VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

BDA016 Stavební mechanika 2
10. přednáška

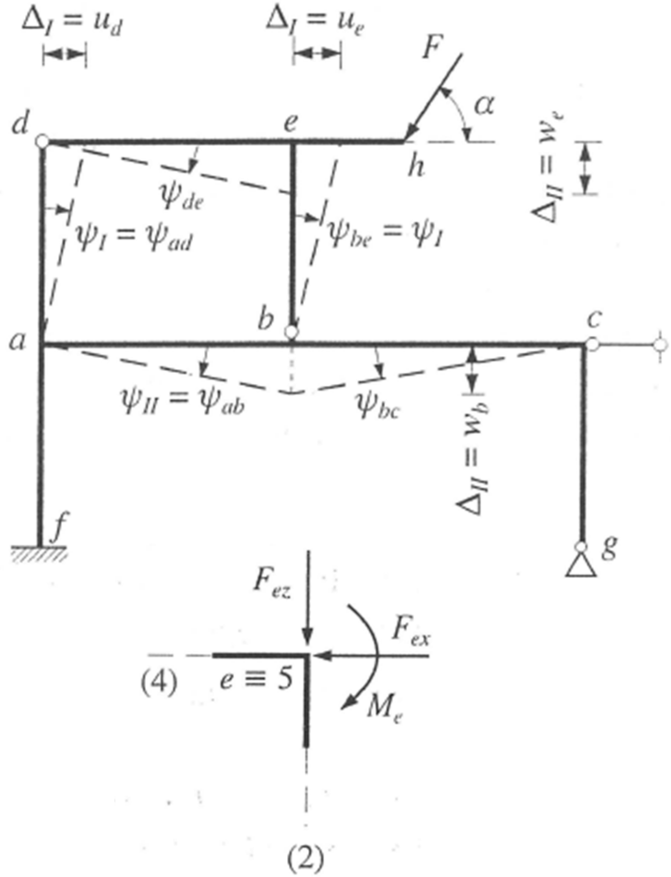
- Zjednodušená deformační metoda – spojitý nosník

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

ZJEDNODUŠENÁ DEFORMAČNÍ METODA

- **zanedbává** nejen **vliv posouvajících sil**, ale také **vliv normálových sil** na deformaci prutové soustavy (pruty jsou nestlačitelné $EA \rightarrow \infty$)
- přetvoření každého prutu rovinné soustavy je způsobeno pouze ohybovými momenty
- nepočítá se změnou délky prutu způsobenou normálovými silami, výjimkou je změna délky způsobená teplotou
- staticky určité části se ekvivalentně nahradí
- kloubově připojené pruty se respektují
- monolitický styčník – nezávislé pootočení φ (momentová podmínka)
- nezávislý posun části rámu – prutová výchylka Ψ (součtová podmínka)



ZJEDNODUŠENÁ DEFORMAČNÍ METODA

→ podstatné snížení počtu neznámých styčníkových posunutí

$u_a = u_b = u_c = 0;\ w_a = w_c = w_d = 0$

$u_d = u_e = \Delta_I;\ w_b = w_e = \Delta_{II}$

- 4 nezávislá styčníková pootočení

$\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_e$

- 2 nezávislé posuny (prutová pootočení)

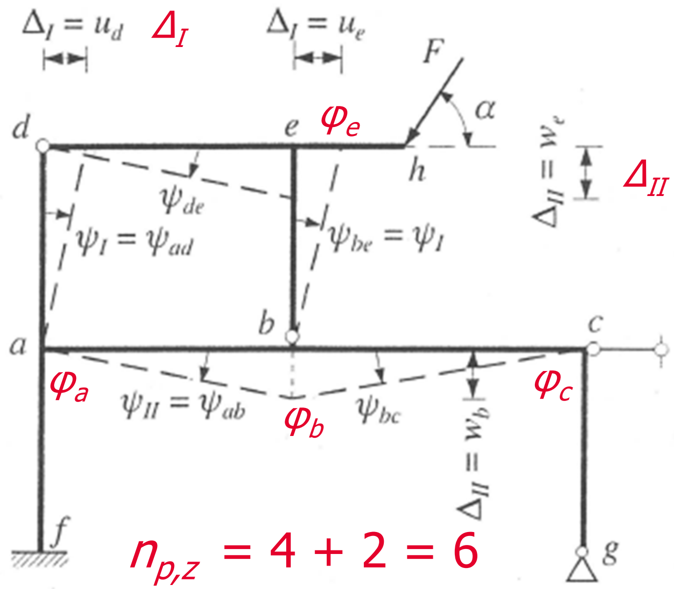
$\Delta_I, \Delta_{II}\ (\Psi_I, \Psi_{II})$

$\Psi_I = \Psi_{ad} = \frac{\Delta_I}{l_{ad}};\ \Psi_{II} = \Psi_{ab} = \frac{\Delta_{II}}{l_{ab}}$

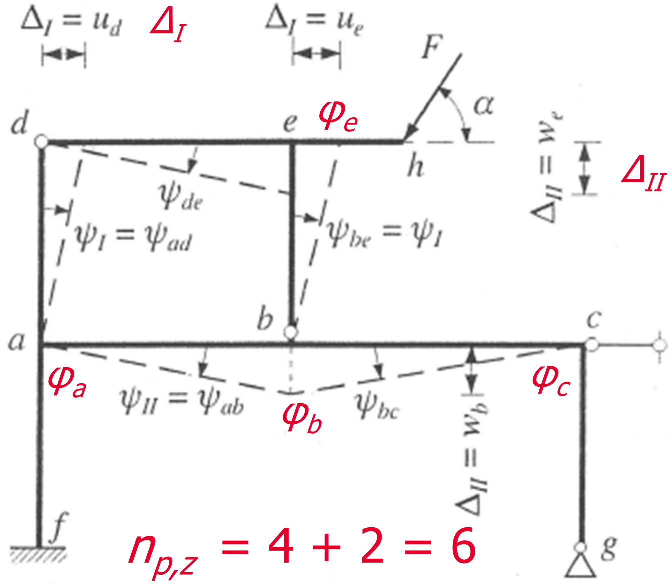
→ závislá prutová pootočení

$\Psi_{bc} = -\frac{\Delta_{II}}{l_{bc}}, \Delta_{II} = \Psi_{ab} \cdot l_{ab} = -\Psi_{bc} \cdot l_{bc} \rightarrow \Psi_{bc} = -\frac{l_{ab}}{l_{bc}} \cdot \Psi_{ab}$

→ stejná prutová pootočení $\Psi_{ad} = \Psi_{be} = \Psi_I$



ZJEDNODUŠENÁ DEFORMAČNÍ METODA



- pro každý monolitický styčník se sestaví **momentová podmínka** rovnováhy

$$M_{ab} + M_{ad} + M_{af} = 0;\ M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$M_{cb} + M_{cg} = 0;\ M_{eb} + M_{ed} + M_{eh} = 0$$

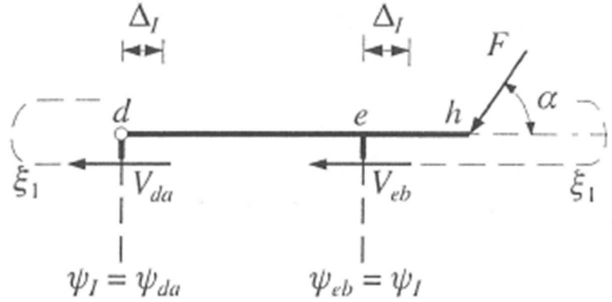
- koncové momenty M se vyjádří pomocí φ, Ψ $\rightarrow$ **styčníkové rovnice**
- pro posuny uvolněných částí soustavy se sestaví **součtové podmínky** rovnováhy

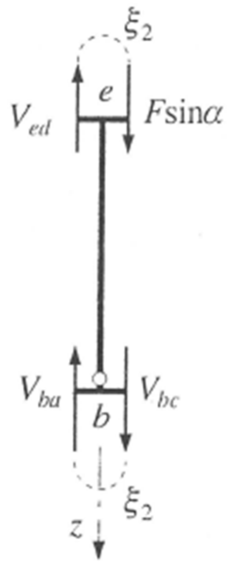
$$\sum F_x = 0: -V_{da} - V_{eb} - F \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_z = 0:$$

$$-V_{ba} + V_{bc} - V_{ed} + F \cdot \sin\alpha = 0$$

- koncové síly V se vyjádří pomocí $M\ (\varphi, \Psi) \rightarrow$ **patrové rovnice**

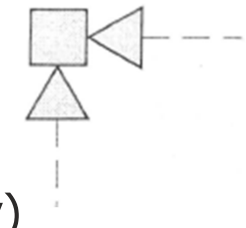


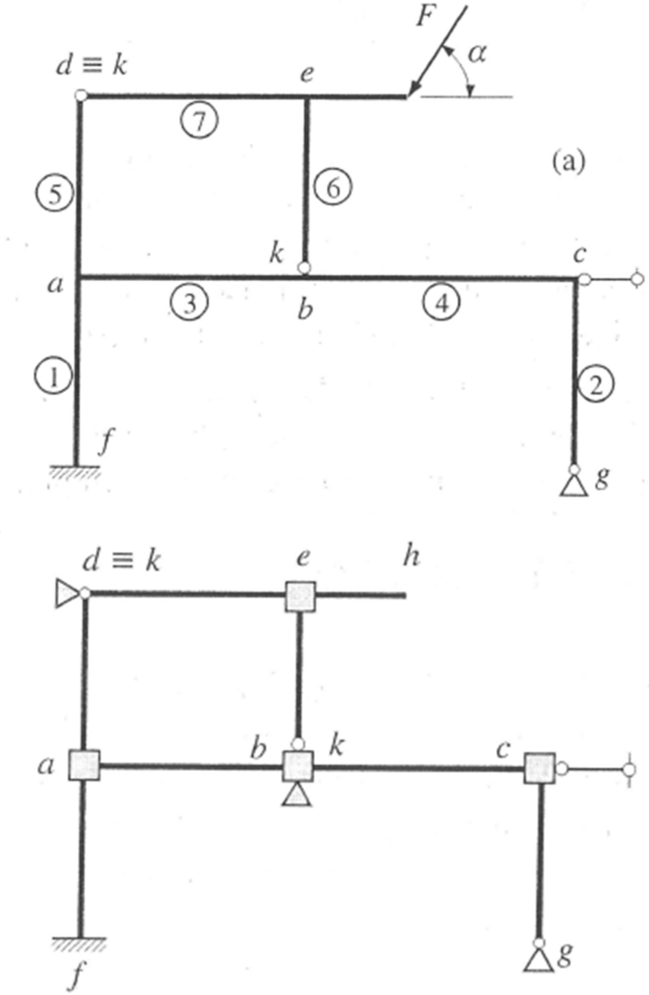


ZDM – STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

Základní deformačně určitá soustava

- základní prvek – deformačně určitý oboustranně vetknutý nosník, **všechny** složky **přemístění** koncových průřezů **jsou nulové**
- všechny **monolitické styčníky** jsou upevněny **fiktivními** dodatečně vloženými **vazbami**
  - **fiktivní momentová vazba**
    – zamezí potočení
  - **fiktivní silová vazba**
    – zabrání posunu (i kloubové styčníky)





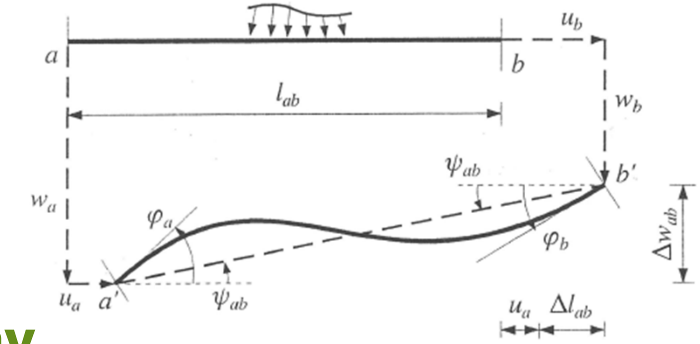
Stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,z}$

= počet fiktivních vazeb vložených do konstrukce pro získání základní deformačně určité soustavy

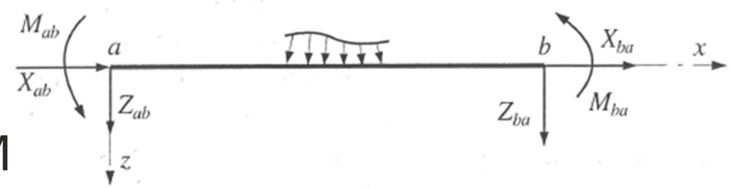
$n_{p,z} = 4 + 2 = 6$

ZDM – OBOUSTRANNĚ VETKNUTÝ PRUT

Koncové momenty oboustranně monoliticky připojeného prutu



- závisí na zatížení prutu → **primární stav**
  - dokonale upnuté konce prutu
  - působí dané zatížení,
    které vyvolá primární momenty $\overline{M}_{ab}, \overline{M}_{ba}$
- závisí na deformaci prutu → **sekundární stav**
  - udělíme prutu složky deformací
  - jednotkové deformační stavy,
    které vyvolají sekundární momenty – viz ODM
  - $\varphi_a, \varphi_b, \Psi = \frac{w_b - w_a}{l} \rightarrow \widehat{M}_{ab}, \widehat{M}_{ba}$



- výsledné koncové momenty jsou dané superpozicí

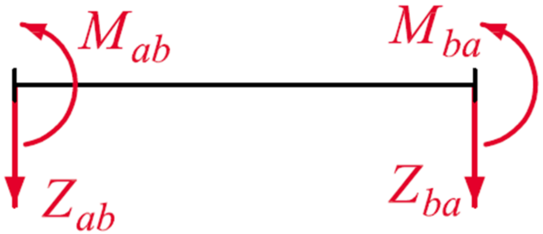
$$M_{ab} = \overline{M}_{ab} + \widehat{M}_{ab}$$

$$M_{ba} = \overline{M}_{ba} + \widehat{M}_{ba}$$

ZDM – OBOUSTRANNĚ VETKNUTÝ PRUT

Koncové momenty/síly oboustranně monoliticky připojeného prutu

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{array}\right] \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$



$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} - \frac{6EI}{l^2} w_a + \frac{4EI}{l} \varphi_a + \frac{6EI}{l^2} w_b + \frac{2EI}{l} \varphi_b = \boldsymbol{\bar{M}_{ab} + \frac{2EI}{l}\left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)}$$

$$\boldsymbol{M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \frac{2EI}{l}\left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)}$$

$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} + \frac{12EI}{l^3} w_a - \frac{6EI}{l^2} \varphi_a - \frac{12EI}{l^3} w_b - \frac{6EI}{l^2} \varphi_b$$

$$\boldsymbol{Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{2EI}{l^2}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right); Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{2EI}{l^2}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right)}$$

ZDM – LEVOSTRANNĚ VETKNUTÝ PRUT

Koncové momenty/síly levostranně monoliticky připojeného prutu

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{ab} = \bar{M}_{ab} - \frac{3EI}{l^2} w_a + \frac{3EI}{l} \varphi_a + \frac{3EI}{l^2} w_b = \bar{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{ab}} + \frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{l}} \left(\boldsymbol{\varphi_a} + \frac{\boldsymbol{w_b} - \boldsymbol{w_a}}{\boldsymbol{l}} \right)$$

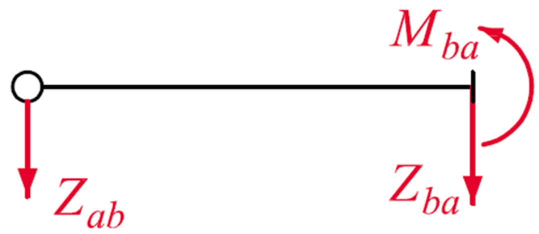
$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} + \frac{3EI}{l^3} w_a - \frac{3EI}{l^2} \varphi_a - \frac{3EI}{l^3} w_b$$

$$\boldsymbol{Z_{ab}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ab}} - \frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{l^2}} \left(\boldsymbol{\varphi_a} + \frac{\boldsymbol{w_b} - \boldsymbol{w_a}}{\boldsymbol{l}} \right); \boldsymbol{Z_{ba}} = \bar{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ba}} + \frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{l^2}} \left(\boldsymbol{\varphi_a} + \frac{\boldsymbol{w_b} - \boldsymbol{w_a}}{\boldsymbol{l}} \right)$$

ZDM – PRAVOSTRANNĚ VETKNUTÝ PRUT

Koncové momenty/síly pravostranně monoliticky připojeného prutu

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ 0 \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{array}\right] \end{array} \cdot \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ 0 \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$

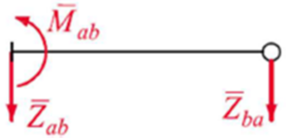
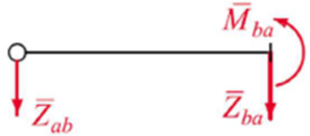
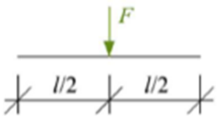
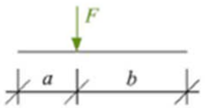
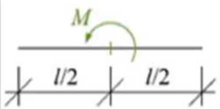
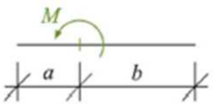
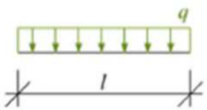


$$\boldsymbol{M_{ba}} = \bar{M}_{ba} - \frac{3EI}{l^2} w_a + \frac{3EI}{l^2} w_b + \frac{3EI}{l} \varphi_b = \boldsymbol{\bar{M}_{ba}} + \boldsymbol{\frac{3EI}{l}\left(\varphi_b + \frac{w_b - w_a}{l}\right)}$$

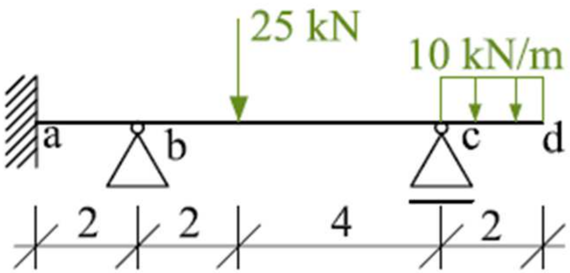
$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} + \frac{3EI}{l^3} w_a - \frac{3EI}{l^3} w_b - \frac{3EI}{l^2} \varphi_b$$

$$\boldsymbol{Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{3EI}{l^2}\left(\varphi_b + \frac{w_b - w_a}{l}\right); Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{3EI}{l^2}\left(\varphi_b + \frac{w_b - w_a}{l}\right)}$$

ZDM – KONCOVÉ MOMENTY/SÍLY PRUTU

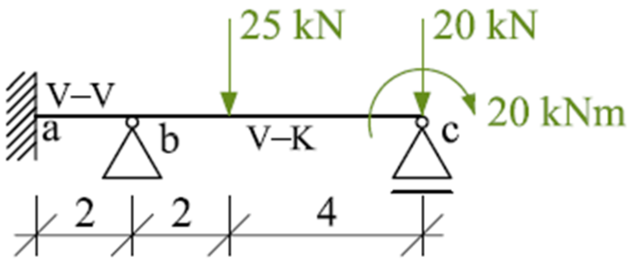
						
	$\bar{M}_{ab} = \frac{Fl}{8}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{Fl}{8}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{3Fl}{16}$			$\bar{M}_{ba} = -\frac{3Fl}{16}$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{F}{2}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{F}{2}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{11F}{16}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{5F}{16}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{5F}{16}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{11F}{16}$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{F \cdot a \cdot b^2}{l^2}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{F \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{F \cdot a \cdot b}{2l^2}(l+b)$			$\bar{M}_{ba} = -\frac{F \cdot a \cdot b}{2l^2}(l+a)$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{F \cdot b^2}{l^3}(3l-2b)$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{F \cdot a^2}{l^3}(3l-2a)$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{F \cdot b}{2l^3}(3l^2-b^2)$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{F \cdot a^2}{2l^3}(3l-a)$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{F \cdot b^2}{2l^3}(3l-b)$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{F \cdot a}{2l^3}(3l^2-a^2)$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{M}{4}$	$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{4}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{M}{8}$			$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{8}$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3M}{2l}$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{3M}{2l}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{9M}{8l}$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{9M}{8l}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{9M}{8l}$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{9M}{8l}$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{M \cdot b}{l^2}(2l-3b)$	$\bar{M}_{ba} = \frac{M \cdot a}{l^2}(2l-3a)$	$\bar{M}_{ab} = \frac{M}{2l^2}(l^2-3b^2)$			$\bar{M}_{ba} = \frac{M}{2l^2}(l^2-3a^2)$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{6M \cdot a \cdot b}{l^3}$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{6M \cdot a \cdot b}{l^3}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3M}{2l^3}(l^2-b^2)$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{3M}{2l^3}(l^2-b^2)$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3M}{2l^3}(l^2-a^2)$	$\bar{Z}_{ba} = \frac{3M}{2l^3}(l^2-a^2)$
	$\bar{M}_{ab} = \frac{q \cdot l^2}{12}$	$\bar{M}_{ba} = -\frac{q \cdot l^2}{12}$	$\bar{M}_{ab} = \frac{q \cdot l^2}{8}$			$\bar{M}_{ba} = -\frac{q \cdot l^2}{8}$
	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{q \cdot l}{2}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{q \cdot l}{2}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{5q \cdot l}{8}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{3q \cdot l}{8}$	$\bar{Z}_{ab} = -\frac{3q \cdot l}{8}$	$\bar{Z}_{ba} = -\frac{5q \cdot l}{8}$
Celkové koncové momenty prutu $\boxed{k = \frac{2EI}{l}}$	$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k\left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)$		$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + \frac{3}{4}k\left(2\varphi_a + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$			
	$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k\left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)$				$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + \frac{3}{4}k\left(2\varphi_b + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$	
Celkové koncové síly prutu	$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right)$		$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_a + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$		$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_b + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$	
	$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right)$		$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_a + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$		$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_b + 2\frac{w_b - w_a}{l}\right)$	

Na zadané prutové konstrukci pomocí zjednodušené deformační metody vykreslete průběhy vnitřních sil



$EI = 20 \cdot 10^6\ \mathrm{Nm}^2$

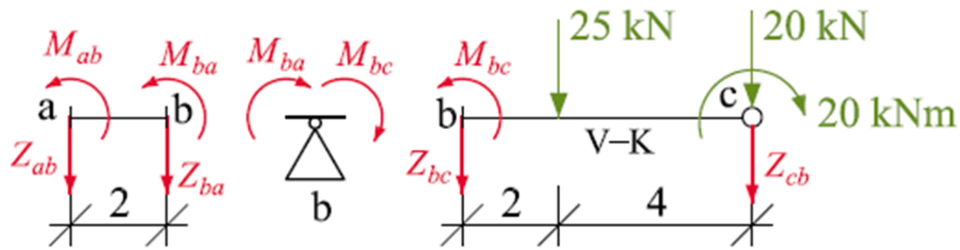
ZDM – SPOJITÝ NOSNÍK



Styčníková rovnice

- momentová podmínka rovnováhy

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$



$$M_{ba} = \bar{M}_{ba} + k\left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

$$\bar{M}_{ba} = 0;\ \varphi_a = 0; w_a = 0; w_b = 0$$

$$k_{ab} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6}{2} = 20 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{M_{ba}} = 0 + 20 \cdot 10^6\left(0 + 2\varphi_b + 3\frac{0-0}{2}\right) = \boldsymbol{40 \cdot 10^6 \cdot \varphi_b}$$

$$M_{bc} = \bar{M}_{bc} + \frac{3}{4}k\left(2\varphi_b + 2\frac{w_c - w_b}{l}\right)$$

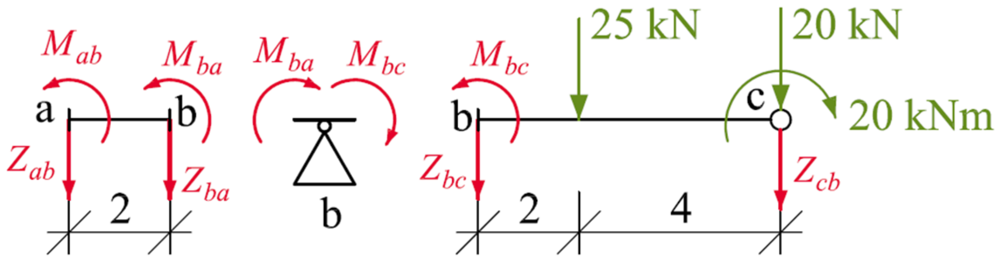
$$\bar{M}_{bc} = \frac{F \cdot a \cdot b}{2l^2}(l + b) + \frac{F \cdot a \cdot b}{2l^2}(l + b) + \frac{M}{2l^2}(l^2 - 3b^2)$$

$$\bar{M}_{bc} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 6^2}(6 + 4) + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 0}{2 \cdot 6^2}(6 + 0) + \frac{-20 \cdot 10^3}{2 \cdot 6^2}(6^2 - 3 \cdot 0^2) \rightarrow$$

$$\bar{M}_{bc} = 27,\bar{7} \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 = 17,\bar{7} \cdot 10^3$$

ZDM – SPOJITÝ NOSNÍK

Styčníková rovnice



- momentová podmínka rovnováhy

$$M_{ba} + M_{bc} = 0$$

$$M_{bc} = \bar{M}_{bc} + \frac{3}{4}k\left(2\varphi_b + 2\frac{w_c - w_b}{l}\right)$$

$$k_{bc} = \frac{2EI}{l} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6}{6} = \frac{20}{3} \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$w_b = 0; w_c = 0$$

$$\boldsymbol{M_{bc}} = 17,\bar{7} \cdot 10^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{3} \cdot 10^6\left(2\varphi_b + 2\frac{0-0}{6}\right) = \mathbf{17,\bar{7} \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^6} \cdot \boldsymbol{\varphi_b}$$

$$40 \cdot 10^6 \cdot \varphi_b + 17,\bar{7} \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^6 \cdot \varphi_b = 0$$

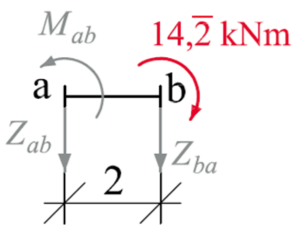
$$50 \cdot 10^6 \varphi_b = -17,\bar{7} \cdot 10^3 \rightarrow \boldsymbol{\varphi_b} = \mathbf{-0,3\bar{5} \cdot 10^{-3} rad}$$

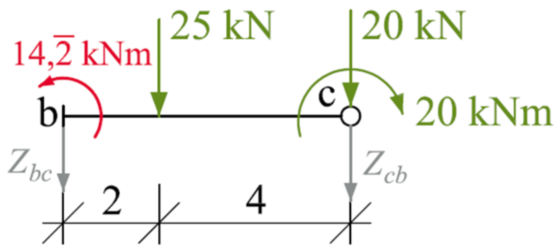
$$\rightarrow \boldsymbol{M_{ba}} = 40 \cdot 10^6 \cdot \varphi_b = 40 \cdot 10^6 \cdot \left(-0{,}3\bar{5} \cdot 10^{-3}\right) = -14,\bar{2} \cdot 10^3 \text{Nm} = \mathbf{-14,\bar{2}\ kNm}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{M_{bc}} = 17,\bar{7} \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^6 \cdot \varphi_b = 14,\bar{2} \cdot 10^3 \text{Nm} = \mathbf{14,\bar{2}\ kNm}$$

ZDM – SPOJITÝ NOSNÍK

Koncové síly/momenty





$$M_{ba} = -14,\bar{2}\ \text{kNm}$$

- **z tabulek**

$$M_{ab} = \bar{M}_{ab} + k\left(2\varphi_a + \varphi_b + 3\frac{w_b - w_a}{l}\right)$$

$$M_{ab} = 0 + 20 \cdot 10^6 \cdot \left(-0{,}3\bar{5}\ \cdot 10^{-3}\right) = -7,\bar{1} \cdot 10^3\text{Nm} = -7,\bar{1}\ \text{kNm}$$

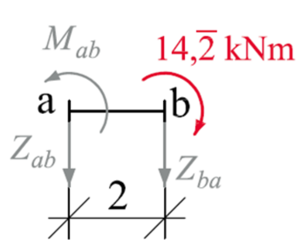
$$Z_{ab} = \bar{Z}_{ab} - \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right) = 0 - \frac{20 \cdot 10^6}{2} \cdot \left(3 \cdot \left(-0{,}3\bar{5}\ \cdot 10^{-3}\right)\right) \rightarrow$$

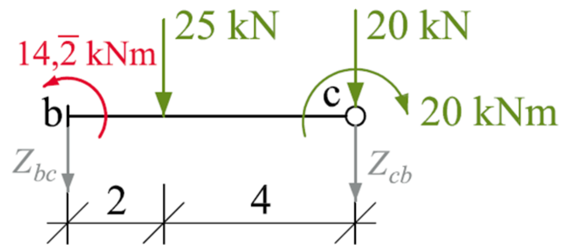
$$Z_{ab} = 10,\bar{6}\ \text{kN}$$

$$Z_{ba} = \bar{Z}_{ba} + \frac{k}{l}\left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6\frac{w_b - w_a}{l}\right) = 0 + \frac{20 \cdot 10^6}{2} \cdot \left(3 \cdot \left(-0{,}3\bar{5}\ \cdot 10^{-3}\right)\right) \rightarrow$$

$$Z_{ba} = -10,\bar{6}\ \text{kN}$$

Koncové síly/momenty





$M_{bc} = 14,\overline{2}\ \mathrm{kNm}$

- **z tabulek**

$$Z_{bc} = \bar{Z}_{bc} - \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_b + 2\frac{w_c - w_b}{l}\right)$$

$$\bar{Z}_{bc} = -\frac{F \cdot b}{2l^3}(3l^2 - b^2) - \frac{F \cdot b}{2l^3}(3l^2 - b^2) - \frac{3M}{2l^3}(l^2 - b^2)$$

$$= -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 6^3}(3 \cdot 6^2 - 4^2) - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0}{2 \cdot 6^3}(3 \cdot 6^2 - 0^2) - \frac{3 \cdot (-20 \cdot 10^3)}{2 \cdot 6^3}(6^2 - 0^2)$$

$$\bar{Z}_{bc} = -21,\overline{296} \cdot 10^3 - 0 + 5 \cdot 10^3 = -16,\overline{296} \cdot 10^3$$

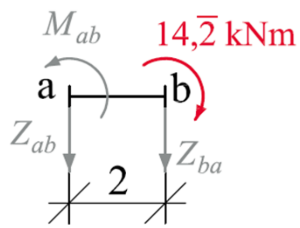
$$Z_{bc} = -16,\overline{296} \cdot 10^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{20 \cdot 10^6}{3 \cdot 6}\left(2 \cdot \left(-0,3\bar{5}\ \cdot 10^{-3}\right)\right) = -15,704\ \mathrm{kN}$$

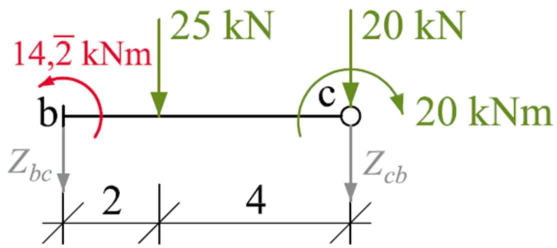
- **z podmínek rovnováhy na prutu**

$$\sum M_{i,c} = 0;\ \ Z_{bc} \cdot 6 + 14,\overline{2} + 25 \cdot 4 - 20 = 0 \rightarrow Z_{bc} = -15,704\ \mathrm{kN}$$

ZDM – SPOJITÝ NOSNÍK

Koncové síly/momenty





- **z tabulek**

$$Z_{cb} = \bar{Z}_{cb} + \frac{3}{4}\frac{k}{l}\left(2\varphi_b + 2\frac{w_c - w_b}{l}\right)$$

$$\bar{Z}_{cb} = -\frac{F \cdot a^2}{2l^3}(3l - a) - \frac{F \cdot a^2}{2l^3}(3l - a) + \frac{3M}{2l^3}(l^2 - b^2)$$

$$= -\frac{25 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{2 \cdot 6^3}(3 \cdot 6 - 2) - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6^2}{2 \cdot 6^3}(3 \cdot 6 - 6) + \frac{3 \cdot (-20 \cdot 10^3)}{2 \cdot 6^3}(6^2 - 0^2)$$

$$\bar{Z}_{cb} = -3,\overline{703} \cdot 10^3 - 20 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 = -28,\overline{703} \cdot 10^3$$

$$Z_{cb} = -28,\overline{703} \cdot 10^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{20 \cdot 10^6}{3 \cdot 6}\left(2 \cdot \left(-0{,}3\overline{5} \cdot 10^{-3}\right)\right) = -29{,}296 \text{ kN}$$

- **z podmínek rovnováhy na prutu**

$$\sum M_{i,b} = 0;\; 14,\overline{2} - 25 \cdot 2 - 20 \cdot 6 - 20 - Z_{cb} \cdot 6 = 0 \rightarrow Z_{cb} = -29{,}296 \text{ kN}$$

ZDM – SPOJITÝ NOSNÍK