



BDA016 Stavební mechanika 2

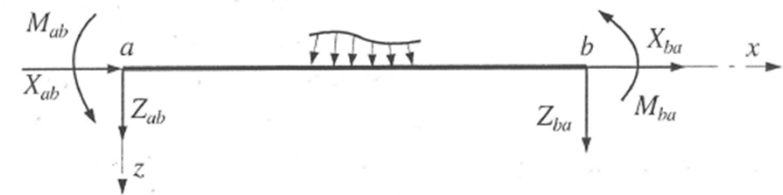
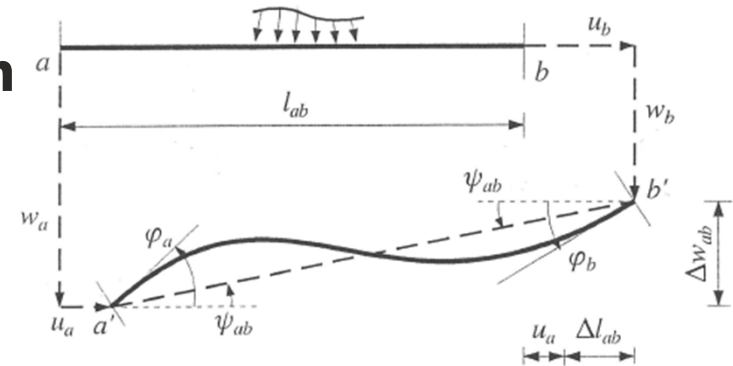
9. přednáška

- Obecná deformační metoda

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

- **zanedbává** velmi malý **vliv posouvajících sil** na deformaci prutové soustavy
- počítá se změnou délky prutu způsobenou normálovými silami
- na tvar ohybové čáry prutu má vliv:
 - zatížení prutu (primární vliv)
 - pružná přemístění (sekundární vliv)
 - styčnicková pootočení φ_a, φ_b
 - vzájemné posunutí styčnicků ve směru střednice prutu $\Delta u_{ab}(\Delta l_{ab})$
 - vzájemné posunutí styčnicků ve směru kolmém na původní střednici prutu $\Delta w_{ab} \rightarrow$ prutové pootočení Ψ_{ab}
- deformace prutu vyvolá koncové síly (akce styčnicků na konce prutu)
- konce prutu působí na styčníky stejně velkými silami opačného smyslu



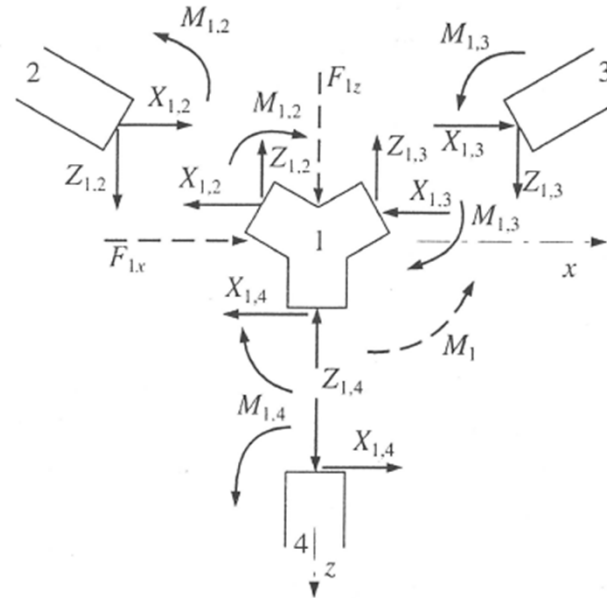
Rovnováha ve styčnicku

$$\sum F_{ix,1} = 0; \quad \boxed{F_{1x}} - \boxed{X_{1,2} - X_{1,3} - X_{1,4}} = 0$$

$$\sum F_{iz,1} = 0; \quad \boxed{F_{1z}} - \boxed{Z_{1,2} - Z_{1,3} - Z_{1,4}} = 0$$

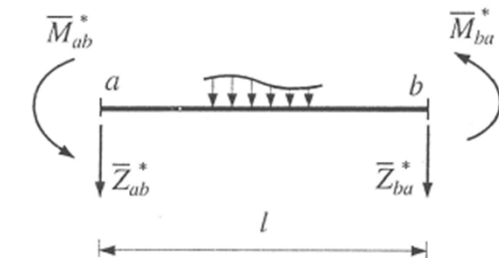
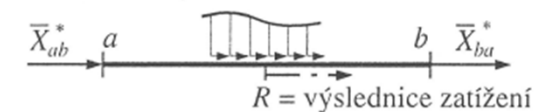
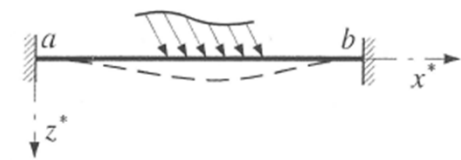
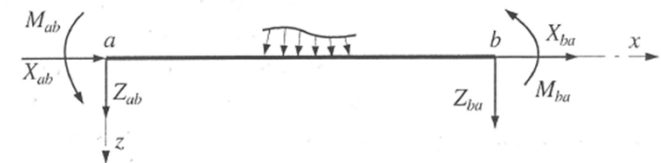
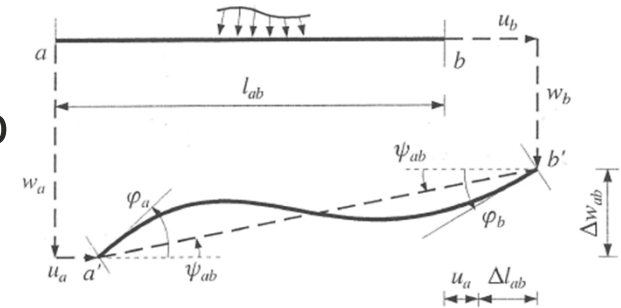
$$\sum M_{i,1} = 0; \quad \boxed{M_1} - \boxed{M_{1,2} - M_{1,3} - M_{1,4}} = 0$$

$$\mathbf{S} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$



Koncové síly oboustranně monoliticky připojeného prutu vyjádřené pomocí parametrů deformace

- závisí na zatížení prutu → **primární stav**
 - dokonale upnuté konce prutu
 - působí dané zatížení, které vyvolá primární síly
 - můžeme určit např. silovou metodou
 - zatížení lze obecně rozdělit na 2 nezávislé složky – osově a příčné
- závisí na deformaci prutu → **sekundární stav**
 - rozdíl osových koncových posunutí prutu vyjadřuje vliv pružných osových změn prutu (Hookův zákon)
 - příčná koncová posunutí a potočení uvažovaná jako deformační zatížení se projeví vznikem sekundárních koncových sil



- superpozicí získáme **výsledné** (celkové) **koncové síly**

$$\Delta l_{ab} = \frac{\hat{N}_{ab}^* \cdot l_{ab}}{EA_{ab}} = u_b^* - u_a^* \text{ Hookův zákon}$$

$$-\hat{N}_{ab}^* = \hat{X}_{ab}^* = -\hat{X}_{ba}^* = -\frac{EA_{ab}}{l_{ab}} (u_b^* - u_a^*)$$

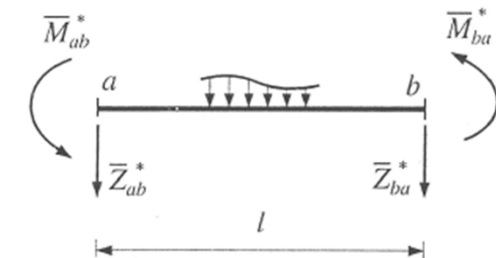
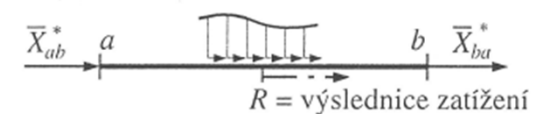
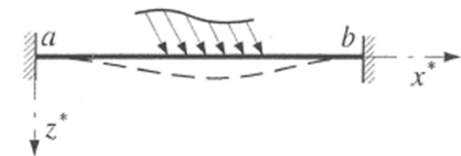
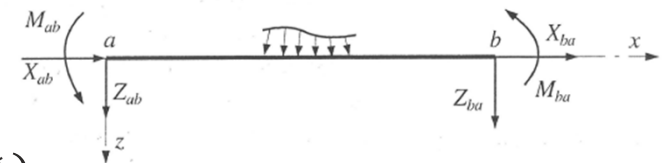
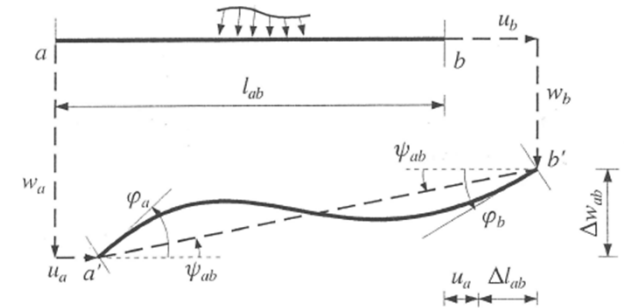
$$X_{ab}^* = \bar{X}_{ab}^* - \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} (u_b^* - u_a^*); X_{ba}^* = \bar{X}_{ba}^* + \frac{EA_{ab}}{l_{ab}} (u_b^* - u_a^*)$$

$$M_{ab}^* = \bar{M}_{ab}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left(2\varphi_a + \varphi_b + 3 \frac{w_b^* - w_a^*}{l_{ab}} \right)$$

$$M_{ba}^* = \bar{M}_{ba}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}} \left(\varphi_a + 2\varphi_b + 3 \frac{w_b^* - w_a^*}{l_{ab}} \right)$$

$$Z_{ab}^* = \bar{Z}_{ab}^* - \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6 \frac{w_b^* - w_a^*}{l_{ab}} \right)$$

$$Z_{ba}^* = \bar{Z}_{ba}^* + \frac{2EI_{ab}}{l_{ab}^2} \left(3\varphi_a + 3\varphi_b + 6 \frac{w_b^* - w_a^*}{l_{ab}} \right)$$



- vyjádření koncových sil na prutu ve skalární tvaru s využitím globálních parametrů deformace pro uplatnění v podmínkách rovnováhy je obdobné pro všechny pruty konstrukce → společný algoritmus

- **maticová forma ODM**

- matice – uspořádání prvků (čísel) do sloupců a řádků → čtvercová matice
- vektor – sloupcová matice (úsporný zápis do řádku s transpozicí)
- maticové operace = přehledné upořádání matematického zápisu

- **výpočtový model – globální vektory prutové soustavy**

- globální vektor parametrů deformace \mathbf{r}

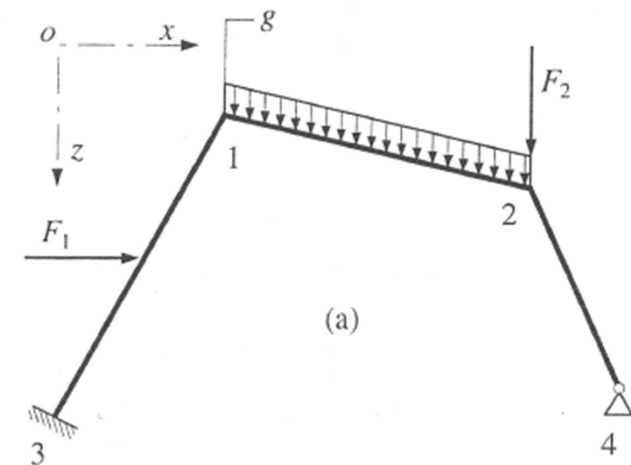
$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2\}^T$$

$$\mathbf{r} = \{u_1, w_1, \varphi_1, u_2, w_2, \varphi_2, u_3, w_3, \varphi_3, u_4, w_4, \varphi_4\}^T$$

- globální vektor uzlového zatížení \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \{0, 0, 0, 0, F_2, 0\}^T$$

$$\mathbf{S} = \{0, 0, 0, 0, F_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$$



= základní úloha maticové formy v ODM

- **typy prutů**

- oboustranně vetknutý V–V
- jednostranně kloubově připojený V–K
- oboustranně kloubově připojený K–K

- vektor primárních koncových sil

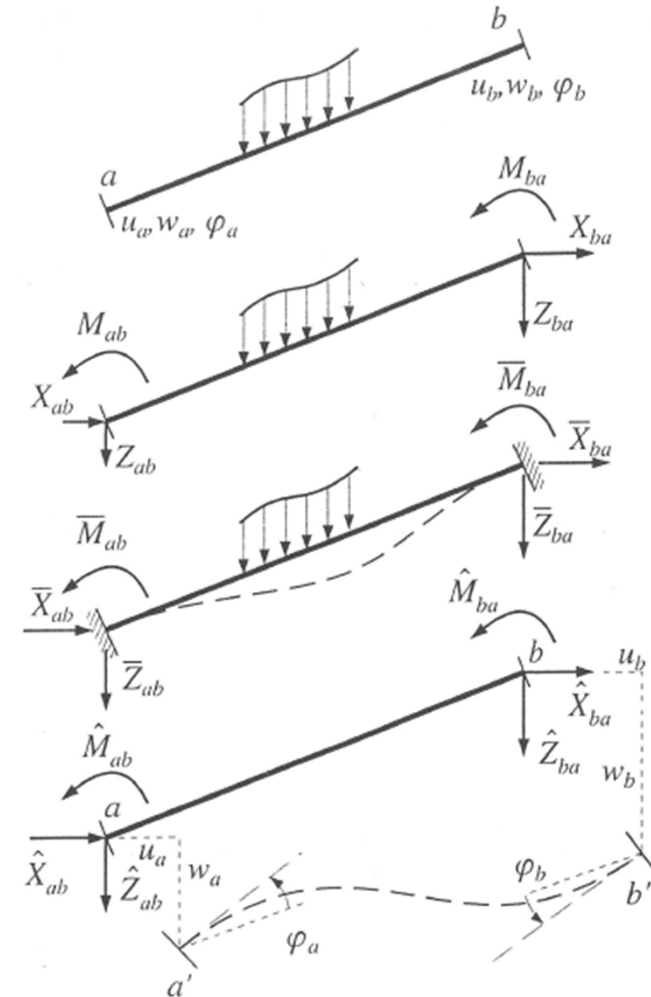
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \{\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, \bar{M}_{ab}, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, \bar{M}_{ba}\}^T$$

- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T$$

- vektor sekundárních koncových sil

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab} = \{\hat{X}_{ab}, \hat{Z}_{ab}, \hat{M}_{ab}, \hat{X}_{ba}, \hat{Z}_{ba}, \hat{M}_{ba}\}^T$$



- **sekundární koncové síly** jsou lineárně závislé na deformacích a tuhostech

$$\hat{X}_{ab} = k_{11}u_a + k_{12}w_a + k_{13}\varphi_a + k_{14}u_b + k_{15}w_b + k_{16}\varphi_b$$

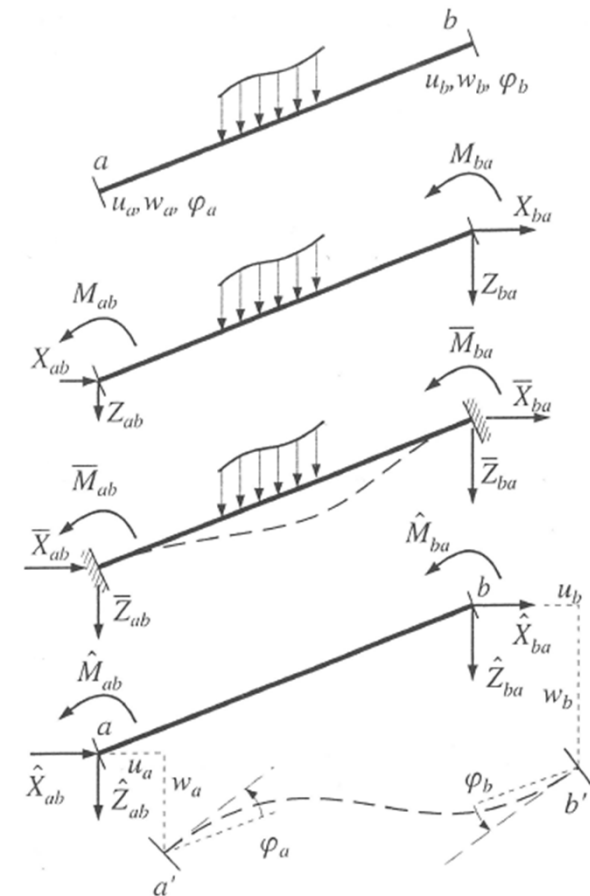
⋮

$$\hat{M}_{ba} = k_{61}u_a + k_{62}w_a + k_{63}\varphi_a + k_{64}u_b + k_{65}w_b + k_{66}\varphi_b$$

- k_{ij} – konstanty úměrnosti **tuhostní součinitele**
- **maticový zápis**

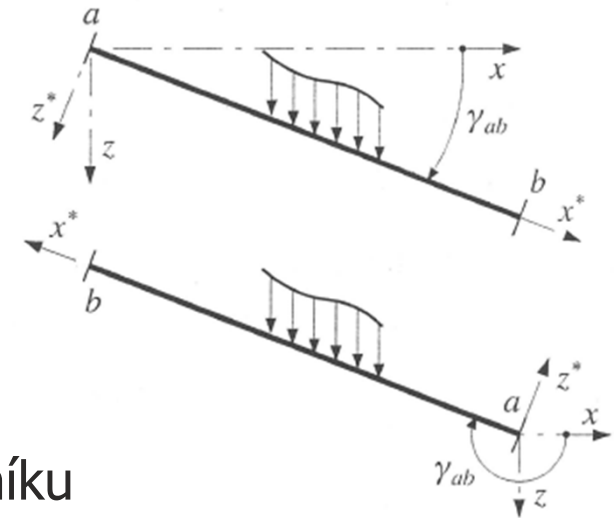
$$\hat{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}; \mathbf{R}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \hat{\mathbf{R}}_{ab} = \bar{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{k}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}$$

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab} \\ \bar{Z}_{ab} \\ \bar{M}_{ab} \\ \bar{X}_{ba} \\ \bar{Z}_{ba} \\ \bar{M}_{ba} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix}$$



FAST ODM – PŘÍMÝ PRUT

- vztah mezi lokální a globální souřadnicovou soustavou je definován orientovaným úhlem γ_{ab} (mezi kladnou globální osou x a lokální osou x^*)
 - odvození prvků
 - vektoru lokálních primárních koncových sil
 - lokální matice tuhosti
- řešení jednoduchého staticky neurčitého nosníku silovou metodou (základní soustava = prostý nosník
→ deformační součinitele)



Primární koncové síly závisí na zatížení prutu

- osové zatížení

$$\delta_0 + \delta_1 \bar{X}_{ba}^* = 0$$

$$\bar{X}_{ba}^* = -\frac{\delta_0}{\delta_1}$$

$$\bar{X}_{ab}^* = -\bar{X}_{ba}^* - R = \frac{\delta_0}{\delta_1} - R$$

- příčné zatížení

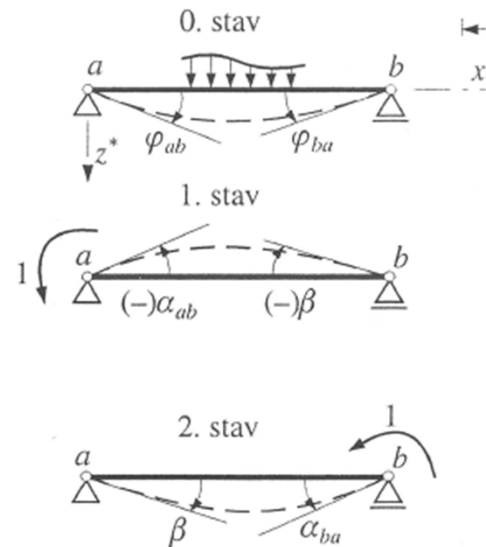
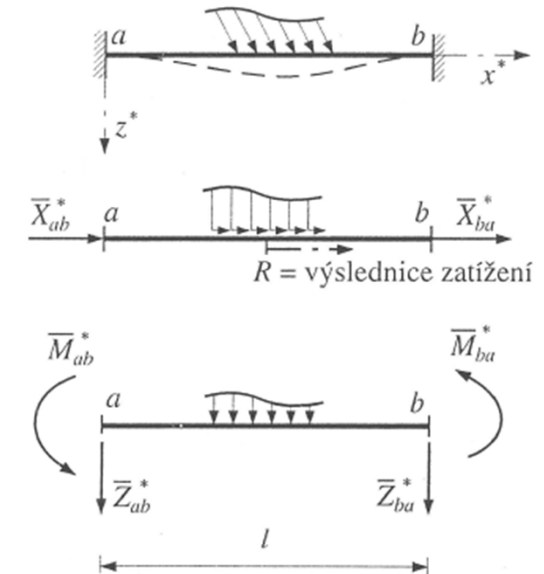
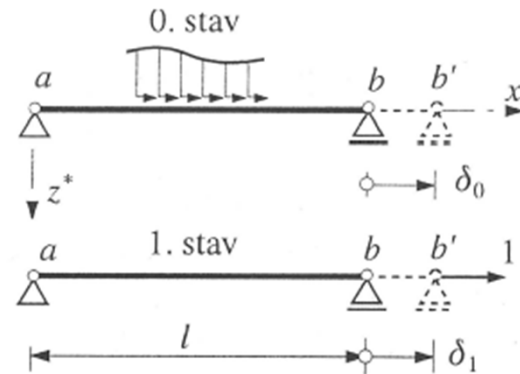
$$\Phi_{ab} = 0; -\bar{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \bar{M}_{ba}^* \beta + \varphi_{ab} = 0$$

$$\Phi_{ba} = 0; -\bar{M}_{ab}^* \beta + \bar{M}_{ba}^* \alpha_{ba} + \varphi_{ba} = 0$$

$$\bar{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab} \alpha_{ba} - \varphi_{ba} \beta}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}; \bar{M}_{ba}^* = \frac{\varphi_{ab} \beta - \varphi_{ba} \alpha_{ab}}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2}$$

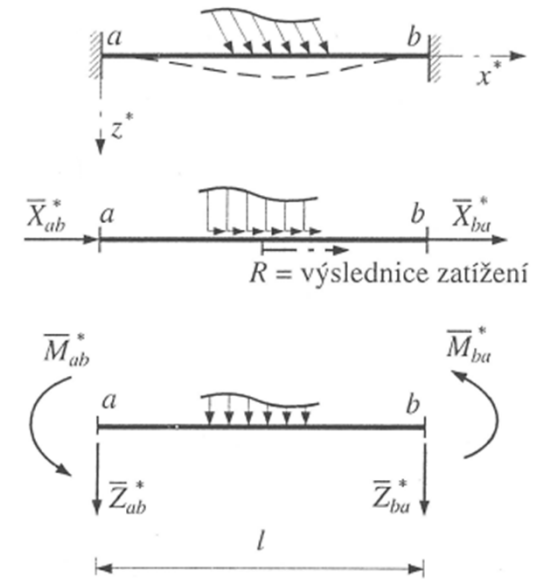
$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0} - \Delta \bar{M}; \bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0} + \Delta \bar{M}$$

$$\Delta \bar{M} = \frac{(\bar{M}_{ab}^* + \bar{M}_{ba}^*)}{l} = \frac{\varphi_{ab}(\alpha_{ba} + \beta) - \varphi_{ba}(\beta + \alpha_{ab})}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) \cdot l}$$



Primární koncové síly závisí na zatížení prutu

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ \bar{Z}_{ab,0}^* - \frac{\varphi_{ab}(\alpha_{ba} + \beta) - \varphi_{ba}(\beta + \alpha_{ab})}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2) \cdot l} \\ \frac{\varphi_{ab}\alpha_{ba} - \varphi_{ba}\beta}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ \bar{Z}_{ba,0}^* + \frac{\varphi_{ab}(\alpha_{ba} + \beta) - \varphi_{ba}(\beta + \alpha_{ab})}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2) \cdot l} \\ \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha_{ab}}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2} \end{Bmatrix}$$



Sekundární koncové síly závisí na deformaci prutu

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{k}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}$$

- nezávislý vliv osových a příčných deformací → nulové prvky matice tuhosti
- prvky v každém sloupci matice tuhosti odpovídají **koncovým silám** vyvolaným vždy **jednou jednotkovou deformací** při současném vynulování ostatních

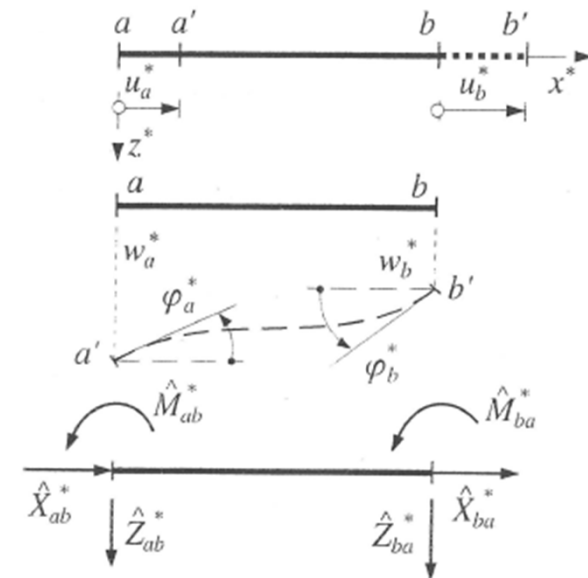
$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & 0 & 0 & k_{14}^* & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^* & k_{23}^* & 0 & k_{25}^* & k_{26}^* \\ 0 & k_{32}^* & k_{33}^* & 0 & k_{35}^* & k_{36}^* \\ k_{41}^* & 0 & 0 & k_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}^* & k_{53}^* & 0 & k_{55}^* & k_{56}^* \\ 0 & k_{62}^* & k_{63}^* & 0 & k_{65}^* & k_{66}^* \end{bmatrix}$$

- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, \varphi_a^*, u_b^*, w_b^*, \varphi_b^*\}^T$$

- vektor sekundárních koncových sil

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{\hat{X}_{ab}^*, \hat{Z}_{ab}^*, \hat{M}_{ab}^*, \hat{X}_{ba}^*, \hat{Z}_{ba}^*, \hat{M}_{ba}^*\}^T$$



1. deformační stav

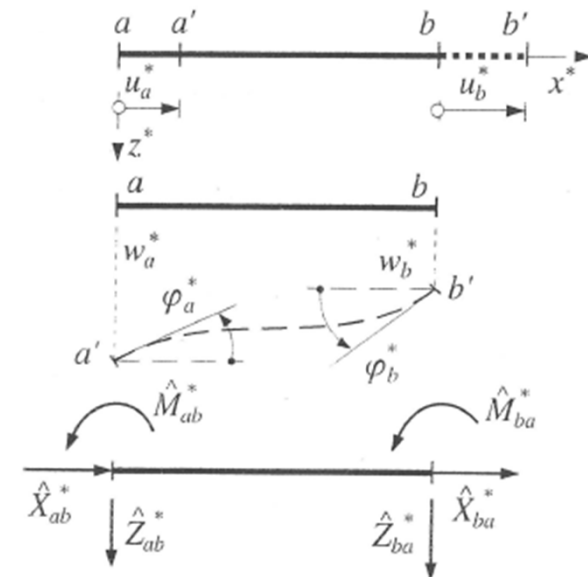
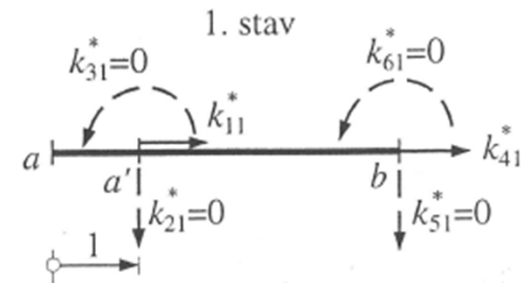
jednotkový vodorovný posun podpory a : $u_a^* = 1$

- sekundární koncová síla (tuhost)

$$\delta_0 + k_{11}^* \delta_1 = 1 \rightarrow k_{11}^* = \frac{1}{\delta_1}; k_{41}^* = -k_{11}^*$$

- prizmatický prut ($A = \text{konst}$, $I = \text{konst}$)

$$\delta_1 = \int_0^l \frac{1}{EA} dx = \frac{l}{EA} \rightarrow \boxed{k_{11}^* = -k_{41}^* = \frac{EA}{l}}$$



2. deformační stav

jednotkový svislý posun podpory a : $w_a^* = 1$

- způsobí naklonění prutu

$$\Psi \approx \operatorname{tg} \Psi = \frac{1}{l}$$

- deformační podmínky (nenulový je pouze svislý posun uzlu a)

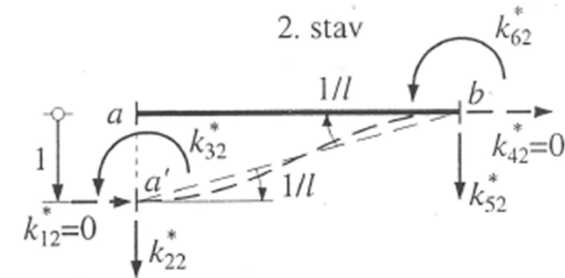
$$\varphi_a^* = 0: -k_{32}^* \alpha_{ab} + k_{62}^* \beta - \Psi = 0 \rightarrow -k_{32}^* \alpha_{ab} + k_{62}^* \beta = \frac{1}{l}$$

$$\varphi_b^* = 0: -k_{32}^* \beta + k_{62}^* \alpha_{ba} + \Psi = 0 \rightarrow -k_{32}^* \beta + k_{62}^* \alpha_{ba} = -\frac{1}{l}$$

$$k_{32}^* = -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) l}; \quad k_{62}^* = -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) l}$$

- momenty uvede do rovnováhy dvojice sil \rightarrow svislé složky koncových sil

$$k_{22}^* = -k_{52}^* = -\frac{1}{l} (k_{32}^* + k_{62}^*) = \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) l^2}$$



3. deformační stav

jednotkové pootočení podpory a : $\varphi_a^* = 1$

- deformační podmínky

$$\varphi_a^* = -1: -k_{33}^* \alpha_{ab} + k_{63}^* \beta = -1$$

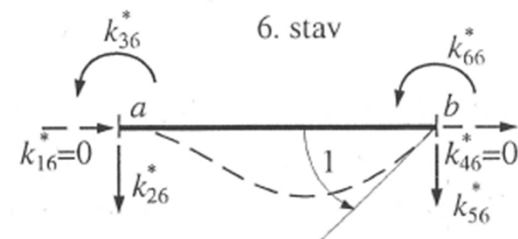
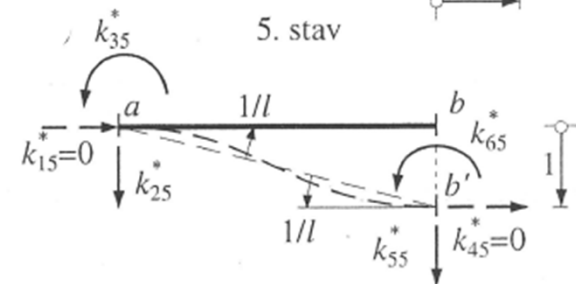
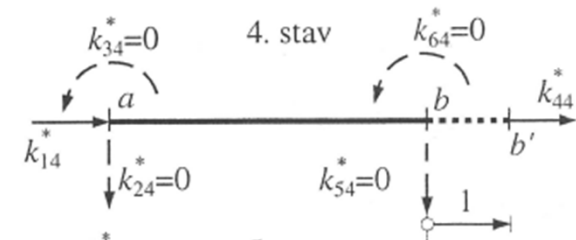
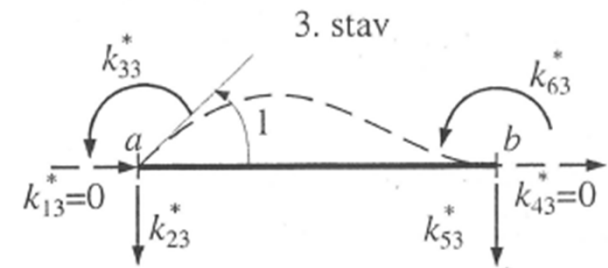
$$\varphi_b^* = 0: -k_{33}^* \beta + k_{63}^* \alpha_{ba} = 0$$

$$k_{33}^* = \frac{\alpha_{ba}}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2}; k_{63}^* = \frac{\beta}{\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2}$$

- momenty uvede do rovnováhy dvojice sil – svislé složky koncových sil

$$k_{23}^* = -k_{53}^* = -\frac{1}{l}(k_{33}^* + k_{63}^*) = -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{(\alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2)l}$$

další prvky matice tuhosti určíme analogicky analýzou 4. až 6. deformačního stavu



Lokální matice tuhosti

- jednotlivé prvky mají různé fyzikální rozměry
- determinant soustavy rovnic $D = \alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2$

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ba}}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ab}}{D} \end{bmatrix}$$

Primární koncové síly závisí na zatížení prutu

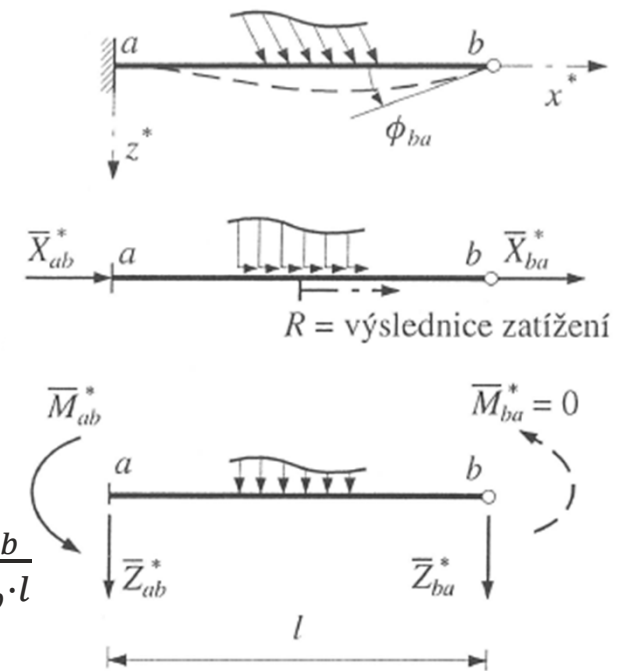
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \{\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, \bar{M}_{ab}, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, 0\}^T$$

- osově zatížení – viz oboustranně vetknutý prut
- příčné zatížení

$$\Phi_{ab} = 0; -\bar{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \varphi_{ab} = 0 \rightarrow \bar{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}}$$

$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^* - \Delta \bar{M}; \bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^* + \Delta \bar{M}; \Delta \bar{M} = \frac{\bar{M}_{ab}^*}{l} = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} \cdot l}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ \bar{Z}_{ab,0}^* - \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} \cdot l} \\ \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ \bar{Z}_{ab,0}^* + \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} \cdot l} \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Sekundární koncové síly závisí na deformaci prutu

1. a 4. deformační stav – viz oboustranně vetknutý prut

2. deformační stav

jednotkový svislý posun podpory a : $w_a^* = 1$

- způsobí naklonění prutu

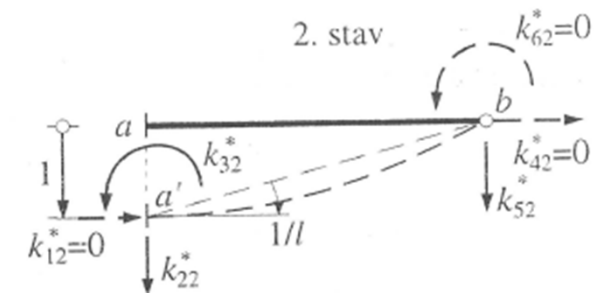
$$\Psi \approx \text{tg } \Psi = \frac{1}{l}$$

- deformační podmínka

$$\varphi_a^* = 0: -k_{32}^* \alpha_{ab} - \Psi = 0 \rightarrow -k_{32}^* \alpha_{ab} = \frac{1}{l} \rightarrow k_{32}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} \cdot l}$$

- momenty uvede do rovnováhy dvojice sil – svislé složky koncových sil

$$k_{22}^* = -k_{52}^* = -\frac{1}{l} k_{32}^* = \frac{1}{\alpha_{ab} \cdot l^2}$$



3. deformační stav

jednotkové pootočení podpory a : $\varphi_a^* = 1$

- deformační podmínka

$$\varphi_a^* = -1: -k_{33}^* \alpha_{ab} = -1 \rightarrow k_{33}^* = \frac{1}{\alpha_{ab}}$$

- momenty uvede do rovnováhy dvojice sil – svislé složky koncových sil

$$k_{23}^* = -k_{53}^* = -\frac{1}{l} k_{33}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} \cdot l}$$

další prvky matice tuhosti určíme analogicky analýzou 5. deformačního stavu

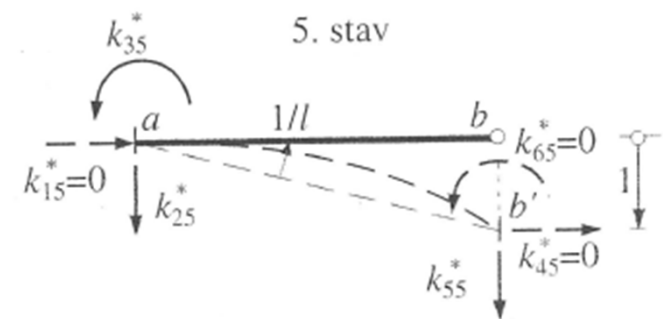
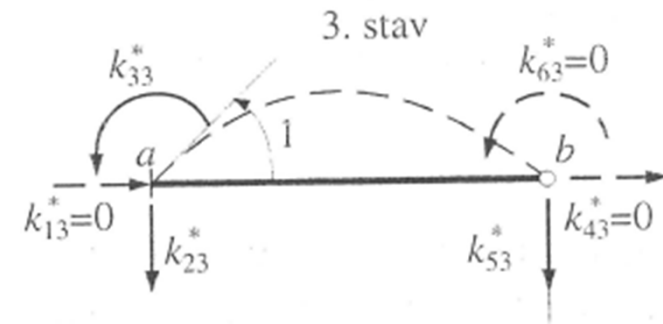
prvky 6. řádku jsou nulové

- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, \varphi_a^*, u_b^*, w_b^*, 0\}^T$$

- vektor sekundárních koncových sil

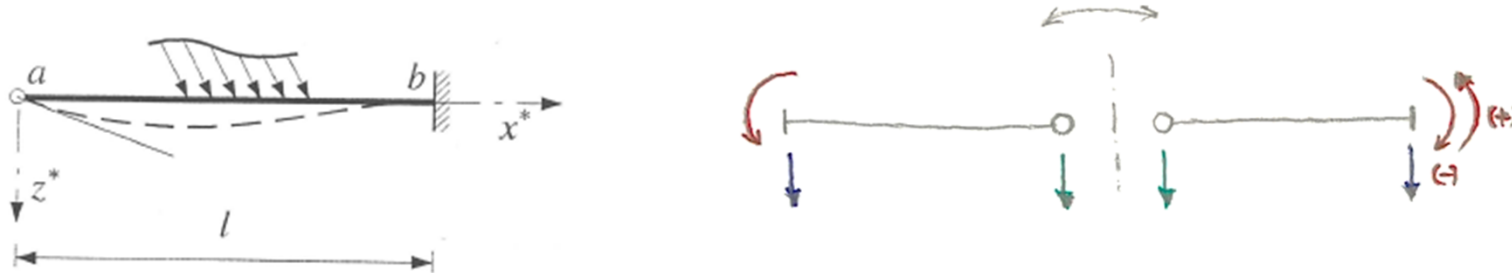
$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{\hat{X}_{ab}^*, \hat{Z}_{ab}^*, \hat{M}_{ab}^*, \hat{X}_{ba}^*, \hat{Z}_{ba}^*, 0\}^T$$



Lokální matice tuhosti

- jednotlivé prvky mají různé fyzikální rozměry

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & -\frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l} & -\frac{1}{\alpha_{ab}} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & \frac{1}{\alpha_{ab}l} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab}l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ 0 \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ \bar{Z}_{ab,0}^* + \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} \cdot l} \\ 0 \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ \bar{Z}_{ab,0}^* - \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} \cdot l} \\ -\frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & -\frac{1}{\alpha_{ba} l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & \frac{1}{\alpha_{ba} l} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l} & \frac{1}{\alpha_{ba}} \end{bmatrix}$$

Primární koncové síly závisí na zatížení prutu

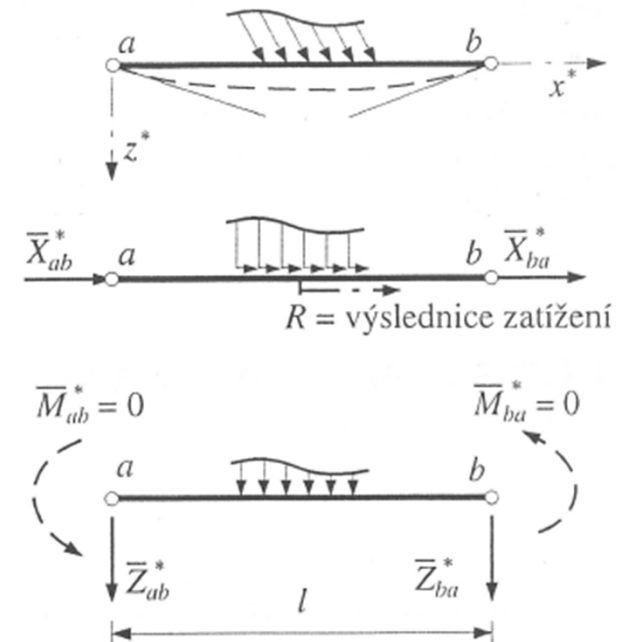
$$\bar{\mathbf{R}}_{ab} = \{\bar{X}_{ab}, \bar{Z}_{ab}, 0, \bar{X}_{ba}, \bar{Z}_{ba}, 0\}^T$$

- osově zatížení – viz oboustranně vetknutý prut
- příčné zatížení

$$\bar{M}_{ab}^* = \bar{M}_{ba}^* = 0$$

$$\bar{Z}_{ab}^* = \bar{Z}_{ab,0}^*; \bar{Z}_{ba}^* = \bar{Z}_{ba,0}^*$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ 0 \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ \bar{Z}_{ab,0}^* \\ 0 \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ \bar{Z}_{ab,0}^* \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Sekundární koncové síly závisí na deformaci prutu

- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, 0, u_b^*, w_b^*, 0\}^T$$

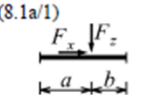
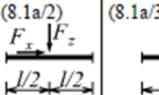
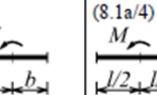
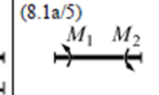
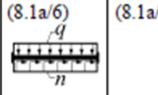
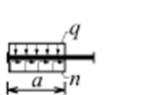
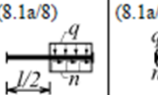
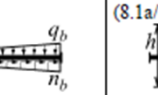
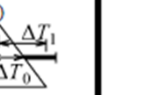

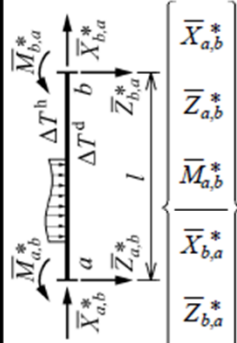
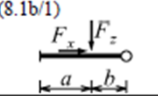
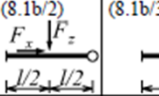
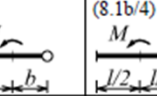
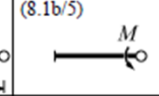
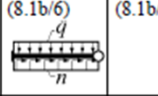
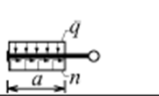
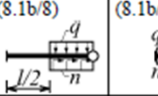
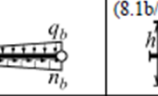


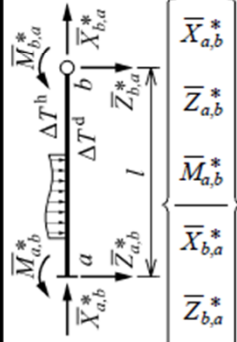
- lokální matice tuhosti – pouze vliv osových deformací (SU nosník)

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

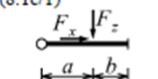
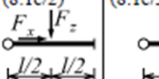
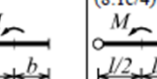
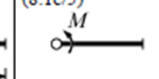
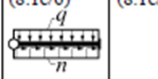

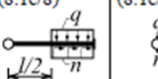
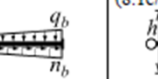
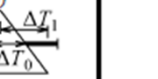

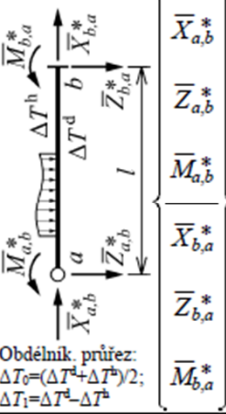
- vektor sekundárních koncových sil

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{\hat{X}_{ab}^*, 0, 0, \hat{X}_{ba}^*, 0, 0\}^T$$

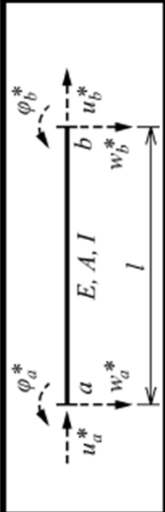
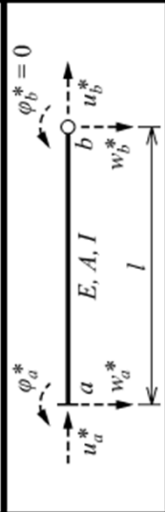
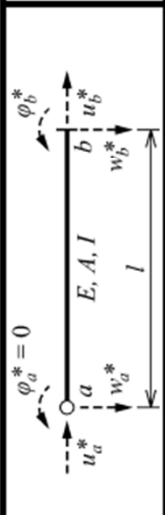
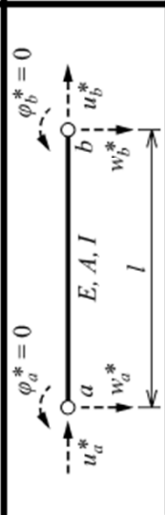
Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{\bar{R}_{a,b}^*\}$

	(8.1a/1)	(8.1a/2)	(8.1a/3)	(8.1a/4)	(8.1a/5)	(8.1a/6)	(8.1a/7)	(8.1a/8)	(8.1a/9)	(8.1a/10)
(a)										
	$\bar{X}_{a,b}^*$	$-\frac{b}{l}F_x$	$-\frac{1}{2}F_x$	0	0	$-\frac{1}{2}nl$	$-\frac{2al-a^2}{2l}n$	$-\frac{1}{8}nl$	$-\frac{2n_a+n_b}{6}l$	$EA\alpha_T\Delta T_0$
$\bar{Z}_{a,b}^*$	$-b^2\frac{3l-2b}{l^3}F_z$	$-\frac{1}{2}F_z$	$-\frac{6ab}{l^3}M$	$-\frac{3M}{2l}$	Zatěžovací momenty tuzé připojených konců se uplatní jako uzlové zatížení	$-\frac{1}{2}ql$	$-\frac{2al^3-2a^3l+a^4}{2l^3}q$	$-\frac{3}{32}ql$	$-\frac{7q_a+3q_b}{20}l$	0
$\bar{M}_{a,b}^*$	$\frac{ab^2}{l^2}F_z$	$\frac{1}{8}F_zl$	$b\frac{2l-3b}{l^2}M$	$\frac{1}{4}M$		$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{6a^2l^2-8a^3l+3a^4}{12l^2}q$	$\frac{5}{192}ql^2$	$\frac{3q_a+2q_b}{60}l^2$	$\frac{EI}{h}\alpha_T\Delta T_1$
$\bar{X}_{b,a}^*$	$-\frac{a}{l}F_x$	$-\frac{1}{2}F_x$	0	0	$-\frac{1}{2}nl$	$-\frac{a^2}{2l}n$	$-\frac{3}{8}nl$	$-\frac{n_a+2n_b}{6}l$	$-EA\alpha_T\Delta T_0$	
$\bar{Z}_{b,a}^*$	$-a^2\frac{3l-2a}{l^3}F_z$	$-\frac{1}{2}F_z$	$\frac{6ab}{l^3}M$	$\frac{3M}{2l}$	$-\frac{1}{2}ql$	$-\frac{2a^3l-a^4}{2l^3}q$	$-\frac{13}{32}ql$	$-\frac{3q_a+7q_b}{20}l$	0	
$\bar{M}_{b,a}^*$	$-\frac{a^2b}{l^2}F_z$	$-\frac{1}{8}F_zl$	$a\frac{2l-3a}{l^2}M$	$\frac{1}{4}M$	$-\frac{1}{12}ql^2$	$-\frac{4a^3l-3a^4}{12l^2}q$	$-\frac{11}{192}ql^2$	$-\frac{2q_a+3q_b}{60}l^2$	$-\frac{EI}{h}\alpha_T\Delta T_1$	
Obdélník, průřez: $\Delta T_0 = (\Delta T^d + \Delta T^b)/2$; $\Delta T_1 = \Delta T^d - \Delta T^b$										
(b)										
	$\bar{X}_{a,b}^*$	$-\frac{b}{l}F_x$	$-\frac{1}{2}F_x$	0	0	$-\frac{1}{2}nl$	$-\frac{2al-a^2}{2l}n$	$-\frac{1}{8}nl$	$-\frac{2n_a+n_b}{6}l$	$EA\alpha_T\Delta T_0$
$\bar{Z}_{a,b}^*$	$-b\frac{3l^2-b^2}{2l^3}F_z$	$-\frac{11}{16}F_z$	$-3\frac{l^2-b^2}{2l^3}M$	$-\frac{9M}{8l}$	$-\frac{3M}{2l}$	$-\frac{5}{8}ql$	$-\frac{8al^3-4a^3l+a^4}{8l^3}q$	$-\frac{23}{128}ql$	$-\frac{16q_a+9q_b}{40}l$	$-\frac{3EI}{2hl}\alpha_T\Delta T_1$
$\bar{M}_{a,b}^*$	$ab\frac{l+b}{2l^2}F_z$	$\frac{3}{16}F_zl$	$\frac{l^2-3b^2}{2l^2}M$	$\frac{1}{8}M$	$\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{8}ql^2$	$\frac{(2al-a^2)^2}{8l^2}q$	$\frac{7}{128}ql^2$	$\frac{8q_a+7q_b}{120}l^2$	$\frac{3EI}{2h}\alpha_T\Delta T_1$
$\bar{X}_{b,a}^*$	$-\frac{a}{l}F_x$	$-\frac{1}{2}F_x$	0	0	0	$-\frac{1}{2}nl$	$-\frac{a^2}{2l}n$	$-\frac{3}{8}nl$	$-\frac{n_a+2n_b}{6}l$	$-EA\alpha_T\Delta T_0$
$\bar{Z}_{b,a}^*$	$-a^2\frac{3l-a}{2l^3}F_z$	$-\frac{5}{16}F_z$	$3\frac{l^2-b^2}{2l^3}M$	$\frac{9M}{8l}$	$\frac{3M}{2l}$	$-\frac{3}{8}ql$	$-\frac{4a^3l-a^4}{8l^3}q$	$-\frac{41}{128}ql$	$-\frac{4q_a+11q_b}{40}l$	$\frac{3EI}{2hl}\alpha_T\Delta T_1$
$\bar{M}_{b,a}^*$	0	0	0	0	M	0	0	0	0	0
Obdélník, průřez: $\Delta T_0 = (\Delta T^d + \Delta T^b)/2$; $\Delta T_1 = \Delta T^d - \Delta T^b$										

Tabulka 8.1 Primární lokální vektory koncových sil prutu $\{\bar{R}_{a,b}^*\}$ (pokračování)

(c)	(8.1c/1)	(8.1c/2)	(8.1c/3)	(8.1c/4)	(8.1c/5)	(8.1c/6)	(8.1c/7)	(8.1c/8)	(8.1c/9)	(8.1c/10)	
											
 <p>Obdélník, průřez: $\Delta T_0 = (\Delta T^a + \Delta T^b)/2$; $\Delta T_1 = \Delta T^a - \Delta T^b$</p>	$\bar{X}_{a,b}^*$ $\bar{Z}_{a,b}^*$ $\bar{M}_{a,b}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{b}{l}F_x \\ -b^2\frac{3l-b}{2l^3}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{5}{16}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -3\frac{l^2-a^2}{2l^3}M \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3M}{2l} \\ M \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{3}{8}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l}n \\ -\frac{8al^3-6a^2l^2+a^4}{8l^3}q \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8}nl \\ -\frac{7}{128}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6}l \\ -\frac{11q_a+4q_b}{40}l \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} EA\alpha_T\Delta T_0 \\ \frac{3EI}{2hl}\alpha_T\Delta T_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\bar{X}_{b,a}^*$ $\bar{Z}_{b,a}^*$ $\bar{M}_{b,a}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{a}{l}F_x \\ -a\frac{3l^2-a^2}{2l^3}F_z \\ -ab\frac{l+a}{2l^2}F_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{11}{16}F_z \\ -\frac{3}{16}F_z l \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3\frac{l^2-a^2}{2l^3}M \\ \frac{l^2-3a^2}{2l^2}M \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9M}{8l} \\ \frac{1}{8}M \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3M}{2l} \\ \frac{1}{2}M \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{5}{8}ql \\ -\frac{1}{8}ql^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{a^2}{2l}n \\ -\frac{6a^2l^2-a^4}{8l^3}q \\ -\frac{2a^2l^2-a^4}{8l^2}q \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{8}nl \\ -\frac{57}{128}ql \\ -\frac{9}{128}ql^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{n_a+2n_b}{6}l \\ -\frac{9q_a+16q_b}{40}l \\ -\frac{7q_a+8q_b}{120}l^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -EA\alpha_T\Delta T_0 \\ -\frac{3EI}{2hl}\alpha_T\Delta T_1 \\ -\frac{3EI}{2h}\alpha_T\Delta T_1 \end{bmatrix}$
	$\bar{X}_{a,b}^*$ $\bar{Z}_{a,b}^*$ $\bar{M}_{a,b}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{b}{l}F_x \\ -\frac{b}{l}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{1}{2}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M_1+M_2}{l} \\ M_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{1}{2}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l}n \\ -\frac{2al-a^2}{2l}q \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8}nl \\ -\frac{1}{8}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6}l \\ -\frac{2q_a+q_b}{6}l \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} EA\alpha_T\Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\bar{X}_{b,a}^*$ $\bar{Z}_{b,a}^*$ $\bar{M}_{b,a}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{a}{l}F_x \\ -\frac{a}{l}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{1}{2}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_1+M_2}{l} \\ M_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{1}{2}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{a^2}{2l}n \\ -\frac{a^2}{2l}q \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{8}nl \\ -\frac{3}{8}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{n_a+2n_b}{6}l \\ -\frac{q_a+2q_b}{6}l \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -EA\alpha_T\Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\bar{X}_{a,b}^*$ $\bar{Z}_{a,b}^*$ $\bar{M}_{a,b}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{b}{l}F_x \\ -\frac{b}{l}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{1}{2}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M_1+M_2}{l} \\ M_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{1}{2}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2al-a^2}{2l}n \\ -\frac{2al-a^2}{2l}q \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{8}nl \\ -\frac{1}{8}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{2n_a+n_b}{6}l \\ -\frac{2q_a+q_b}{6}l \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} EA\alpha_T\Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$\bar{X}_{b,a}^*$ $\bar{Z}_{b,a}^*$ $\bar{M}_{b,a}^*$	$\begin{bmatrix} -\frac{a}{l}F_x \\ -\frac{a}{l}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F_x \\ -\frac{1}{2}F_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M_1+M_2}{l} \\ M_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}nl \\ -\frac{1}{2}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{a^2}{2l}n \\ -\frac{a^2}{2l}q \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{3}{8}nl \\ -\frac{3}{8}ql \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{n_a+2n_b}{6}l \\ -\frac{q_a+2q_b}{6}l \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -EA\alpha_T\Delta T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tabulka 8.3 Lokální matice tuhosti prutu $[k_{a,b}^*]$

	<p>(8.3a)</p> $[k_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$		<p>(8.3b)</p> $[k_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	<p>(8.3c)</p> $[k_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$		<p>(8.3d)</p> $[k_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Transformace do globálního souřadnicového systému

- soustava rovnic se sestavuje v globálních souřadnicích
- vektor parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab} = \{u_a, w_a, \varphi_a, u_b, w_b, \varphi_b\}^T$$

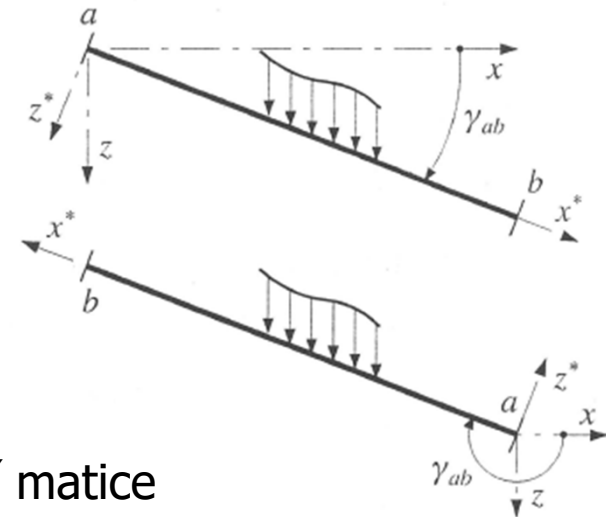
$$\mathbf{r}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{r}_{ab} \quad \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{r}_{ab}^*$$

- vektor celkových koncových sil prutu

$$\mathbf{R}_{ab}^* = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{R}_{ab} \quad \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab}^*$$

- matice tuhosti prutu

$$\mathbf{k}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^T \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{T}_{ab}$$

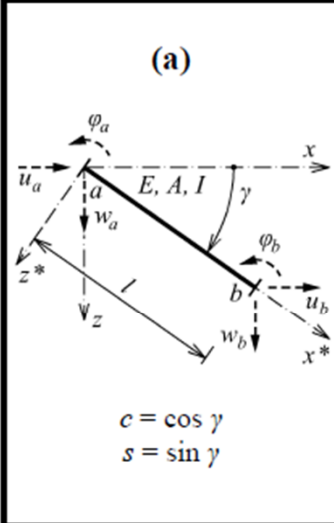


Transformační matice

$$\mathbf{T}_{ab} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

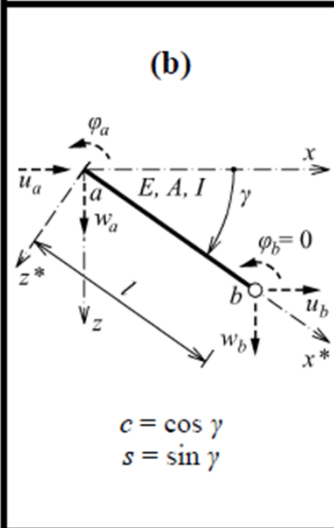
Tabulka 8.2 Globální matice tuhosti prutu $[k_{a,b}]$

(a)	(8.2a)
(b)	(8.2b)



$c = \cos \gamma$
 $s = \sin \gamma$

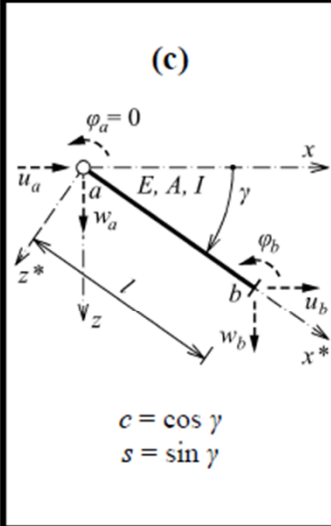
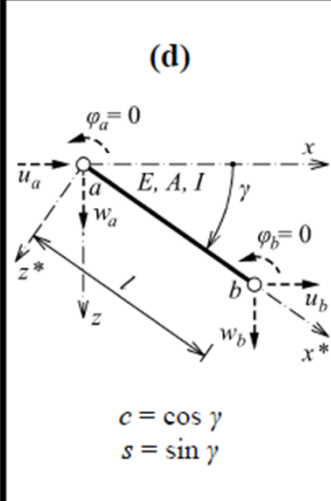
$$[k_{a,b}] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{6EI}{l^2} s & -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{6EI}{l^2} s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 & -\frac{6EI}{l^2} c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & -\frac{6EI}{l^2} c \\ \frac{6EI}{l^2} s & -\frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} \\ -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 \right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\frac{6EI}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{12EI}{l^3} s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\frac{6EI}{l^2} s \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{6EI}{l^2} c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{12EI}{l^3} c^2 & \frac{6EI}{l^2} c \\ \frac{6EI}{l^2} s & -\frac{6EI}{l^2} c & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} s & \frac{6EI}{l^2} c & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$



$c = \cos \gamma$
 $s = \sin \gamma$

$$[k_{a,b}] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a & u_b & w_b & \varphi_b \\ \left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 \right) & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & \frac{3EI}{l^2} s & -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 \right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & -\frac{3EI}{l^2} c & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 \right) & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} s & -\frac{3EI}{l^2} c & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} s & \frac{3EI}{l^2} c & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 \right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & -\frac{3EI}{l^2} s & \frac{EA}{l} c^2 + \frac{3EI}{l^3} s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & -\left(\frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 \right) & \frac{3EI}{l^2} c & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) cs & \frac{EA}{l} s^2 + \frac{3EI}{l^3} c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabulka 8.2 Globální matice tuhosti prutu $[k_{a,b}]$ (pokračování)

<p>(c)</p>  <p>$c = \cos \gamma$ $s = \sin \gamma$</p>	<p>(8.2c)</p> $[k_{a,b}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_a & w_a & \varphi_a \end{matrix} & \begin{matrix} u_b & w_b & \varphi_b \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{3EI}{l^2}s \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & -\frac{3EI}{l^2}c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2\right) & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & 0 & \frac{EA}{l}c^2 + \frac{3EI}{l^3}s^2 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\frac{3EI}{l^2}s \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & -\left(\frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2\right) & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2 + \frac{3EI}{l^3}c^2 & \frac{3EI}{l^2}c \\ \frac{3EI}{l^2}s & -\frac{3EI}{l^2}c & 0 & -\frac{3EI}{l^2}s & \frac{3EI}{l^2}c & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \end{matrix}$
<p>(d)</p>  <p>$c = \cos \gamma$ $s = \sin \gamma$</p>	<p>(8.2d)</p> $[k_{a,b}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_a & w_a & \varphi_a \end{matrix} & \begin{matrix} u_b & w_b & \varphi_b \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{l}c^2 & \frac{EA}{l}cs & 0 & -\frac{EA}{l}c^2 & -\frac{EA}{l}cs & 0 \\ \frac{EA}{l}cs & \frac{EA}{l}s^2 & 0 & -\frac{EA}{l}cs & -\frac{EA}{l}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l}c^2 & -\frac{EA}{l}cs & 0 & \frac{EA}{l}c^2 & \frac{EA}{l}cs & 0 \\ -\frac{EA}{l}cs & -\frac{EA}{l}s^2 & 0 & \frac{EA}{l}cs & \frac{EA}{l}s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$