VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

BDA016 Stavební mechanika 2
8. přednáška

- Podstata deformační metody a její varianty

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

STATICKY NEURČITÉ KONSTRUKCE

Hlavní rozdíly mezi **silovou** (SM) a **deformační** metodou (DM)

Primární veličiny, které jsou předmětem řešení (neznámé veličiny v soustavě rovnic) jsou:

- **SM – silové účinky** (reakce nebo složky vnitřních sil)
- **DM – deformace styčníků**

Soustavu rovnic tvoří:

- **SM – deformační podmínky** (deformace původní konstrukce a staticky určité základní soustavy jsou stejné)
- **DM – podmínky rovnováhy** na uvolněných styčnících

Počet neznámých – velikost soustavy rovnic:

- **SM – stupeň statické neurčitosti** n_s
- **DM – stupeň přetvárné neurčitosti** n_p – závisí na zvoleném modelu

Postup řešení:

1. vytvoří se **výpočtový model** řešené konstrukce – rozdělení konstrukce na **styčníky** (uzly) a připojené **pruty**
2. řešení probíhá na deformované konstrukci – **nositelem deformace** jsou primárně **styčníky** → počet **neznámých parametrů deformace** n_p styčníků představuje počet neznámých v řešené úloze
3. styčníky se uvolní z konstrukce a sestaví se pro ně **statické podmínky rovnováhy** – styčníkové rovnice (soustava rovnic)
4. na styčníky působí **styčníkové zatížení S** a **koncové síly R** připojených prutů (důsledek zatížení prutů a deformace styčníků), v každém styčníku pak platí rovnováha:

$$\mathbf{S} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

DEFORMAČNÍ METODA

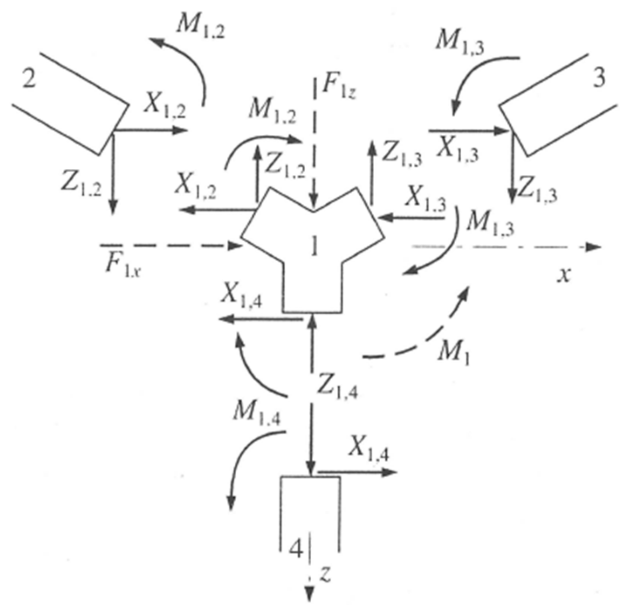
Rovnováha ve styčníku

$$\sum F_{ix,1} = 0;\ \boxed{F_{1x}} - \boxed{X_{1,2} - X_{1,3} - X_{1,4}} = 0$$

$$\sum F_{iz,1} = 0;\ \boxed{F_{1z}} - \boxed{Z_{1,2} - Z_{1,3} - Z_{1,4}} = 0$$

$$\sum M_{i,1} = 0;\ \boxed{M_{1}} - \boxed{M_{1,2} - M_{1,3} - M_{1,4}} = 0$$

$$\mathbf{S} \quad - \quad \mathbf{R} \quad = \mathbf{0}$$



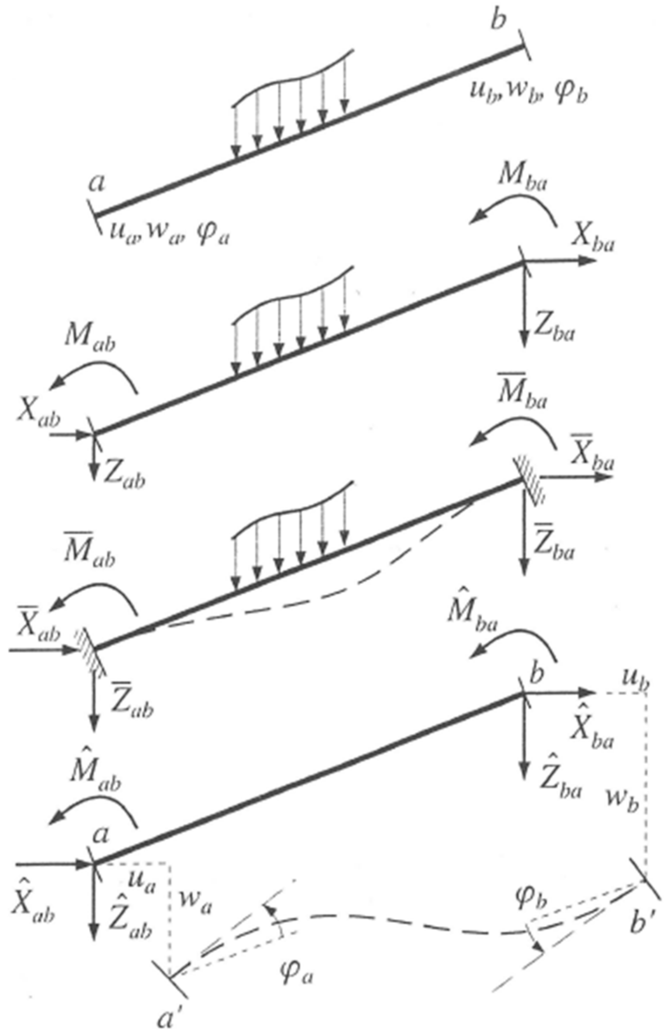
5. **koncové síly R** se skládají ze dvou částí:
   - **primární** $\overline{\mathrm{R}}$
   - **sekundární** $\widehat{\mathrm{R}}$
   - **celkové** $\mathrm{R} = \overline{\mathrm{R}} + \widehat{\mathrm{R}}$

DEFORMAČNÍ METODA

6. **primární koncové síly $\overline{\mathbf{R}}$**
   jsou vyvolané zatížením nedeformovaných prutů
   - hodnoty se získají analýzou jednotlivých prutů

7. **sekundární koncové síly $\hat{\mathbf{R}}$**
   jsou vyvolané jen a pouze deformacemi **r** styčníků
   - nejsou předem známé – jsou předmětem řešení a v soustavě rovnic vystupují jako neznámé
   - jejich velikost závisí na tuhostních součinitelích **k**

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$



8. **statické podmínky rovnováhy –** soustava rovnic :

$$\mathbf{S} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S} - \left(\overline{\mathbf{R}} + \widehat{\mathbf{R}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S} - \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{S} - \overline{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{r}$$

9. ze známých deformací **styčníků r** se dopočítají **sekundární** a následně i **celkové koncové síly**

10. dopočítají se a vykreslí **průběhy vnitřních sil**

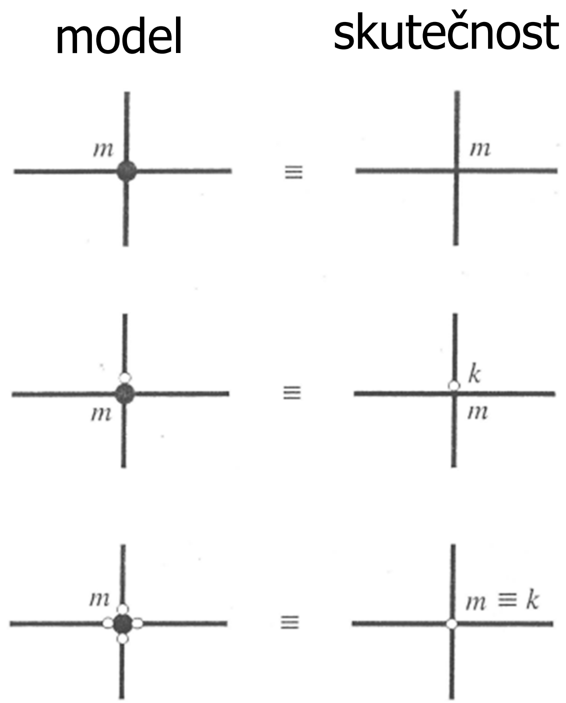
DM – VÝPOČTOVÝ MODEL

výpočtový model se skládá z:

- idealizovaných prutů – střednice (osa) prutu a jí přiřazené průřezové charakteristiky a materiálové vlastnosti
- idealizovaných styčníků – místo vzájemného spojení jednotlivých prutů
- idealizovaných vnějších vazeb
- idealizovaného zatížení

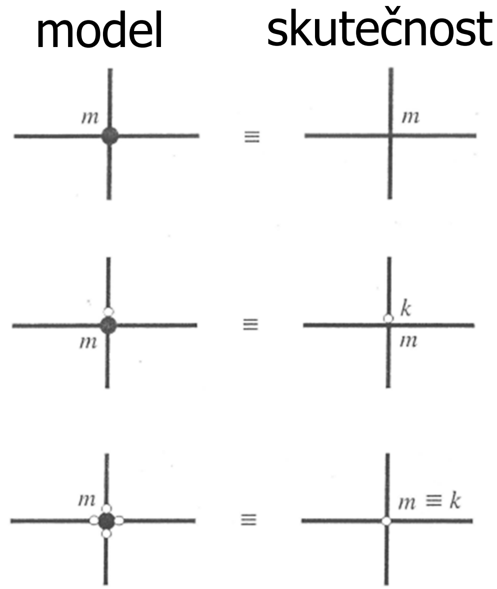
styčník (uzel) – teoretický průsečík os prutů, ve kterém si můžeme představit hmotný bod, ke kterému jsou konce prutu připojeny:

- monoliticky
- kloubově

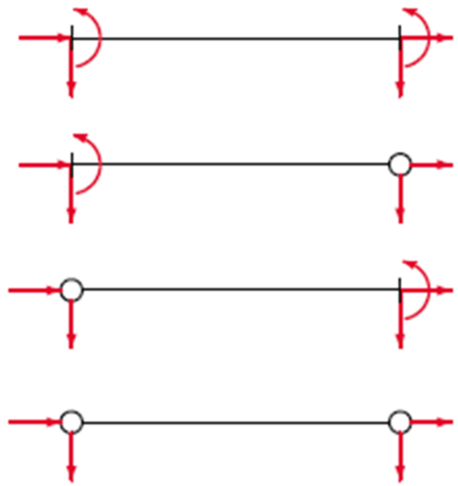


DM – VÝPOČTOVÝ MODEL

podle typu **připojení prutů do styčníku** rozlišujeme:



- **monolitický** (tuhý, rámový) styčník
  – alespoň dva pruty jsou připojeny monoliticky
- **monolitický** styčník
  s kloubově připojeným prutem
- **kloubový** styčník
  – všechny pruty jsou připojeny kloubově

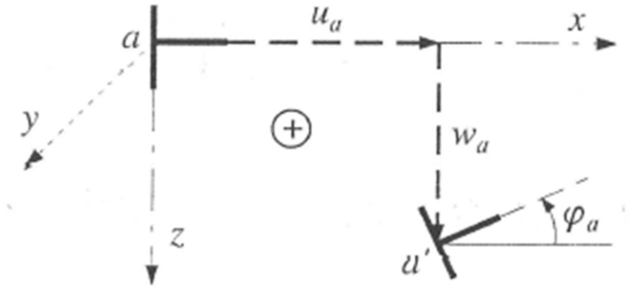


- **oboustranně monoliticky** připojený (vetknutý) prut V–V
- **jednostranně monoliticky** připojený (vetknutý) prut V–K, K–V
- **oboustranně kloubově** připojený prut K–K

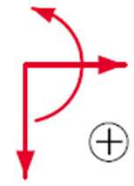
DM – VÝPOČTOVÝ MODEL

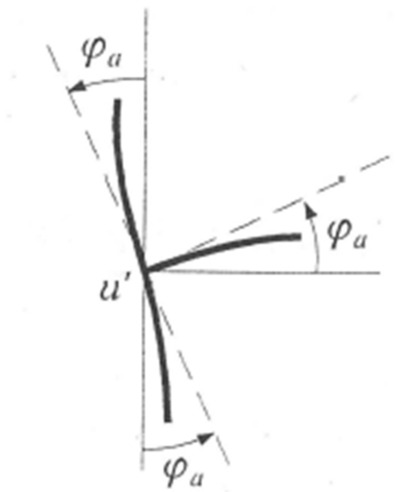
volný (nepodepřený) **styčník** může při deformaci rovinné prutové soustavy vykonat **3 složky přemístění**:

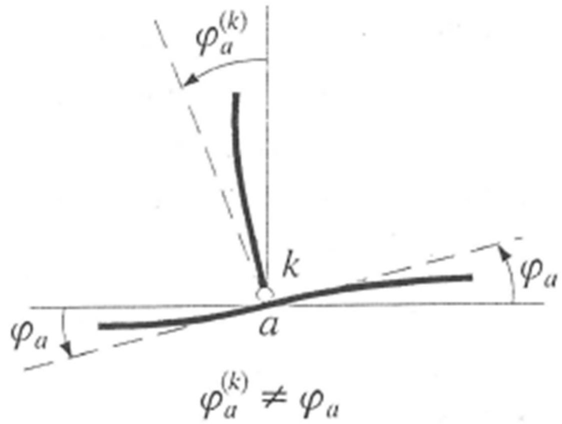
- **vodorovný posun u_a**
- **svislý posun w_a**
- **pootočení φ_a**

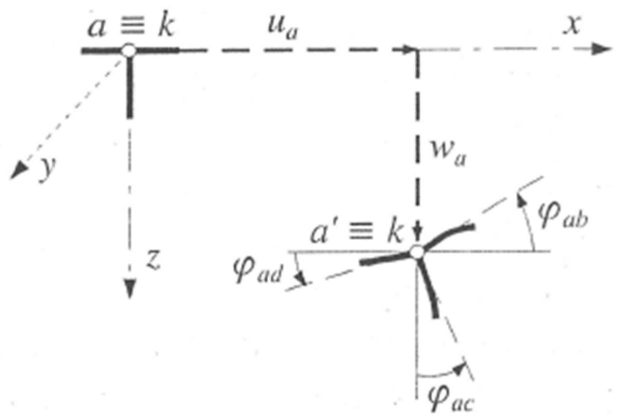


kladná konvence





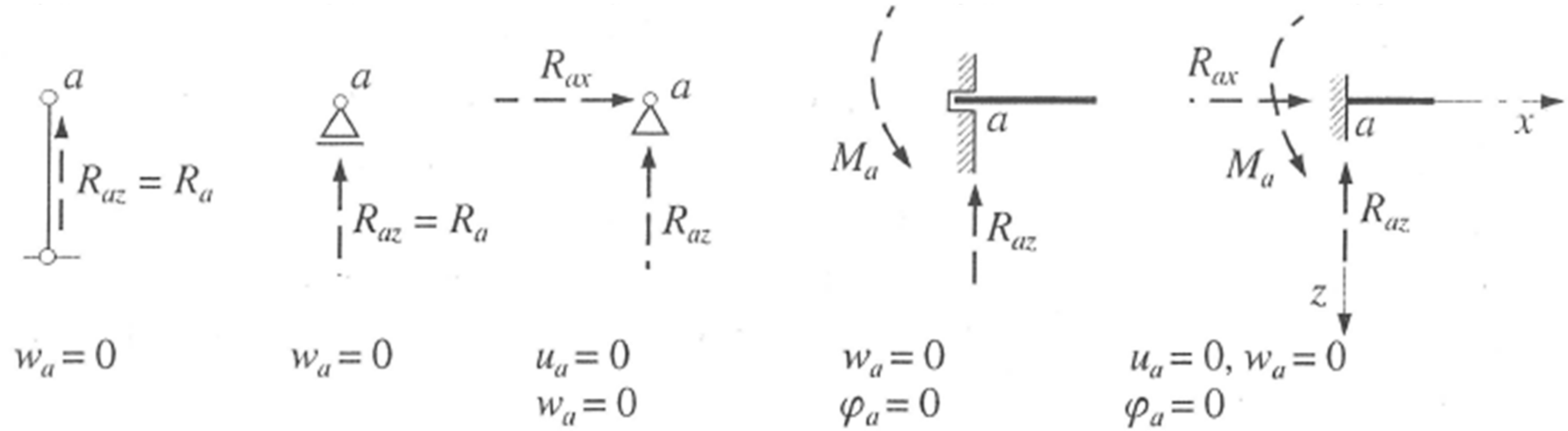




DM – VÝPOČTOVÝ MODEL

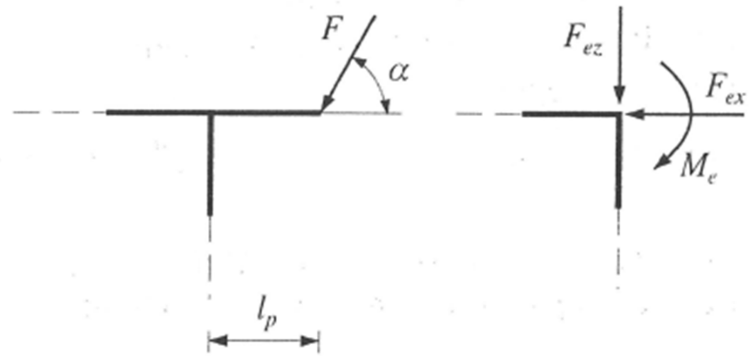
vnější vazby – podepření styčníků

- stupně volnosti styčníků odebrané vazbami



převislý konec

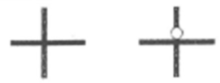
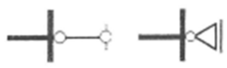
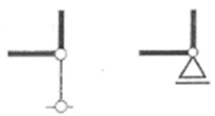
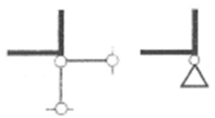
- lze odstranit s ekvivalentní náhradou
- modelovat (2 varianty: V–V, V–K)



DM – VÝPOČTOVÝ MODEL

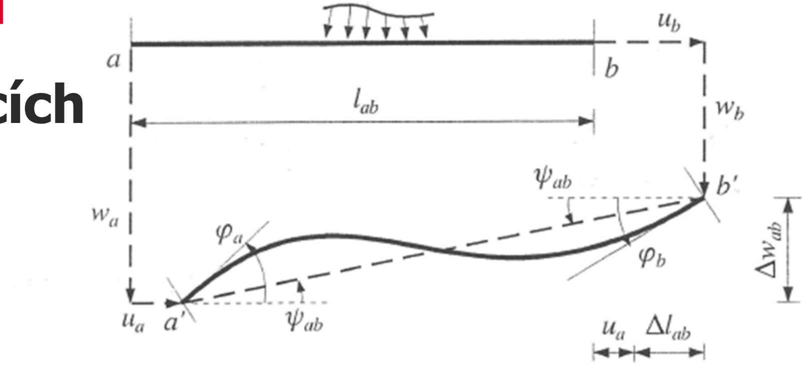
příklady styčníků

- neznámé parametry deformace

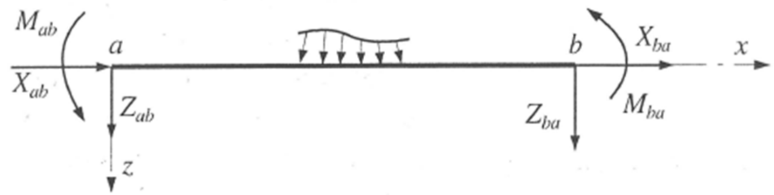
Případ připojení	Schéma připojení	Popis připojení	Neznámé parametry deformace	
			počet	druh
1		monolitický styčník	3	u, w, φ
2		kloubový styčník	2	u, w
3		monolitický styčník podepřený kyvným prutem	2	w, φ
4		kloubový styčník podepřený kyvným prutem	1	u
5		monolitický styčník podepřený pevným kloubem	1	φ
6		monolitický styčník vetknutý	0	–
7		vetknutí	0	–
8		* neposuvný kloub	1: 1	φ
			2: 0	–
9		* posuvný kloub	1: 2	u, φ
			2: 1	u

VARIANTY DEFORMAČNÍ METODY

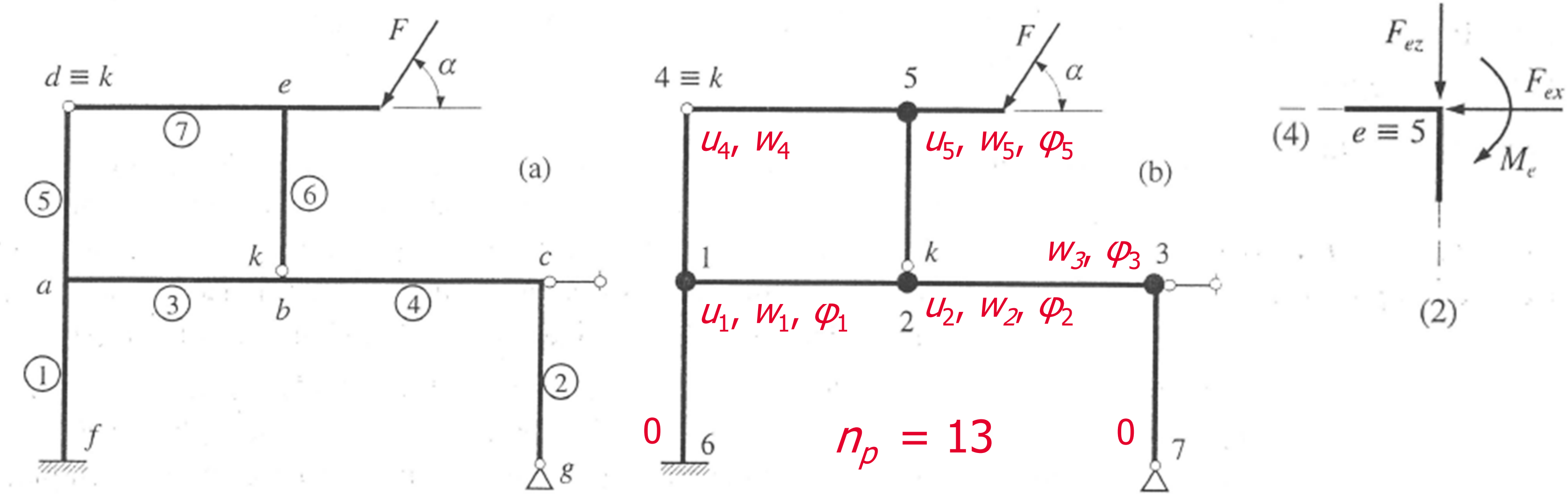
obecná deformační metoda – ODM



- **zanedbává** velmi malý **vliv posouvajících sil** na deformaci prutové soustavy
- počítá se změnou délky prutu způsobenou normálovými silami
- na tvar ohybové čáry prutu má vliv:
  - zatížení prutu (primární vliv)
  - pružná přemístění (sekundární vliv)
    - styčníková pootočení φ_a, φ_b
    - vzájemné posunutí styčníků ve směru střednice prutu $\Delta u_{ab} (\Delta l_{ab})$
    - vzájemné posunutí styčníků ve směru kolmém na původní střednici prutu $\Delta w_{ab} \rightarrow$ prutové pootočení Ψ_{ab}
- deformace prutu vyvolá koncové síly (akce styčníků na konce prutu)
- konce prutu působí na styčníky stejně velkými silami opačného smyslu



celkový **počet nezávislých přemístění styčníků (parametrů deformace)** prutové soustavy udává **stupeň přetvárné neurčitosti n_p**



stupeň přetvárné neurčitosti **závisí** na zvoleném **výpočtovém modelu**, vždy existuje varianta s **minimálním n_p**

ODM – STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

lze stanovit i podle vztahu:

$$\boldsymbol{n_p = 3t + 2k + p - p_v}$$

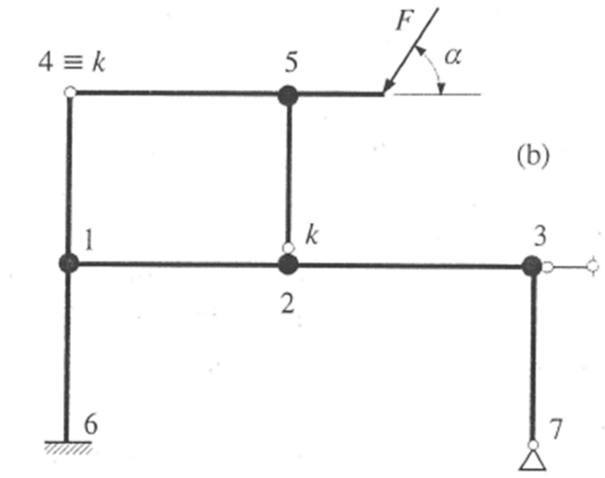
t – počet monolitický styčníků

k – počet kloubových styčníků

p – počet kyvných prutů a posuvných kloubových podpor na koncích prutů

p_v – počet vnějších vazeb vnitřních styčníků

$$\boldsymbol{n_p = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 - 1 = 13}$$



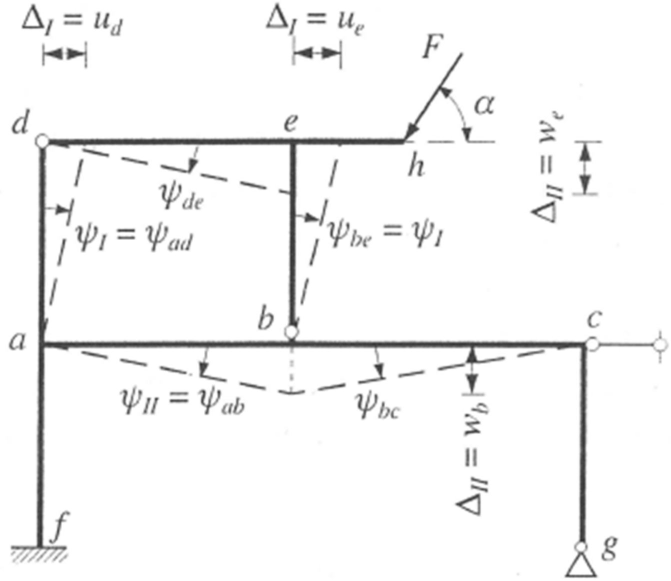
Stupeň statické neurčitosti

$$n_s = r - m = (6 + 4) - (3 \cdot 2) = 4$$

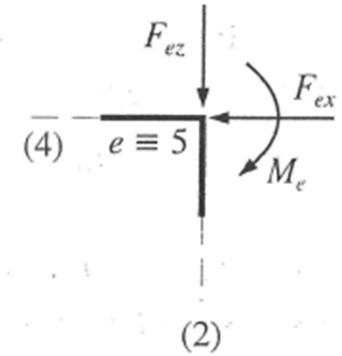
$$n_s = 3u - p_k + (a - 3) = 3 \cdot 1 - (2 \cdot 1) + (6 - 3) = 4$$

VARIANTY DEFORMAČNÍ METODY

zjednodušená deformační metoda – ZDM



- **zanedbává** nejen **vliv posouvajících sil**, ale také **vliv normálových sil** na deformaci prutové soustavy (pruty jsou nestlačitelné $EA \rightarrow \infty$)
- přetvoření každého prutu rovinné soustavy je způsobeno pouze ohybovými momenty
- nepočítá se změnou délky prutu způsobenou normálovými silami, výjimkou je změna délky způsobená teplotou
- staticky určité části se ekvivalentně nahradí
- kloubově připojené pruty se respektují



zjednodušená deformační metoda – ZDM

- monolitický styčník – nezávislé pootočení φ (momentová podmínka)
- nezávislý posun části rámu – prutová výchylka ψ (součtová podmínka)

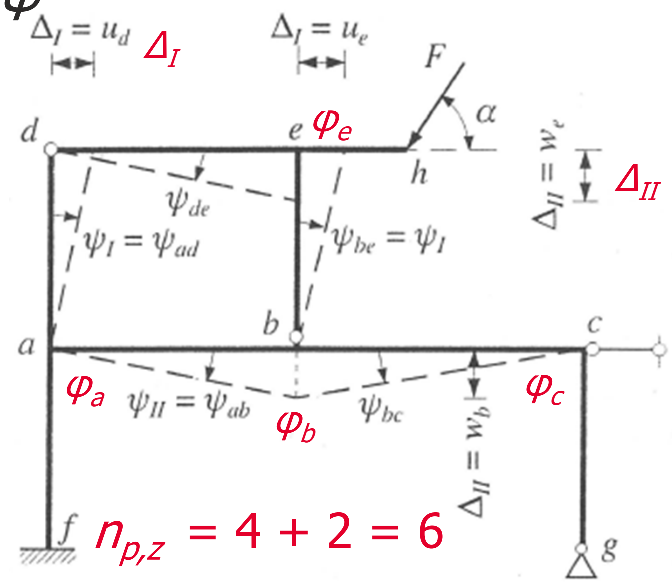
→ podstatné snížení počtu neznámých styčníkových posunutí

$u_a = u_b = u_c = 0;\ w_a = w_c = w_d = 0$

$u_d = u_e = \Delta_I;\ w_b = w_e = \Delta_{II}$

4 nezávislá styčníková pootočení

2 nezávislé posuny (prutová pootočení)

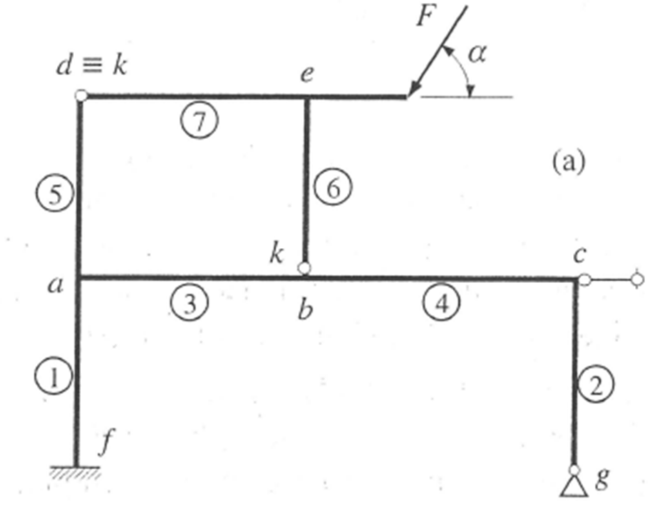


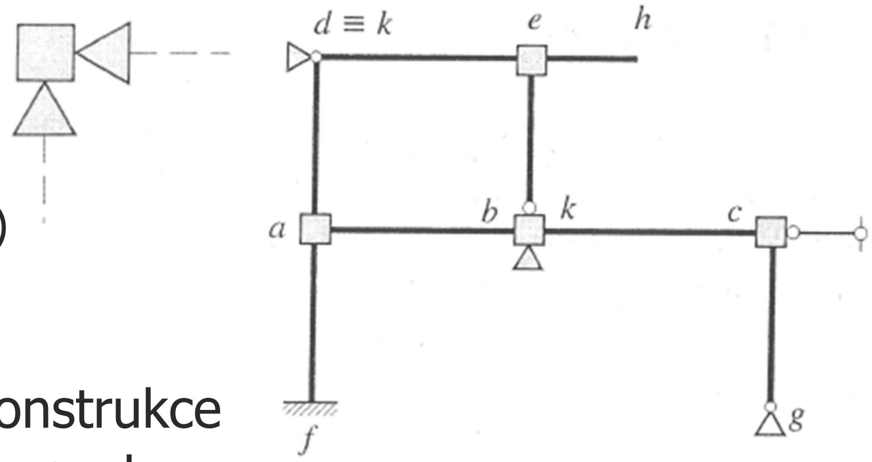
celkový **počet nezávislých přemístění styčníků** prutové soustavy udává **stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,z}$**

ZDM – STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

Základní deformačně určitá soustava

- základní prvek – deformačně určitý oboustranně vetknutý nosník, **všechny** složky **přemístění** koncových průřezů **jsou nulové**
- všechny **monolitické styčníky** jsou upevněny **fiktivními** dodatečně vloženými **vazbami**
  - **fiktivní momentová vazba** – zamezí potočení
  - **fiktivní silová vazba** – zabránění posunu (i kloubové styčníky)





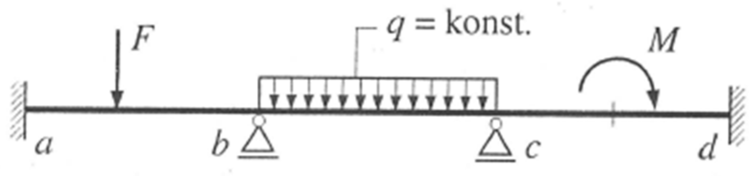
Stupeň přetvárné neurčitosti $n_{p,z}$

= počet fiktivních vazeb vložených do konstrukce pro získání základní deformačně určité soustavy

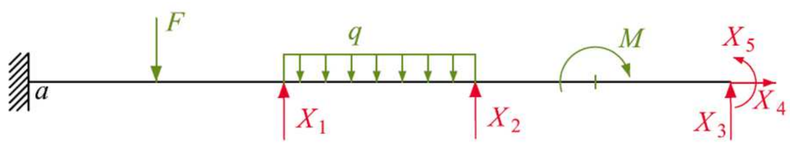
$n_{p,z} = 4 + 2 = 6$

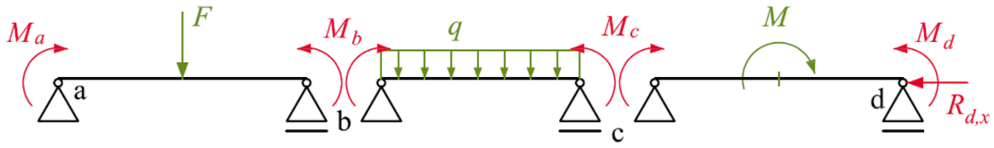
STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

Na dané prutové konstrukci určete stupeň statické a přetvárné neurčitosti. Vykreslete základní staticky a deformačně určitou soustavu.



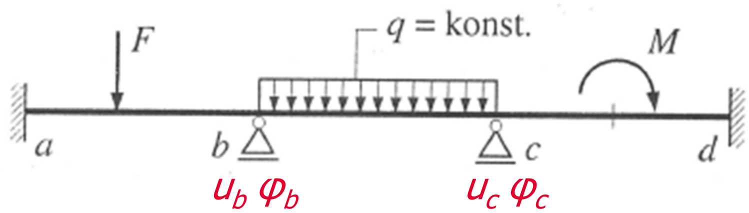
$$n_s = r - m = 8 - 3 = 5$$



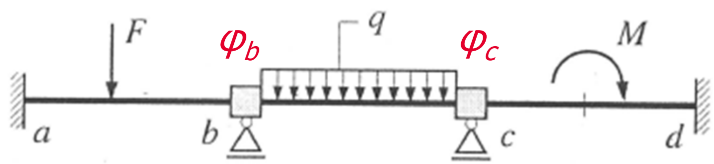


$$n_p = 3t + 2k + p - p_v =$$

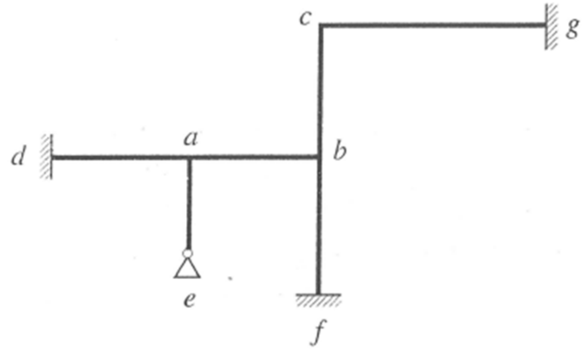
$$n_p = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 1 = 4$$

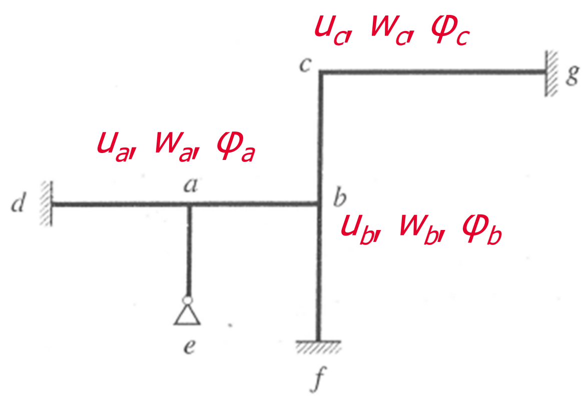


$$n_{p,z} = 2$$



Na dané prutové konstrukci určete stupeň statické a přetvárné neurčitosti. Vykreslete základní staticky a deformačně určitou soustavu.

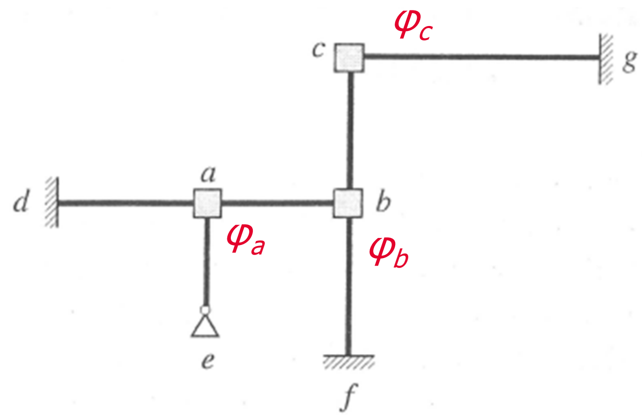




$$n_s = r - m = 11 - 3 = 8$$

$$n_p = 3t + 2k + p - p_v =$$

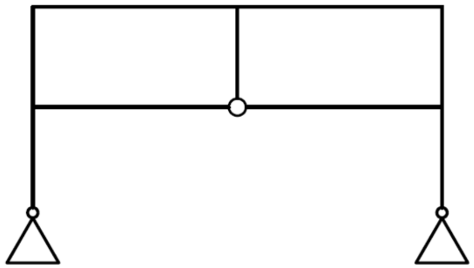
$$n_p = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 9$$

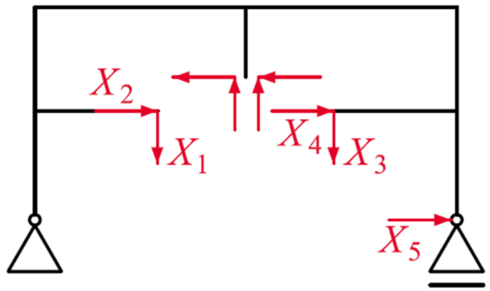


$$n_{p,z} = 3$$

STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

Na dané prutové konstrukci určete stupeň statické a přetvárné neurčitosti. Vykreslete základní staticky a deformačně určitou soustavu.



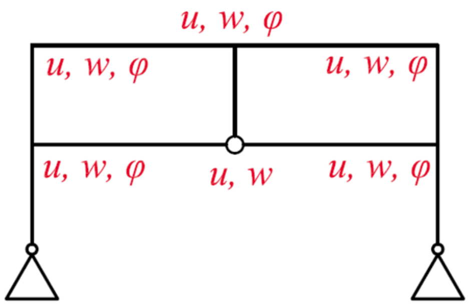


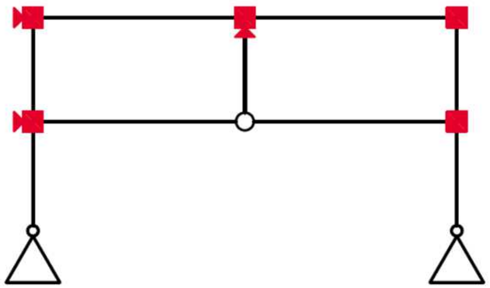
$n_s = r - m = 7 - 3 = 4$

$n_s = 3u - p_k + (a - 3) = 3 \cdot 2 - 2 + (4 - 3) = 5$

$n_p = 3t + 2k + p - p_v =$

$n_p = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 0 - 0 = 17$

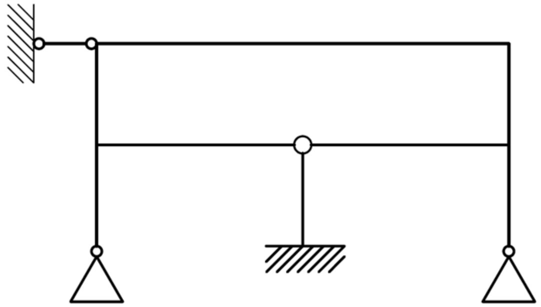


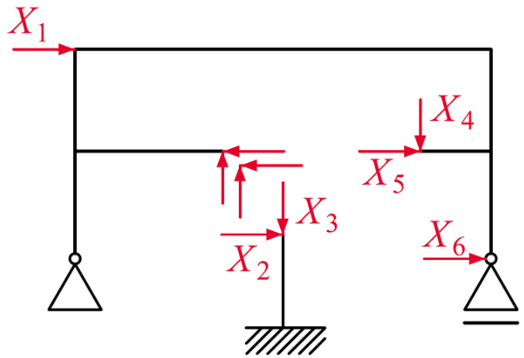


$n_{p,z} = 5 + 3 = 8$

STUPEŇ PŘETVÁRNÉ NEURČITOSTI

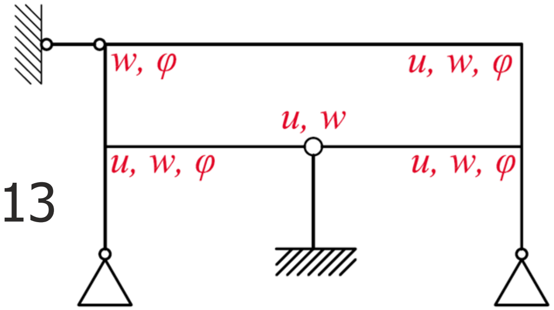
Na dané prutové konstrukci určete stupeň statické a přetvárné neurčitosti. Vykreslete základní staticky a deformačně určitou soustavu.

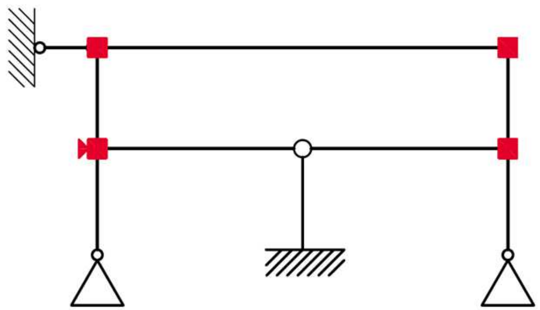




$$n_s = r - m = 12 - 6 = 6$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3) = 3 \cdot 1 - 2 + (8 - 3) = 6$$





$$n_p = 3t + 2k + p - p_v =$$

$$n_p = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 - 1 = 13$$

$$n_{p,z} = 4 + 1 = 5$$