BDA016 Stavební mechanika 2
5. přednáška

- Spojitý nosník řešený metodou třímomentových rovnic
- Silové i deformační zatížení
- Využití tvarové symetrie

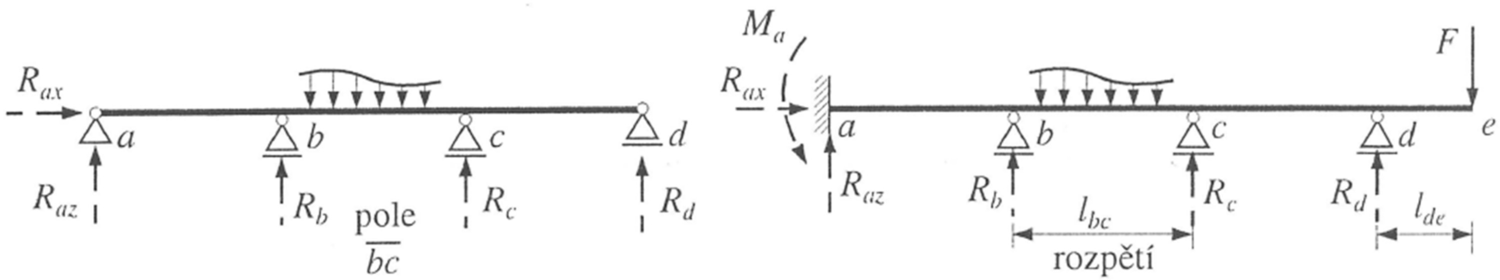
doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

SILOVÁ METODA – SPOJITÝ NOSNÍK

Spojitý nosník

- přímý nosník uložený na více než dvou podporách
- 1 podpora pevná (pevný kloub nebo vetknutí) a ostatní posuvné
- mezi podporami bez vnitřních kloubů



Stupeň statické neurčitosti

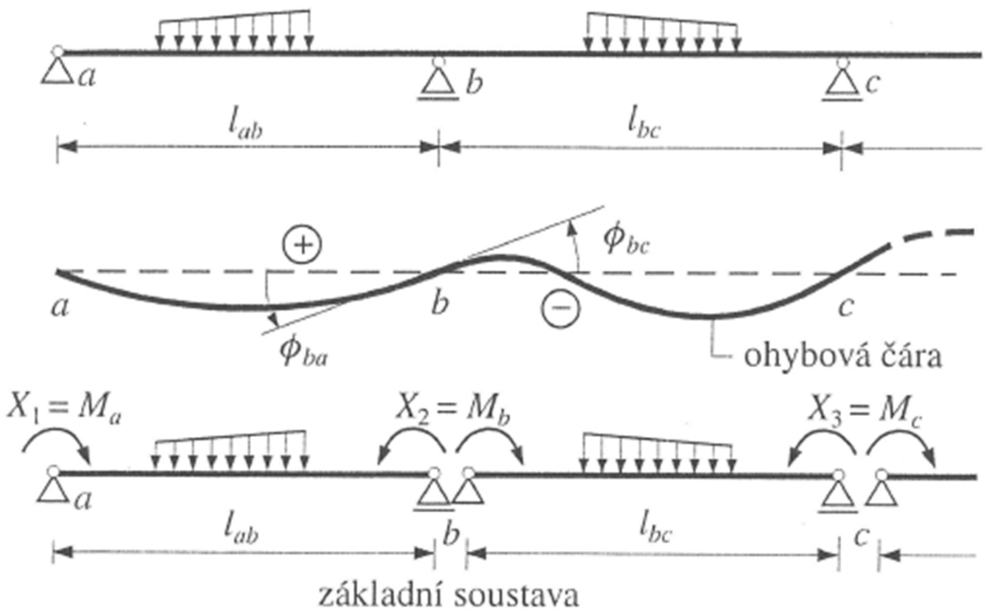
- $n_s = 3u - p_k + (a - 3) = a - 3$
- $n_s = r - m$

METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

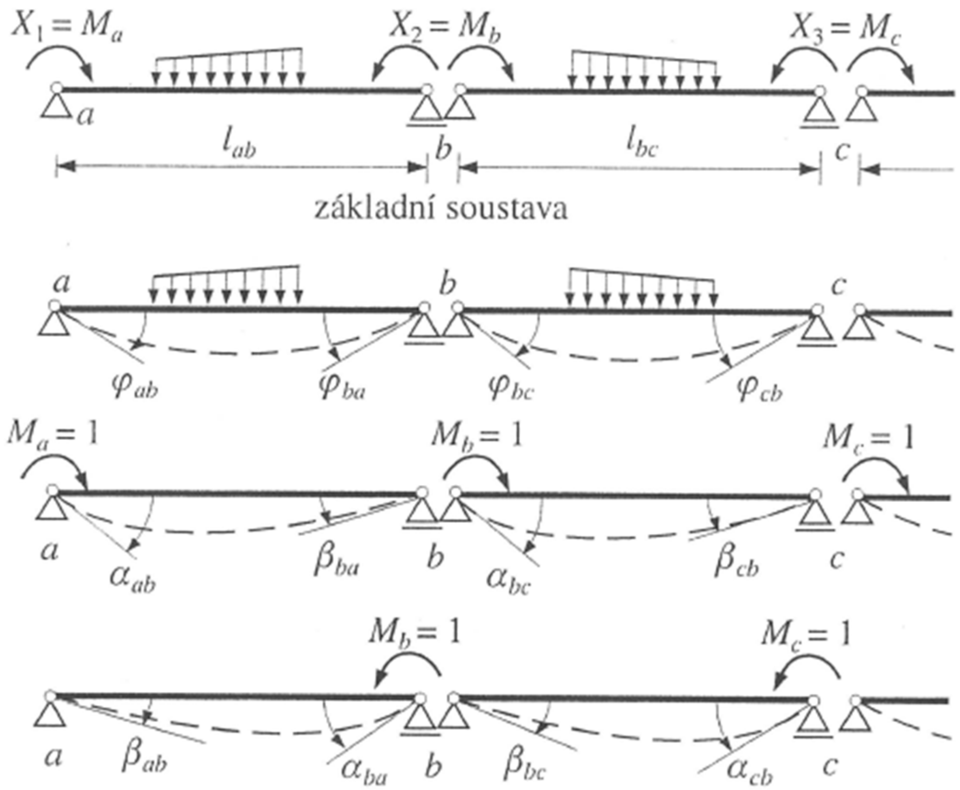
Metoda třímomentových rovnic = silová metoda

- **ohybová čára** spojitého nosníku je od libovolného zatížení **spojitá**
- **základní soustava – soustava prostých nosníků**
- **staticky neurčité veličiny** jsou **podporové momenty**
- **deformační podmínka**

$$\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}$$



METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



Deformační podmínka

$$\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}$$

Princip superpozice

$$\Phi_{ba} = \varphi_{ba} + M_a \cdot \beta_{ba} + M_b \cdot \alpha_{ba}$$
$$\Phi_{bc} = \varphi_{bc} + M_b \cdot \alpha_{bc} + M_c \cdot \beta_{bc}$$

Třímomentová rovnice

$$\boldsymbol{M_a \cdot \beta_{ba} + M_b(\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) +}$$
$$\boldsymbol{+ M_c \cdot \beta_{bc} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0}$$

nosník konstantního průřezu

$\alpha = \dfrac{l}{3EI}$; $\beta = \dfrac{l}{6EI}$ – základní deformační úhly prostého nosníku

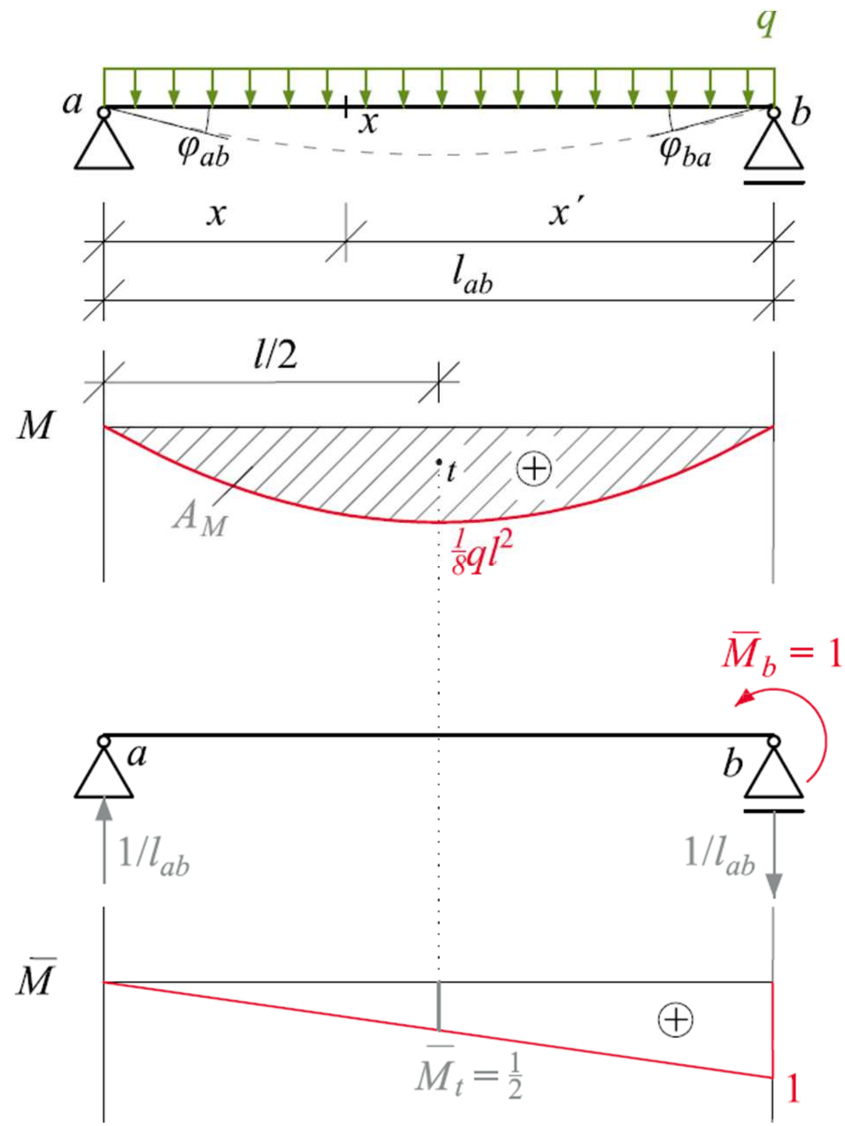
Potočení od daného zatížení

např. rovnoměrně spojité zatížení

$$\varphi_{ba} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\bar{M}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}A_M \cdot \overline{M_t}$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\cdot l \cdot \frac{1}{8}ql^2\right)\cdot\frac{1}{2} \rightarrow$$

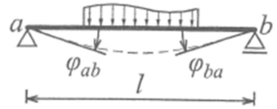
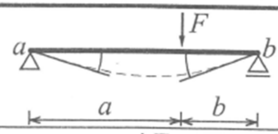
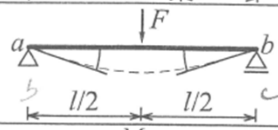
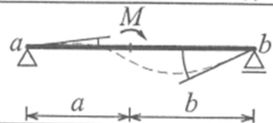
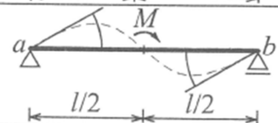
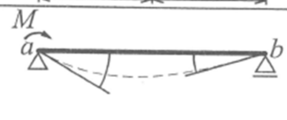
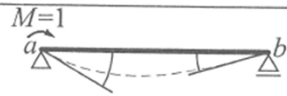
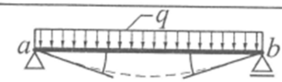
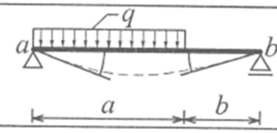
$$\boldsymbol{\varphi_{ba}} = \frac{\boldsymbol{ql^3}}{\boldsymbol{24EI}}$$



TABULKY

Pootočení prostého nosníku konstantní ohybové tuhosti

$$\varphi = \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}}{EI}\,\mathrm{d}x$$

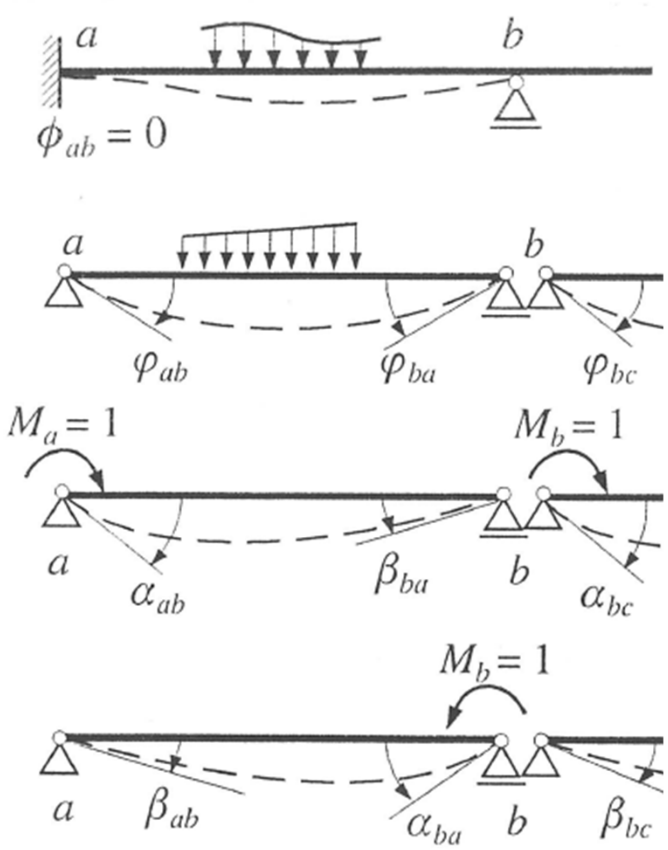
Pootočení φ_{ab} podporového průřezu a		Pootočení φ_{ba} podporového průřezu b
$\varphi^F_{ab} = \frac{1}{6}\frac{F}{EI}\frac{ab}{l}(l+b)$ (5.8a)		$\varphi^F_{ba} = \frac{1}{6}\frac{F}{EI}\frac{ab}{l}(l+a)$ (5.8b)
$\varphi^F_{ab} = \frac{1}{16}\frac{F}{EI}l^2$ (5.9a)		$\varphi^F_{ba} = \frac{1}{16}\frac{F}{EI}l^2$ (5.9b)
$\varphi^M_{ab} = -\frac{1}{6}\frac{M}{EI}\frac{1}{l}(l^2-3b^2)$ (5.10a)		$\varphi^M_{ba} = \frac{1}{6}\frac{M}{EI}\frac{1}{l}(l^2-3a^2)$ (5.10b)
$\varphi^M_{ab} = -\frac{1}{24}\frac{M}{EI}l$ (5.11a)		$\varphi^M_{ba} = \frac{1}{24}\frac{M}{EI}l$ (5.11b)
$\varphi^M_{ab} = \frac{1}{3}\frac{M}{EI}l$ (5.12a)		$\varphi^M_{ba} = \frac{1}{6}\frac{M}{EI}l$ (5.12b)
$\boldsymbol{\alpha_{ab} = \frac{1}{3}\frac{l}{EI}}$ **(5.13a)**		$\boldsymbol{\beta_{ba} = \frac{1}{6}\frac{l}{EI}}$ **(5.13b)**
$\varphi^q_{ab} = \frac{1}{24}\frac{q}{EI}l^3$ (5.14a)		$\varphi^q_{ba} = \frac{1}{24}\frac{q}{EI}l^3$ (5.14b)
$\varphi^q_{ab} = \frac{1}{24}\frac{q}{EI}\frac{a^2}{l}(2l-a)^2$ (5.15a)		$\varphi^q_{ba} = \frac{1}{24}\frac{q}{EI}\frac{a^2}{l}(2l^2-a^2)$ (5.15b)

METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

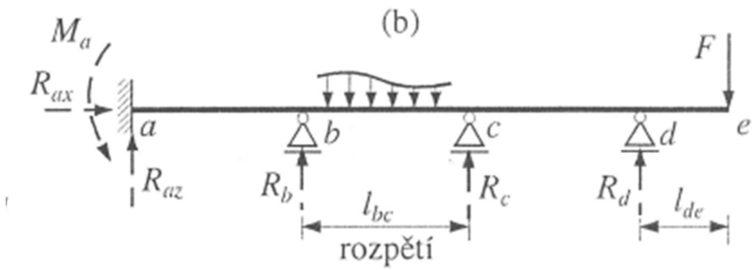
Vetknutý konec spojitého nosníku

$$\Phi_{ab} = 0$$

$$\Phi_{ab} = \varphi_{ab} + M_a \cdot \alpha_{ab} + M_b \cdot \beta_{ab} = 0$$



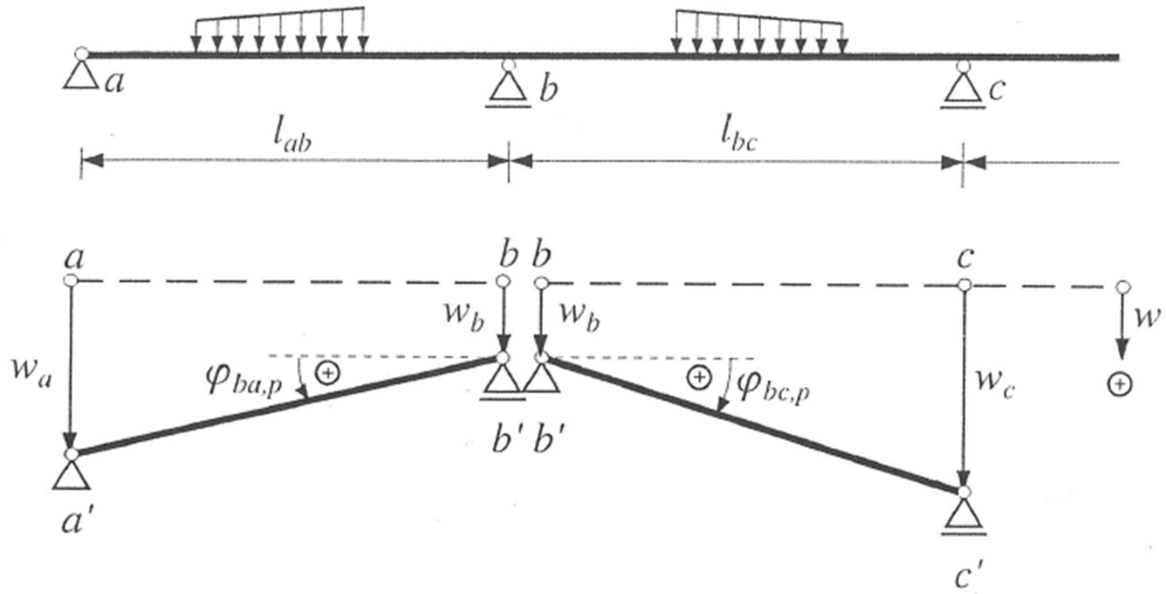
Spojitý nosník s převislým koncem



$$M_d = -F \cdot l_{de}$$

METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

Vliv daného popuštění podpor



$$\varphi_{ba,p} \approx \operatorname{tg}\varphi_{ba,p} = \frac{w_a - w_b}{l_{ab}}$$

$$\varphi_{bc,p} \approx \operatorname{tg}\varphi_{ba,p} = \frac{w_c - w_b}{l_{bc}}$$

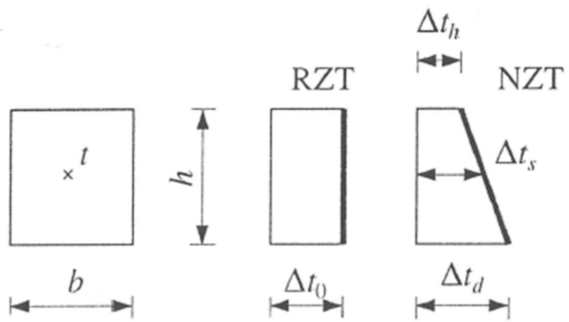
Vliv nerovnoměrné změny teploty

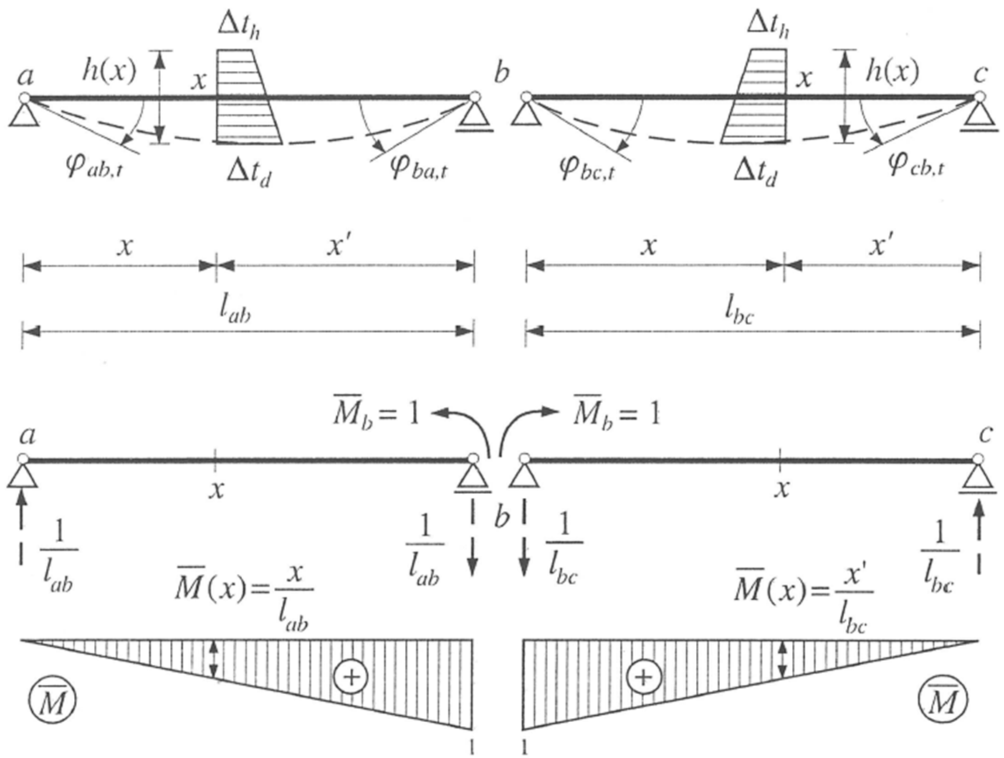
$$\varphi_{ba,t} = \int_0^{l_{ab}} \overline{M}\,(x)\,\frac{\alpha_t \cdot \Delta T(x)}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h}\int_0^{l_{ab}} \overline{M}\,(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T}{h} \cdot A_{\overline{M}}$$

$$\varphi_{ba,t} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T \cdot l_{ab}}{2h}$$

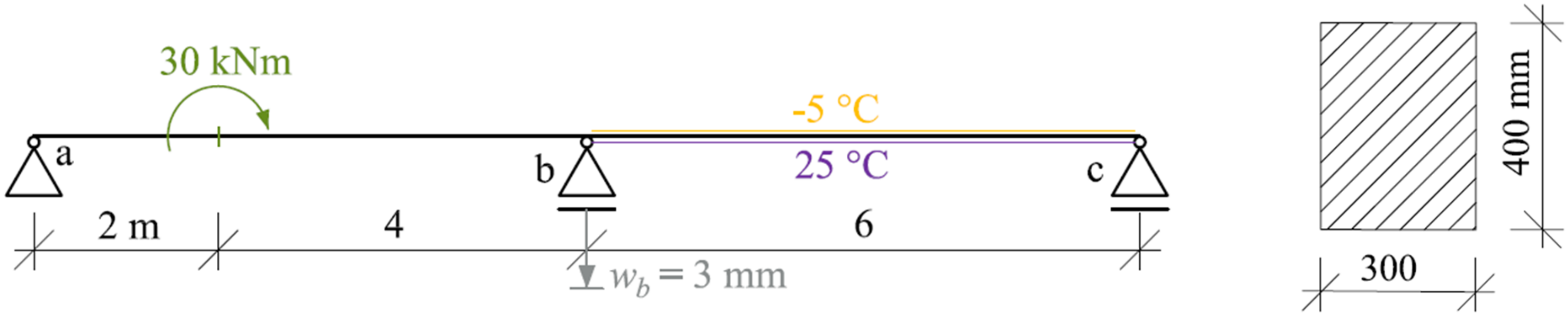
$$\varphi_{bc,t} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T \cdot l_{bc}}{2h}$$

$$\Delta T = \Delta t_d - \Delta t_h$$





Na dané konstrukci pomocí metody třímomentových rovnic vykreslete průběhy vnitřních sil.



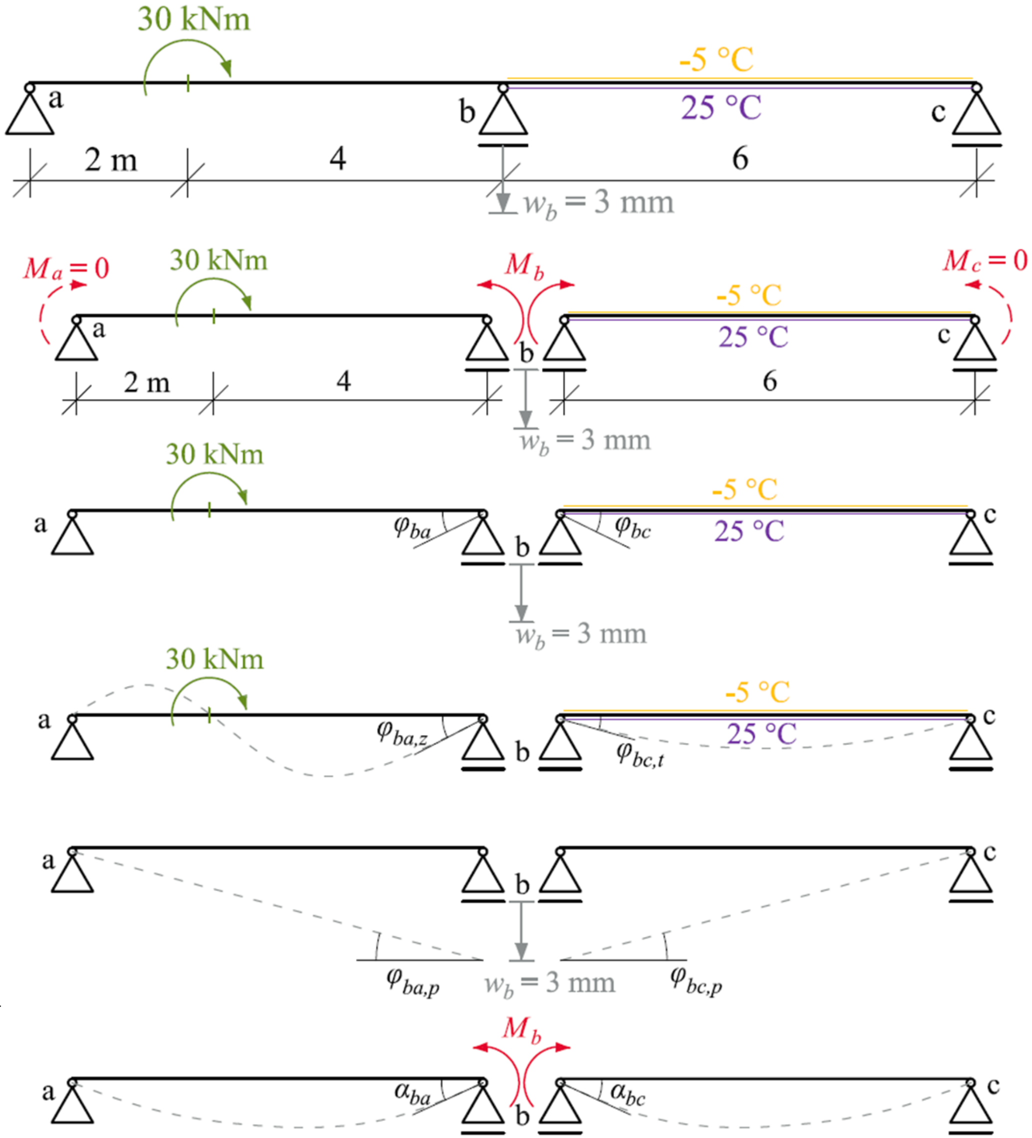
$E = 30$ GPa

$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5}\ °\mathrm{C}^{-1}$

$$I = \frac{1}{12} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4^3 = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^4$$

$$EI = 48 \cdot 10^6 \mathrm{Nm}^2$$

METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



$n_s = 4 - 3 = 1$

Deformační podmínka

$\Phi_{ba} = -\Phi_{bc}$

Princip superpozice

$\Phi_{ba} = \varphi_{ba} + M_b \cdot \alpha_{ba}$

$\Phi_{bc} = \varphi_{bc} + M_b \cdot \alpha_{bc}$

$M_b \cdot (\alpha_{ba} + \alpha_{bc}) + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} = 0$

$$M_b = -\frac{(\varphi_{ba} + \ \varphi_{bc})}{(\alpha_{ba} + \alpha_{bc})}$$

$\varphi_{ba} = \varphi_{ba,z} + \varphi_{ba,p}$

$\varphi_{bc} = \varphi_{bc,t} + \varphi_{bc,p}$

$$\alpha_{ba} = \frac{l_{ab}}{3EI} = \frac{6}{3 \cdot 48 \cdot 10^6} = 4{,}167 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$$

$$\alpha_{bc} = \frac{l_{bc}}{3EI} = \frac{6}{3 \cdot 48 \cdot 10^6} = 4{,}167 \cdot 10^{-8} \text{ rad}$$

METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

$$\varphi_{ba} = \varphi_{ba,z} + \varphi_{ba,p} = -8{,}33 \cdot 10^{-5}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{ba,z} = \frac{M}{6 \cdot EI \cdot l}(l^2 - 3a^2) \qquad 5.10\text{b}$$

$$\varphi_{ba,z} = \frac{30 \cdot 10^3}{6 \cdot 48 \cdot 10^6 \cdot 6}(6^2 - 3 \cdot 2^2) \rightarrow$$

$$\varphi_{ba,z} = 4{,}167 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}$$

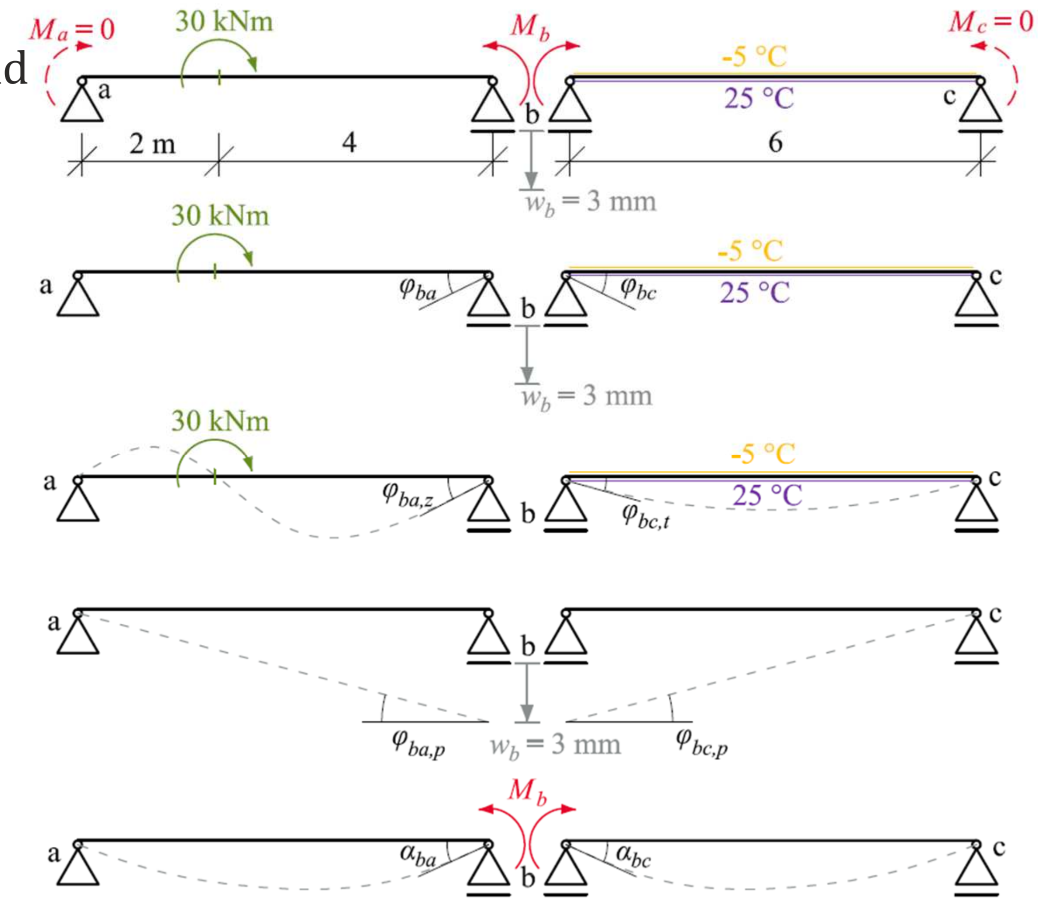
$$\varphi_{ba,p} = \frac{-w_b}{l_{ab}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{6} = -5 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{bc} = \varphi_{bc,t} + \varphi_{bc,p} = 1{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{bc,t} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta T_{bc} \cdot l}{2h} = \frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot (25-(-5)) \cdot 6}{2 \cdot 0{,}4} \rightarrow$$

$$\varphi_{bc,t} = 2{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$\varphi_{bc,p} = \frac{-w_b}{l_{bc}} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{6} = -5 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}$$

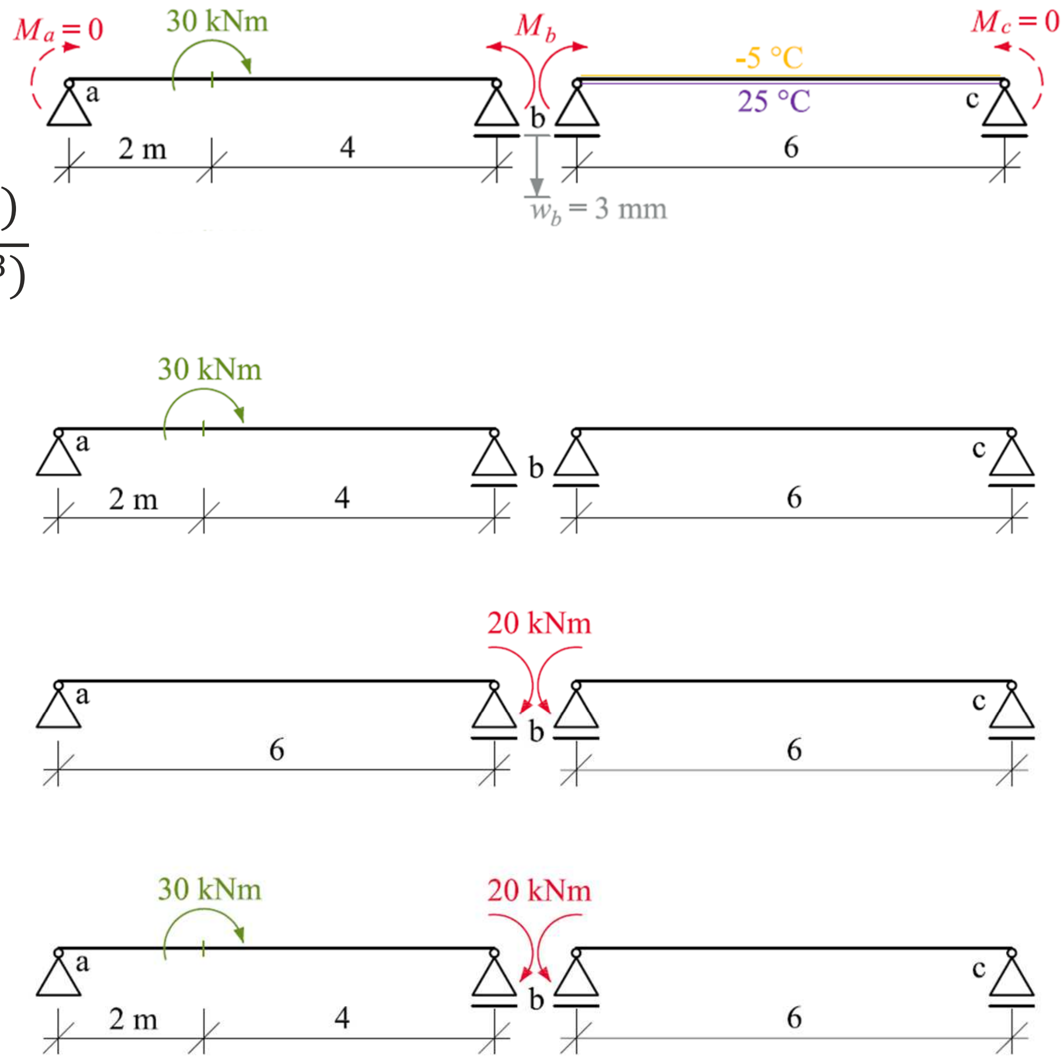


METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

$$M_b = -\frac{(\varphi_{ba} + \varphi_{bc})}{(\alpha_{ba} + \alpha_{bc})}$$

$$M_b = -\frac{(-8{,}33 \cdot 10^{-5} + 1{,}75 \cdot 10^{-3})}{(4{,}167 \cdot 10^{-8} + 4{,}167 \cdot 10^{-8})}$$

$$\boldsymbol{M_b} = -19\,998{,}8\ \mathrm{Nm} = \mathbf{-20\ kNm}$$

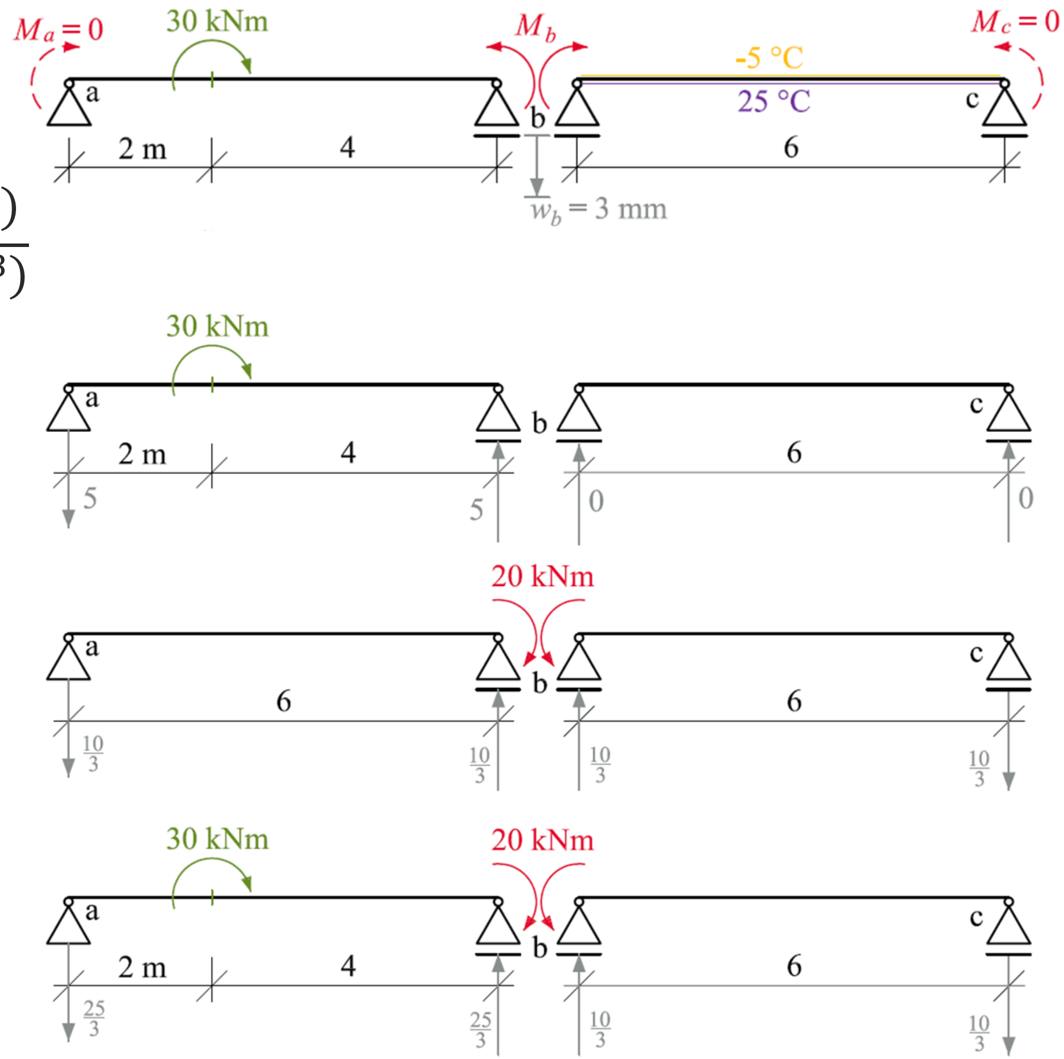


METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

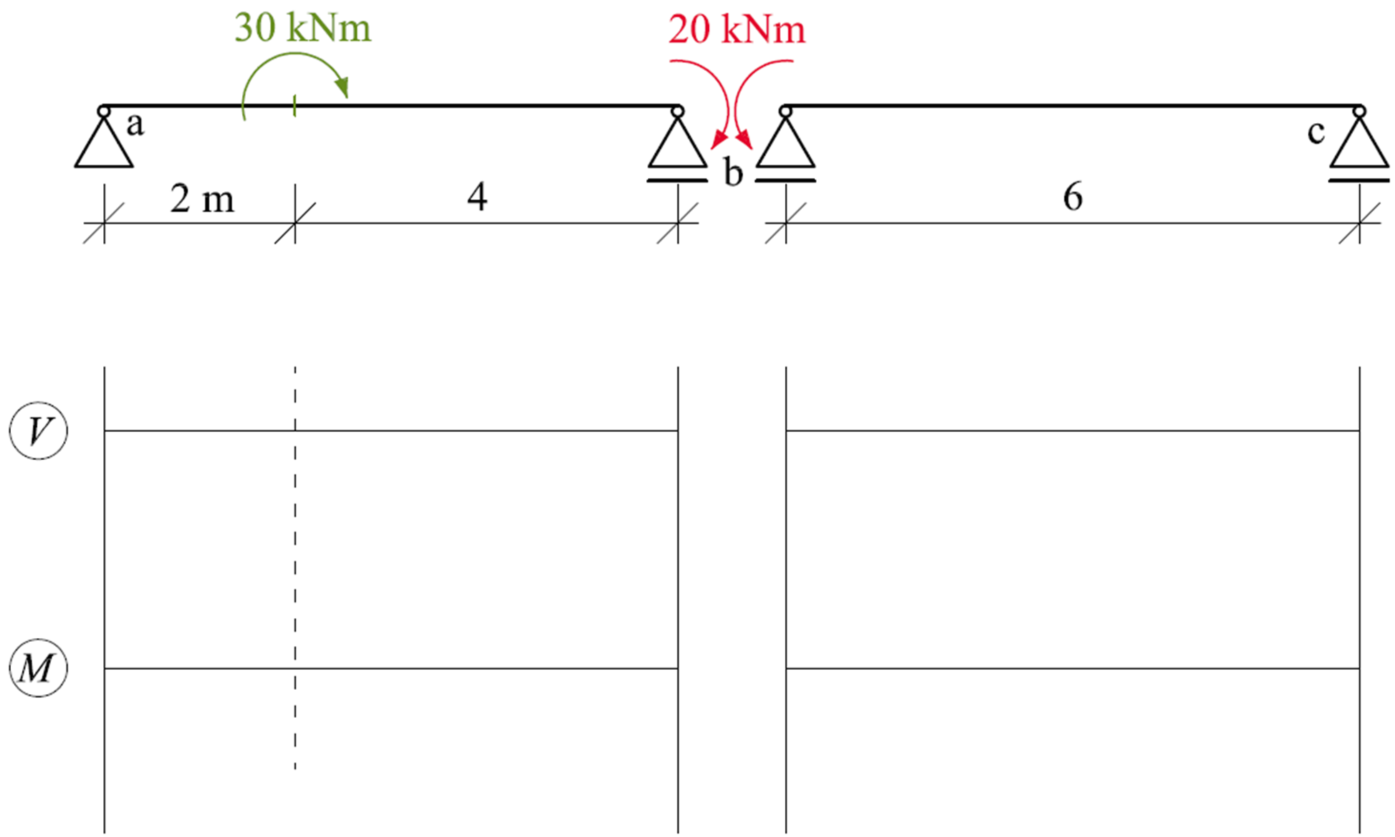
$$M_b = -\frac{(\varphi_{ba} + \varphi_{bc})}{(\alpha_{ba} + \alpha_{bc})}$$

$$M_b = -\frac{(-8{,}33 \cdot 10^{-5} + 1{,}75 \cdot 10^{-3})}{(4{,}167 \cdot 10^{-8} + 4{,}167 \cdot 10^{-8})}$$

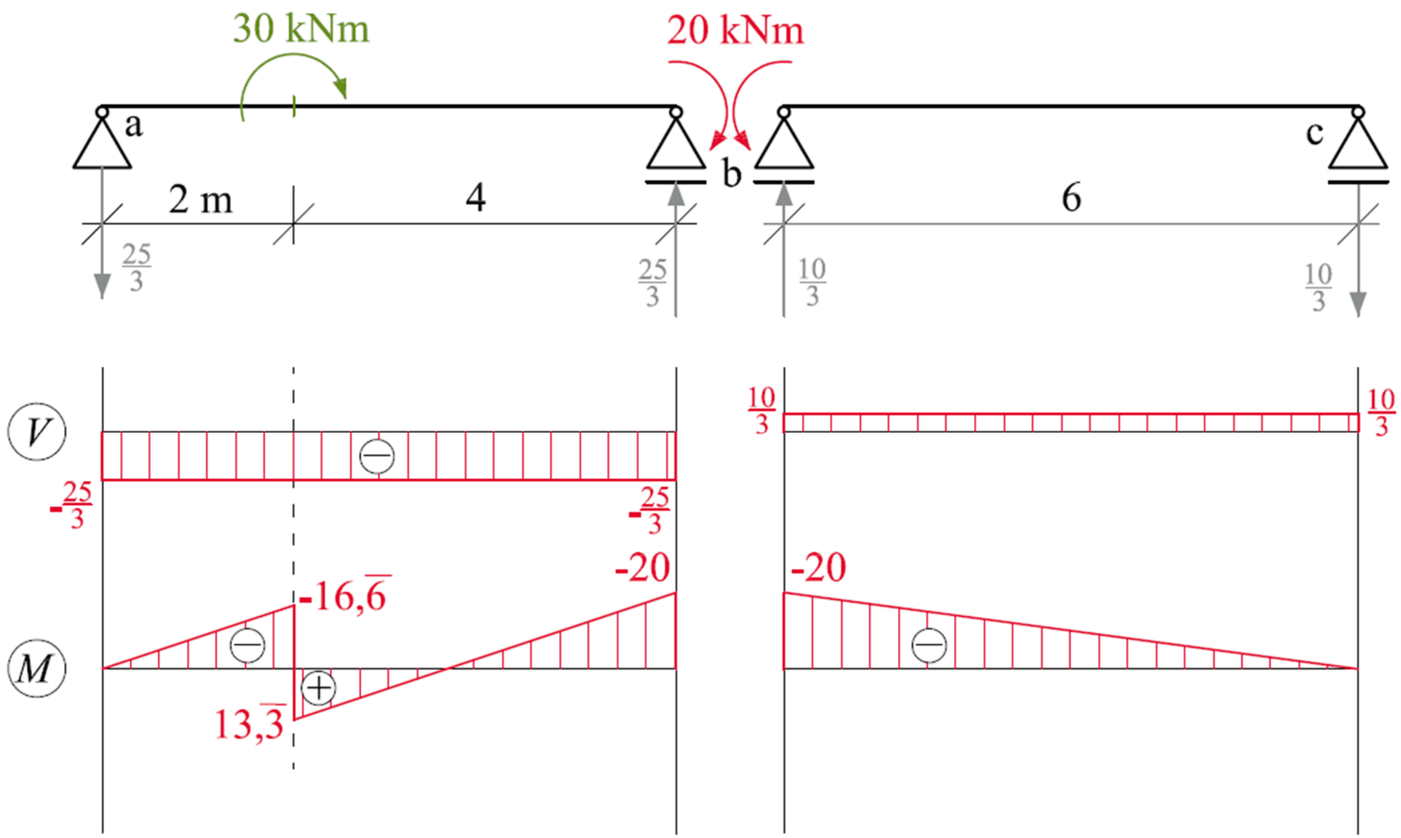
$$\boldsymbol{M_b} = -19\,998{,}8\ \mathrm{Nm} = \mathbf{-20\ kNm}$$



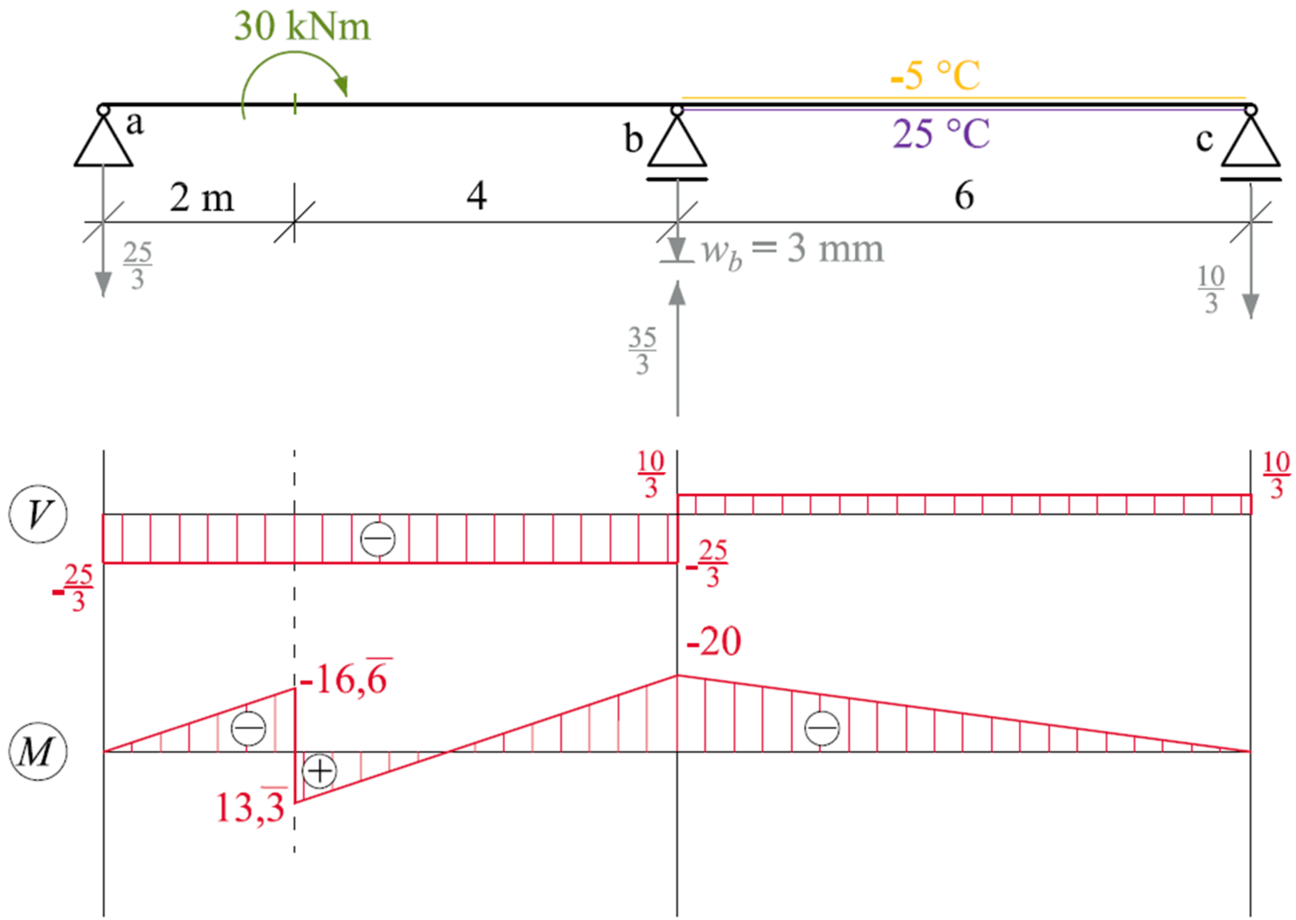
METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC



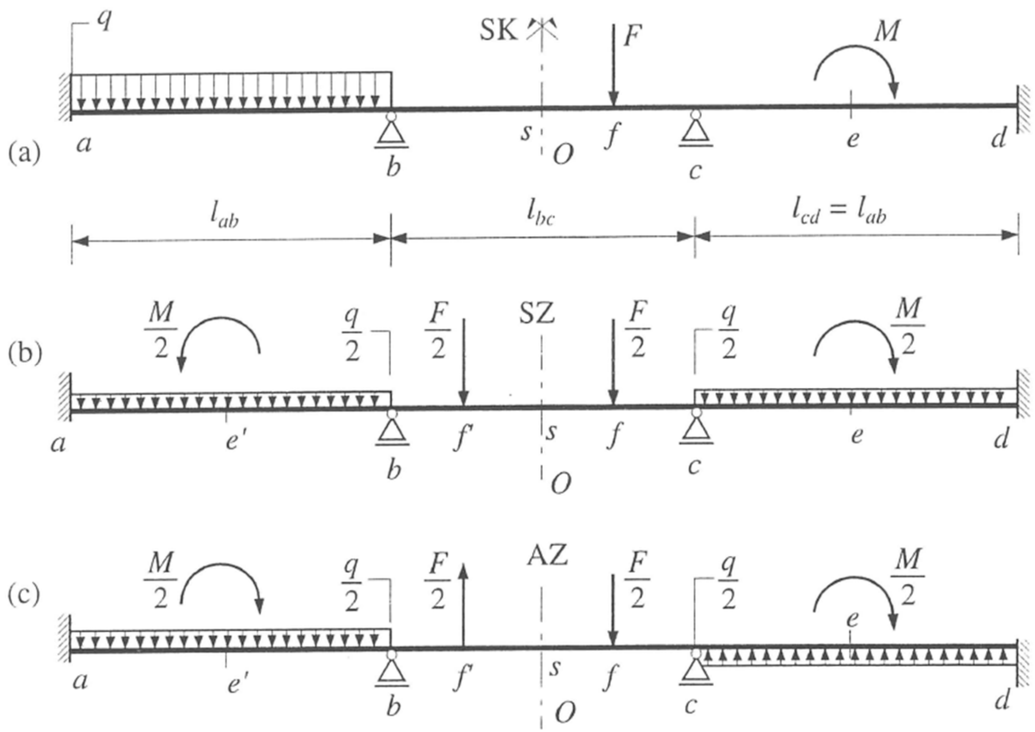
SOUMĚRNÝ SPOJITÝ NOSNÍK

Souměrný spojitý nosník (SSN)

- souměrný co do tvaru střednice a podporových vazeb podle osy *O*
- souměrné jsou také všechny geometrické veličiny (průřezové charakteristiky) a fyzikální veličiny (modul pružnosti)

Zatížení

- obecné
- symetrické
- antimetrické
- rozřízneme-li SSN podle osy *O* a překlopíme pravou část nosníku včetně zatížení na levou, potom se zatížení levé části při symetrickém zatížení zdvojnásobí a při antimetrickém zruší



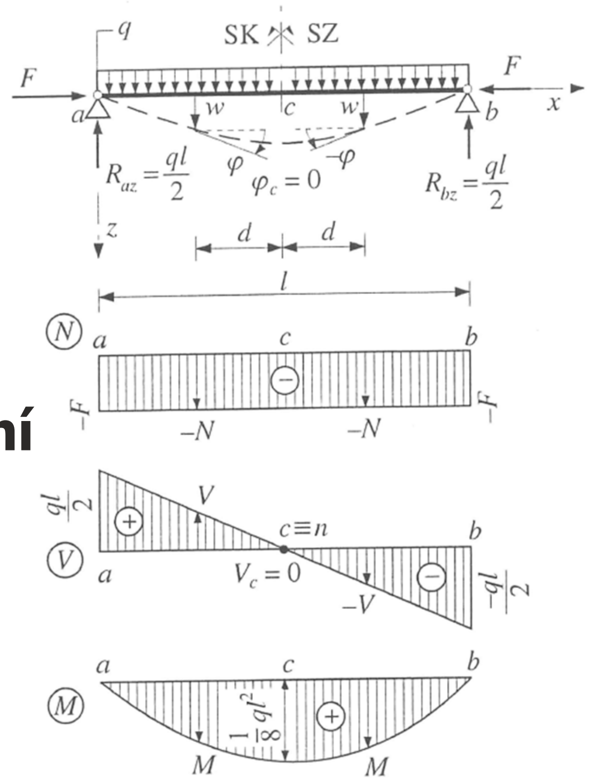
SYMETRICKÉ A ANTIMETRICKÉ VELIČINY

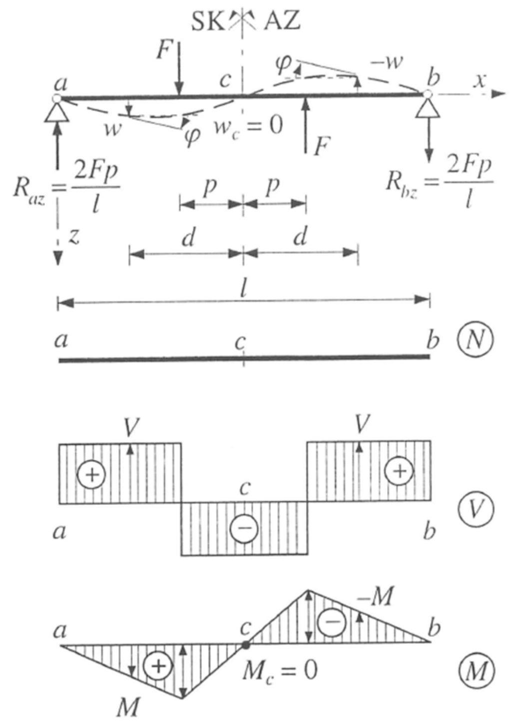
Při symetrickém zatížení

- obrazec *N, M, w* symetrický
- obrazec *V, φ* antimetrický
- na ose souměrnosti jsou antimetrické veličiny rovny 0

Při antimetrickém zatížení

- obrazec *N, M, w* antimetrický
- obrazec *V, φ* symetrický
- na ose souměrnosti jsou antimetrické veličiny rovny 0

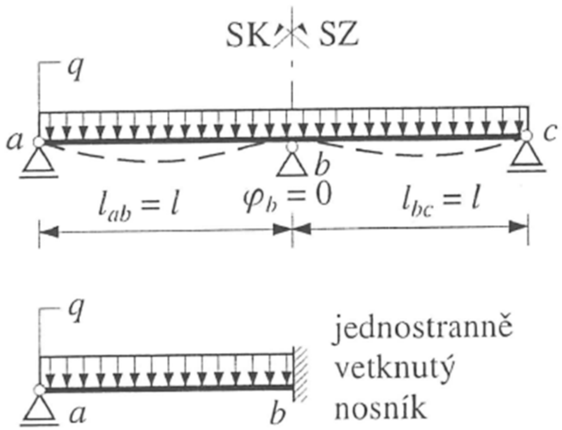


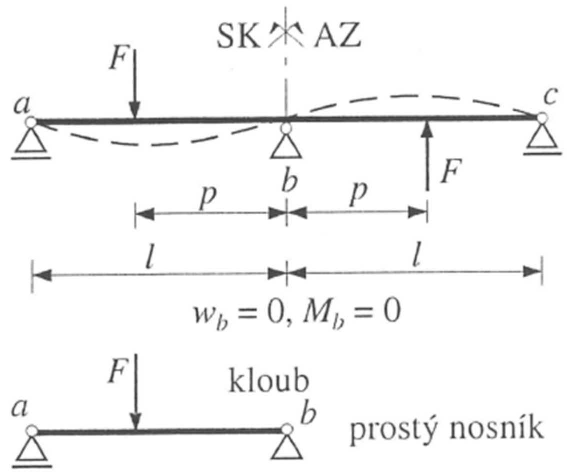


VYUŽITÍ SYMETRIE SPOJITÉHO NOSNÍKU

Osa symetrie prochází podporou

- **při symetrickém zatížení** lze v podpoře předpokládat dokonalé vetknutí, tečna k ohybové čáře je v této podpoře vodorovná
- **při antimetrickém zatížení** lze předpokládat kloub, protože podporový moment je v této podpoře roven nule





VYUŽITÍ SYMETRIE SPOJITÉHO NOSNÍKU

Osa symetrie prochází středem pole

- **při symetrickém zatížení** lze v průřezu uvažovat svisle posuvné vetknutí, φ a V jsou rovny 0 a podporové momenty $M_b = M_c$
- **při antimetrickém zatížení** lze předpokládat kloub, w a M jsou rovny 0 a podporové momenty $M_b = -M_c$