50 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l^2} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{6^2} = \frac{25}{3} \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{6} = 50 \cdot 10^6$$

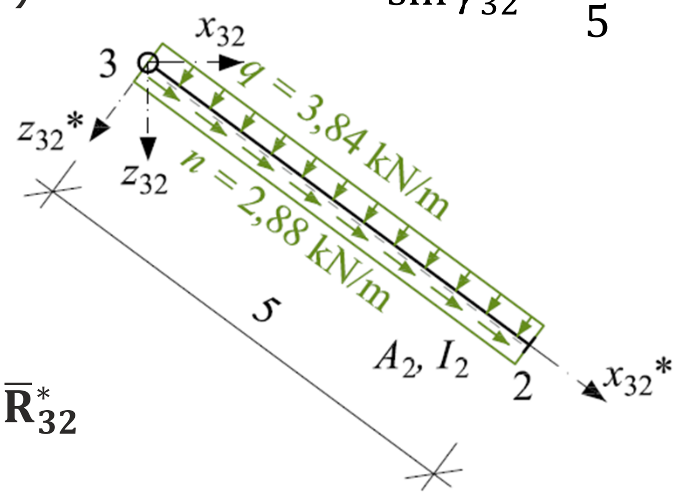
## Prut 3–2

$$\cos\gamma_{32} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\gamma_{32} = \frac{3}{5}$$

- lokální vektor primárních koncových sil (tab. 8.1 c/6)

$$\overline{\mathbf{R}}_{32}^{*} = \begin{Bmatrix} -7{,}2 \\ -7{,}2 \\ 0 \\ -7{,}2 \\ -12 \\ -12 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$




- globální vektor primárních koncových sil $\overline{\mathbf{R}}_{32} = \mathbf{T}_{32}^{T}\overline{\mathbf{R}}_{32}^{*}$

$$\overline{\mathbf{R}}_{32} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -7{,}2 \\ -7{,}2 \\ 0 \\ -7{,}2 \\ -12 \\ -12 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} -1{,}44 \\ -10{,}08 \\ 0 \\ 1{,}44 \\ -13{,}92 \\ -12 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

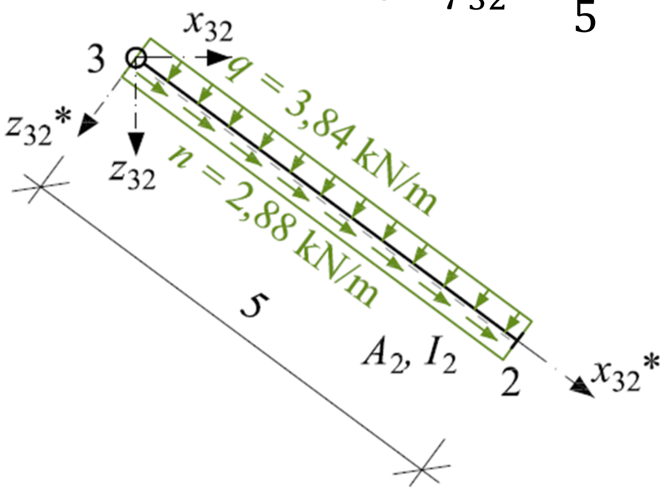
## Prut 3–2

$$\cos\gamma_{32} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\gamma_{32} = \frac{3}{5}$$

- globální matice tuhosti (tab. 8.2 c)

$$\mathbf{k}_{32} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} u_3 & w_3 & \varphi_3 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 320{,}432 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3{,}6 \\ 239{,}424 & \dots & \dots & \dots & \dots & -4{,}8 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -320{,}432 & \dots & \dots & \dots & \dots & -3{,}6 \\ -239{,}424 & \dots & \dots & \dots & \dots & 4{,}8 \\ 3{,}6 & \dots & \dots & \dots & \dots & 30 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^6$$




$$\frac{EA}{l} = \frac{25 \cdot 10^9 \cdot 0{,}1}{5} = 500 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l^2} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5^2} = 6 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l^3} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5^3} = 1{,}2 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5} = 30 \cdot 10^6$$

## Soustava rovnic

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

- globální matice tuhosti

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ +30 & +3{,}6 \\ 0 & 0 \\ +3{,}6 & +320{,}432 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} 80 & 3{,}6 \\ 3{,}6 & 320{,}432 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

- globální zatěžovací vektor

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \overline{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 - \begin{Bmatrix} -20 \\ -1{,}44 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} 8 \\ 1{,}44 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

- globální vektor primárních koncových sil

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} -8 + (-12) \\ -1{,}44 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} -20 \\ -1{,}44 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

## Soustava rovnic

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} 80 & 3{,}6 \\ 3{,}6 & 320{,}432 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 1{,}44 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

$$80 \cdot 10^6 \cdot \varphi_2 + 3{,}6 \cdot 10^6 \cdot u_3 = 8 \cdot 10^3 \ /\cdot (-3{,}6)$$

$$3{,}6 \cdot 10^6 \cdot \varphi_2 + 320{,}432 \cdot 10^6 \cdot u_3 = 1{,}44 \cdot 10^3 \ /\cdot 80$$

$$25\,621{,}6 \cdot 10^6 \cdot u_3 = 86{,}4 \cdot 10^3$$

$$\rightarrow \boldsymbol{u_3 = 3{,}372 \cdot 10^{-6}} \text{ m}$$

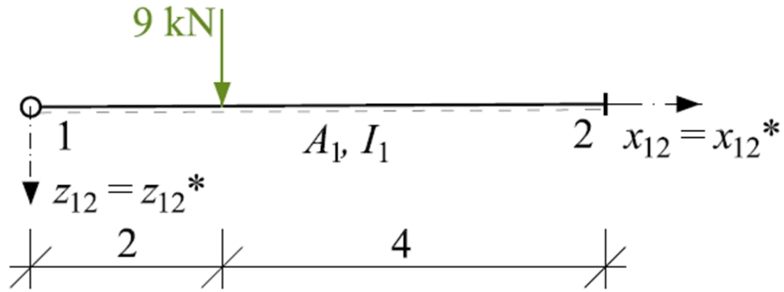
$$\boldsymbol{\varphi_2 = 99{,}848 \cdot 10^{-6}} \text{ rad}$$

# ODM – ROVINNÝ RÁM

## Prut 1–2

- vektor deformací prutu

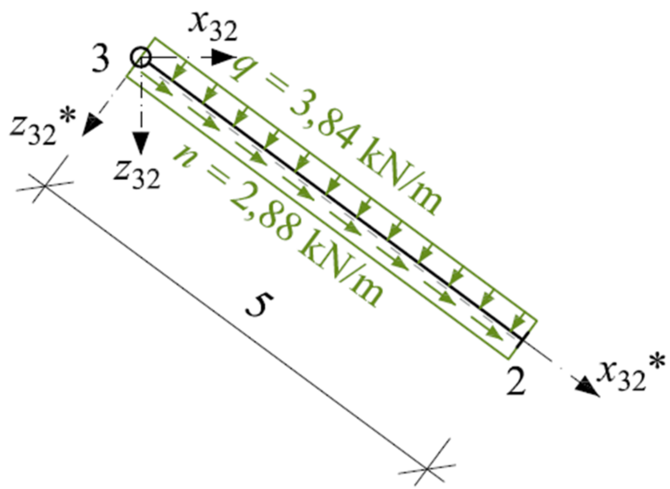
$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{12}^{*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 99{,}848 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$




- vektor celkových koncových sil prutu $\mathbf{R}_{12} = \overline{\mathbf{R}}_{12} + \widehat{\mathbf{R}}_{12} = \overline{\mathbf{R}}_{12} + \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_{12}^{*}$

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{14}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{13}{3} \\ -8 \end{Bmatrix} \cdot 10^{3} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{25}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{25}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 50 \end{bmatrix} \cdot 10^{6} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 99{,}848 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5{,}499 \\ 0 \\ 0 \\ -3{,}501 \\ -3{,}008 \end{Bmatrix} \cdot 10^{3}$$

## Prut 3–2




- vektor deformací prutu

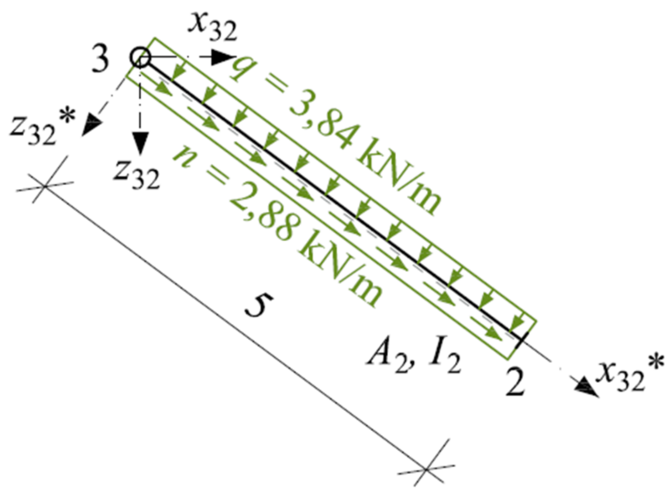
$$\mathbf{r}_{32} = \begin{Bmatrix} 3{,}372 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 99{,}848 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

- vektor celkových koncových sil prutu $\mathbf{R}_{23} = \overline{\mathbf{R}}_{23} + \widehat{\mathbf{R}}_{23} = \overline{\mathbf{R}}_{23} + \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r}_{23}$

$$\mathbf{R}_{32} = \begin{Bmatrix} -1{,}44 \\ -10{,}08 \\ 0 \\ 1{,}44 \\ -13{,}92 \\ -12 \end{Bmatrix} \cdot 10^{3} + \begin{bmatrix} 320{,}432 & \dots & \dots & \dots & \dots & 3{,}6 \\ 239{,}424 & \dots & \dots & \dots & \dots & -4{,}8 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -320{,}432 & \dots & \dots & \dots & \dots & -3{,}6 \\ -239{,}424 & \dots & \dots & \dots & \dots & 4{,}8 \\ 3{,}6 & \dots & \dots & \dots & \dots & 30 \end{bmatrix} \cdot 10^{6} \cdot \begin{Bmatrix} 3{,}372 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 99{,}848 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -9{,}752 \\ 0 \\ 0 \\ -14{,}248 \\ -8{,}992 \end{Bmatrix} \cdot 10^{3}$$

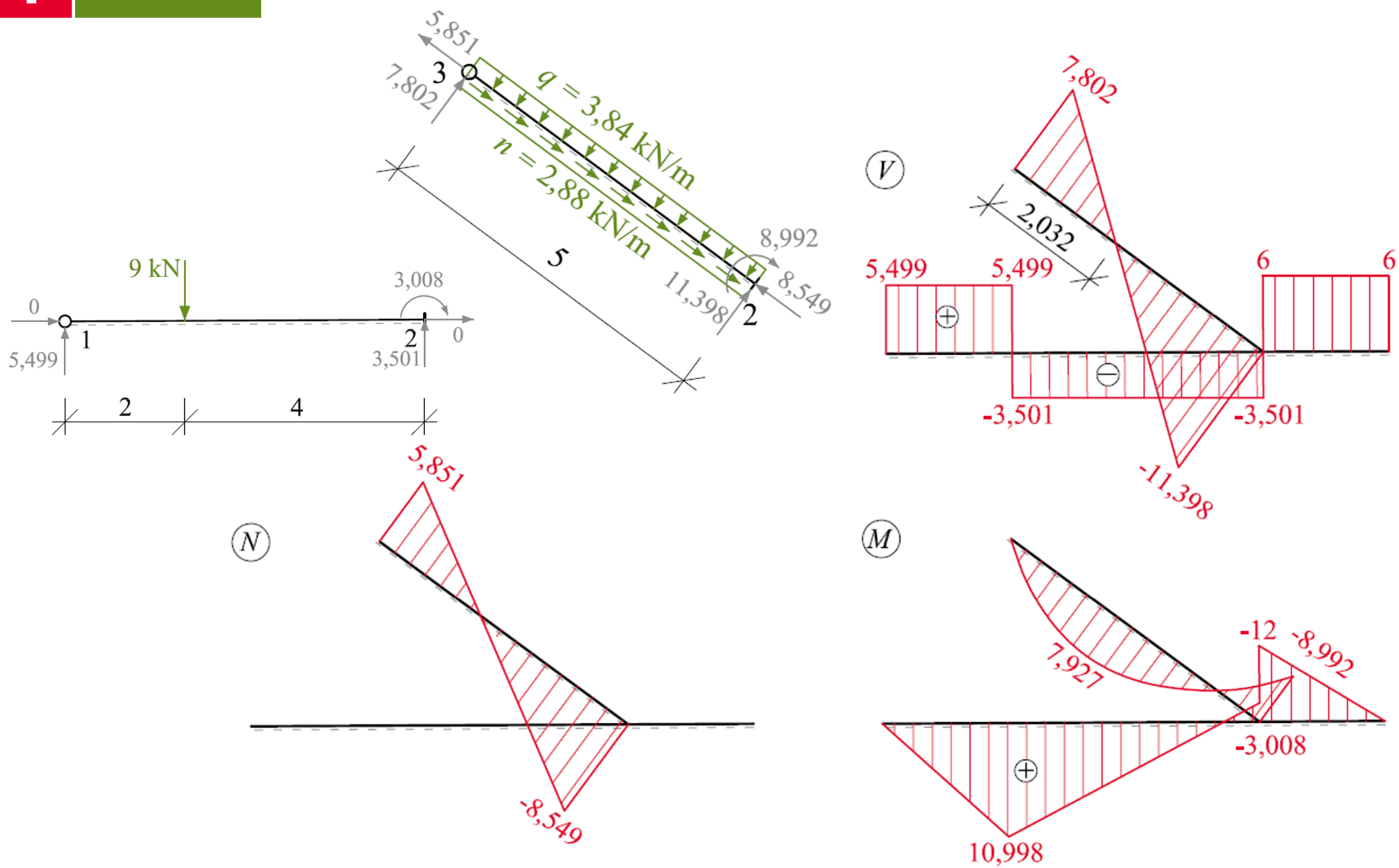
## Prut 3–2

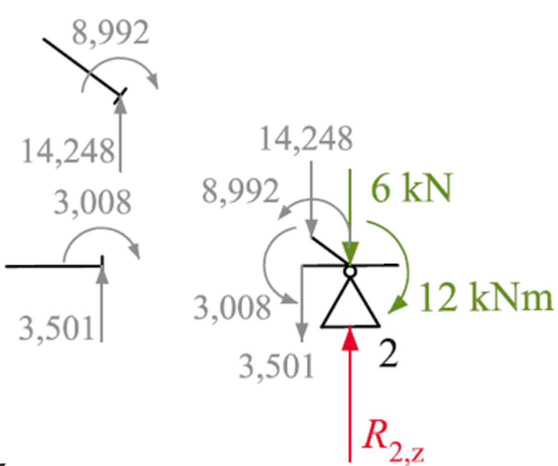
- vektor celkových koncových sil prutu v lokálních souřadnicích $\mathbf{R}_{32}^{*} = \mathbf{T}_{32}\mathbf{R}_{32}$

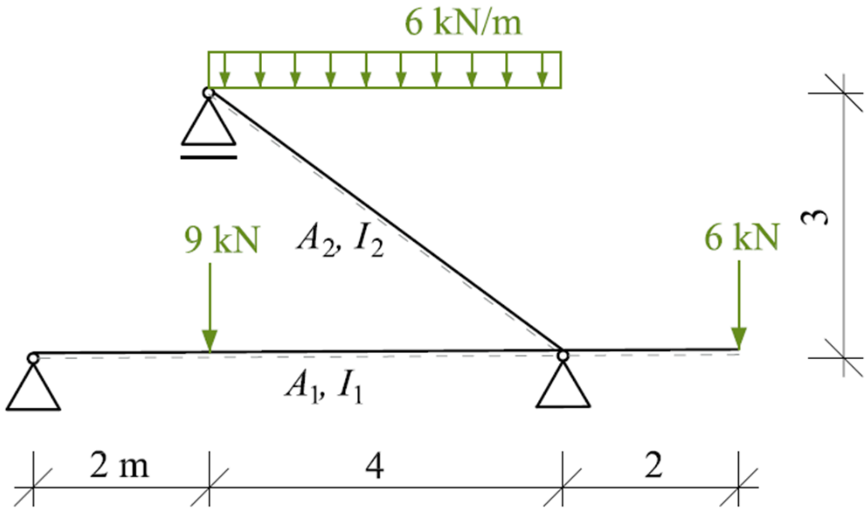



$$\mathbf{R}_{32}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -9{,}752 \\ 0 \\ 0 \\ -14{,}248 \\ -8{,}992 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} -5{,}851 \\ -7{,}802 \\ 0 \\ -8{,}549 \\ -11{,}398 \\ -8{,}992 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

# ODM – ROVINNÝ RÁM






## Styčník 2

$$\sum F_{i,x} = 0$$

$$\sum F_{i,z} = 0: 14{,}248 + 3{,}501 + 6 - R_{2,z} = 0 \rightarrow R_{2,z} = 23{,}749 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i,2} = 0: 8{,}992 + 3{,}008 - 12 = 0 \rightarrow 0 = 0$$