



BDA016 Stavební mechanika 2

- Obecná deformační metoda – rovinný rám

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

Na zadané prutové konstrukci pomocí obecné deformační metody vykreslete průběhy vnitřních sil

$$E = 20 \text{ GPa}$$

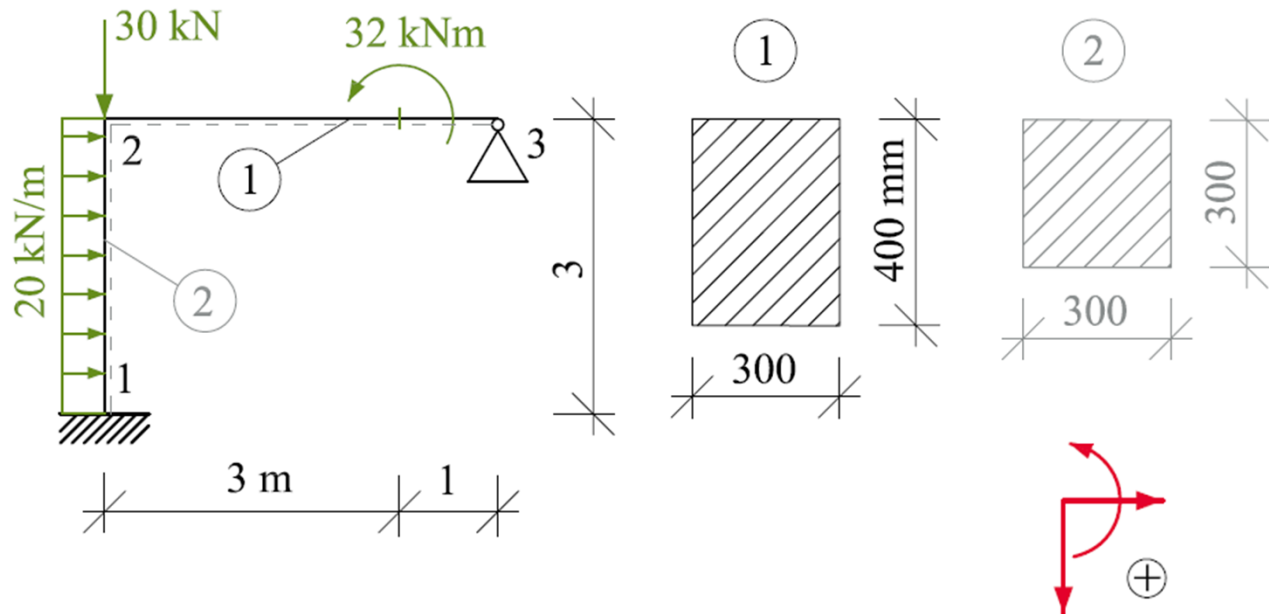
$$A_1 = 0,12 \text{ m}^2$$

$$I_1 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$A_2 = 0,09 \text{ m}^2$$

$$I_2 = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$n_p = 3$$



globální vektor deformací

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

globální vektor uzlových zatížení

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

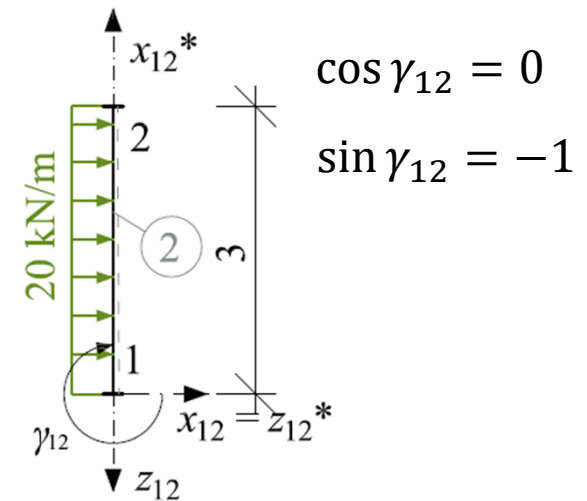
Prut 1–2

- lokální vektor primárních koncových sil (tab. 8.1 a/6)

$$\bar{\mathbf{R}}_{12}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ 15 \\ 0 \\ -30 \\ -15 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

- globální vektor primárních koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{12} = \mathbf{T}_{12}^T \bar{\mathbf{R}}_{12}^*$

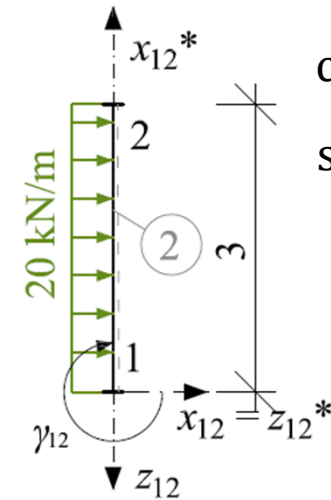
$$\bar{\mathbf{R}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ 15 \\ 0 \\ -30 \\ -15 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ 15 \\ -30 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$



Prut 1–2

- globální matice tuhosti (tab. 8.2 a)

$$\mathbf{k}_{12} = \begin{matrix} & u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \\ \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & -6 & 0 & -9 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -600 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 9 & 0 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & 6 & 0 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 600 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 9 & 0 & 18 \end{bmatrix} & \cdot 10^6 \end{matrix}$$



$$\cos \gamma_{12} = 0$$

$$\sin \gamma_{12} = -1$$

$$\frac{EA}{l} = \frac{20 \cdot 10^9 \cdot 0,09}{3} = 600 \cdot 10^6$$

$$\frac{6EI}{l^2} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4}}{3^2} = 9 \cdot 10^6$$

$$\frac{12EI}{l^3} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4}}{3^3} = 6 \cdot 10^6$$

$$\frac{4EI}{l} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4}}{3} = 18 \cdot 10^6$$

$$\frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4}}{3} = 9 \cdot 10^6$$

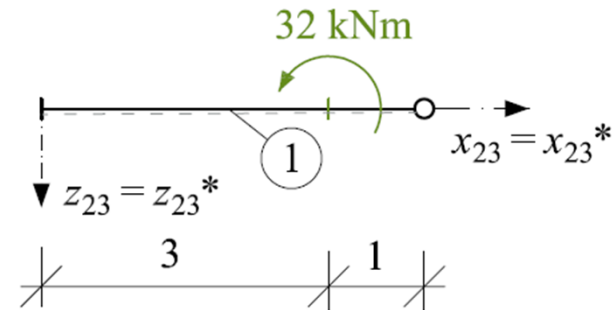
Prut 2–3

- vektor primárních koncových sil (tab. 8.1 b/3)

$$\bar{\mathbf{R}}_{23}^* = \bar{\mathbf{R}}_{23} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11,25 \\ 13 \\ 0 \\ 11,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

- matice tuhosti (tab. 8.3 b)

$$\mathbf{k}_{23}^* = \mathbf{k}_{23} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{matrix} & & \begin{matrix} u_3 & w_3 & \varphi_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & -6 \\ 0 & -6 & 24 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 10^6$$



$$\frac{EA}{l} = \frac{20 \cdot 10^9 \cdot 0,12}{4} = 600 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l^3} = \frac{3 \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}}{4^3} = 1,5 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l^2} = 6 \cdot 10^6$$

$$\frac{3EI}{l} = 24 \cdot 10^6$$

Soustava rovnic

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

- globální matice tuhosti

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ +600 & +0 & +0 \\ 0 & 600 & 0 \\ +0 & +1,5 & -6 \\ 9 & 0 & 18 \\ +0 & -6 & +24 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} 606 & 0 & 9 \\ 0 & 601,5 & -6 \\ 9 & -6 & 42 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

- globální zatěžovací vektor

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 - \begin{Bmatrix} -30 \\ -11,25 \\ -2 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} 30 \\ 41,25 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

- globální vektor primárních koncových sil

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} -30 + 0 \\ 0 - 11,25 \\ -15 + 13 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 = \begin{Bmatrix} -30 \\ -11,25 \\ -2 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

Soustava rovnic

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F}$$

$$\begin{bmatrix} 606 & 0 & 9 \\ 0 & 601,5 & -6 \\ 9 & -6 & 42 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 41,25 \\ 2 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

Gausova eliminační metoda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 606 & 0 & 9 & 30 \\ 9 & -6 & 42 & 2 \\ 0 & 601,5 & -6 & 41,25 \end{array} \right] \cdot \left(-\frac{606}{9} \right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 606 & 0 & 9 & 30 \\ 0 & 404 & -2819 & -104\frac{2}{3} \\ 0 & 601,5 & -6 & 41,25 \end{array} \right] \cdot \left(-\frac{404}{601,5} \right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 606 & 0 & 9 & 30 \\ 0 & 404 & -2819 & -104\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2814,97 & -132,37 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow u_2 = 0,049 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

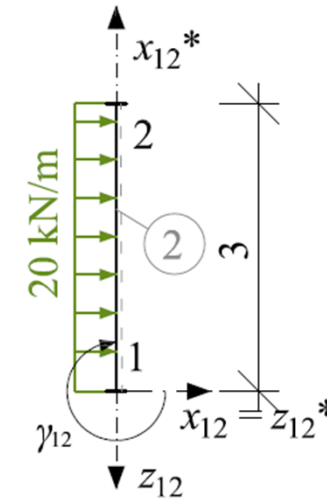
$$\rightarrow w_2 = 0,069 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\rightarrow \varphi_2 = 0,047 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Prut 1–2

- vektor deformací prutu

$$\mathbf{r}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,049 \\ 0,069 \\ 0,047 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$



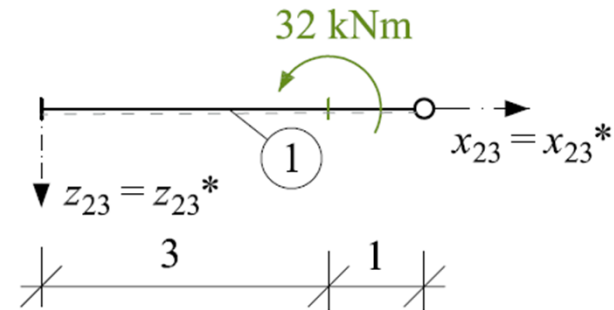
- vektor celkových koncových sil prutu $\mathbf{R}_{12} = \bar{\mathbf{R}}_{12} + \hat{\mathbf{R}}_{12} = \bar{\mathbf{R}}_{12} + \mathbf{k}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}$

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ 15 \\ -30 \\ 0 \\ -15 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & -6 & 0 & -9 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -600 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 9 & 0 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & 6 & 0 & 9 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 600 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 9 & 0 & 18 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,049 \\ 0,069 \\ 0,047 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -30,717 \\ -41,4 \\ 15,864 \\ -29,283 \\ 41,4 \\ -13,713 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

Prut 2–3

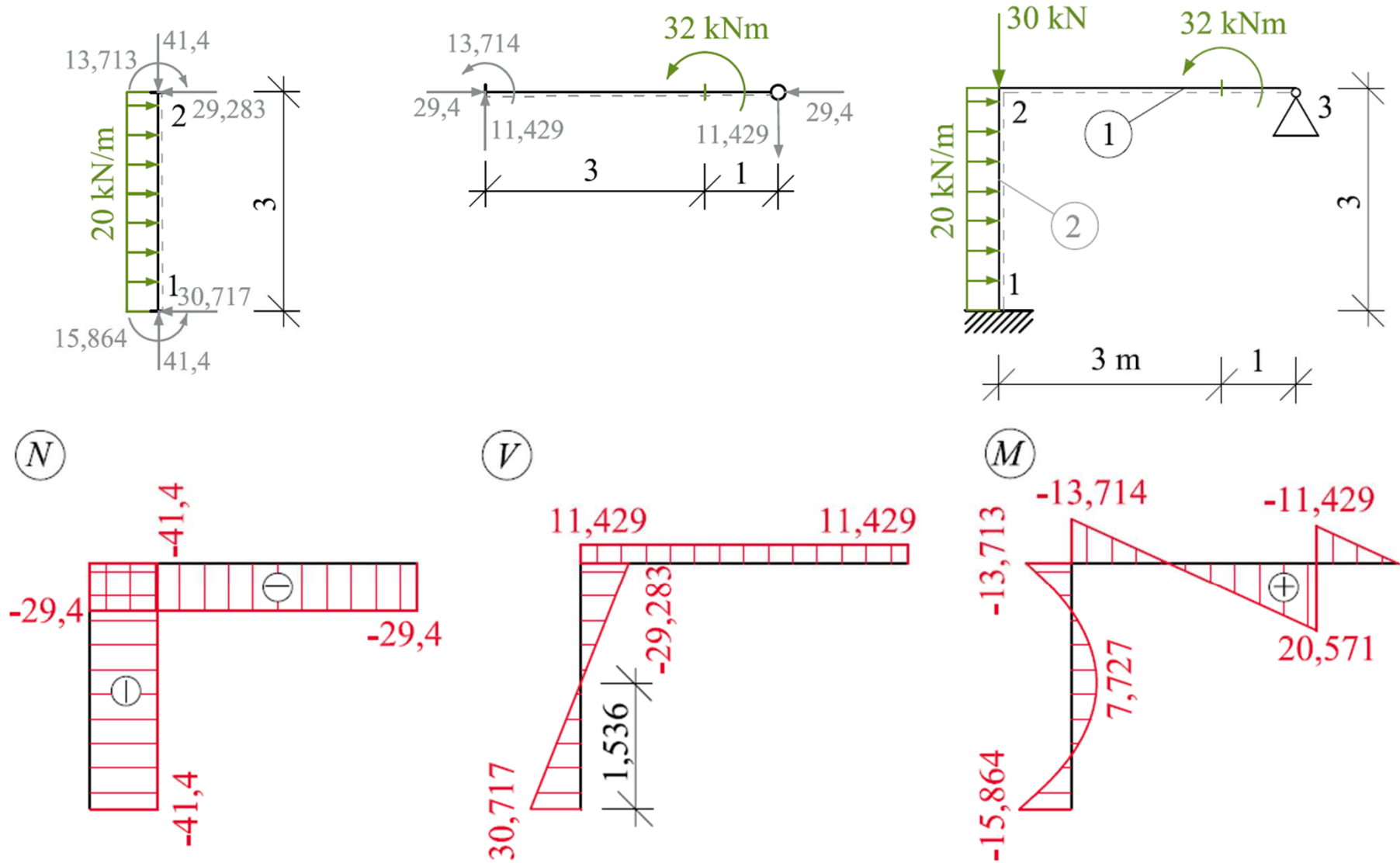
- vektor deformací prutu

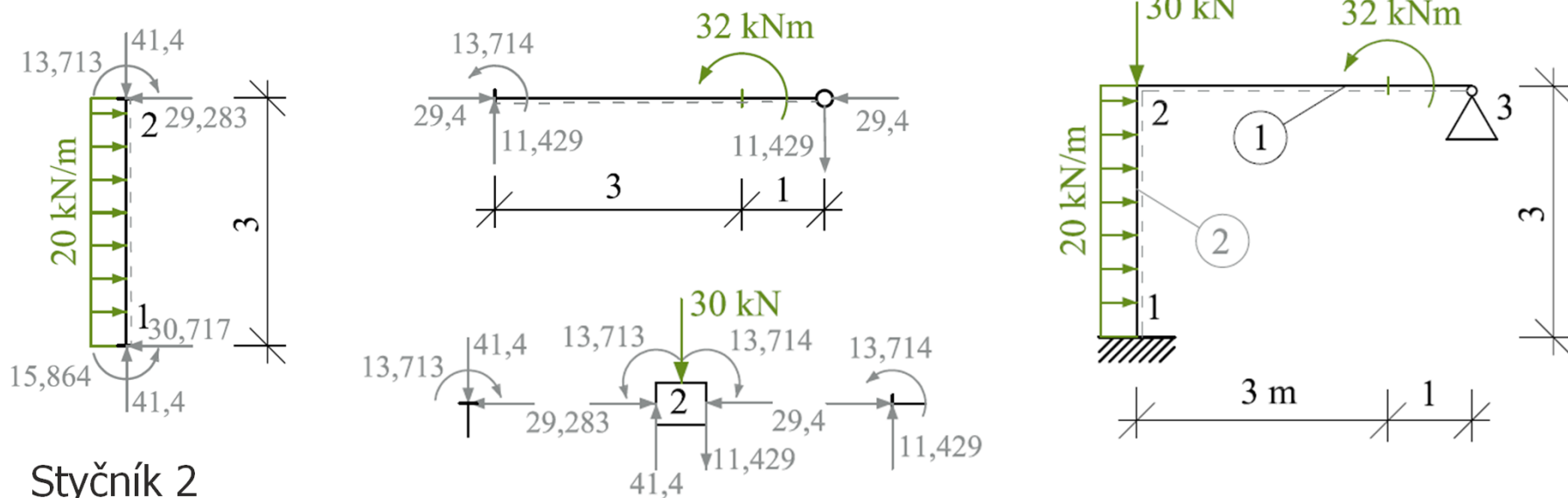
$$\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{23}^* = \begin{Bmatrix} 0,049 \\ 0,069 \\ 0,047 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$



- vektor celkových koncových sil prutu $\mathbf{R}_{23} = \bar{\mathbf{R}}_{23} + \hat{\mathbf{R}}_{23} = \bar{\mathbf{R}}_{23} + \mathbf{k}_{23} \cdot \mathbf{r}_{23} = \mathbf{R}_{23}^*$

$$\mathbf{R}_{23} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11,25 \\ 13 \\ 0 \\ 11,25 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 + \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1,5 & -6 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -6 & 24 & \dots & \dots & \dots \\ -600 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1,5 & 6 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0,049 \\ 0,069 \\ 0,047 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 29,4 \\ -11,429 \\ 13,714 \\ -29,4 \\ 11,429 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$





Styčník 2

$$\sum F_{i,x} = 0: 29,283 - 29,4 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\sum F_{i,z} = 0: 30 - 41,4 + 11,29 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$\sum M_{i,2} = 0: 13,713 - 13,714 \rightarrow 0 = 0$$