BDA016 Stavební mechanika 2
3. přednáška

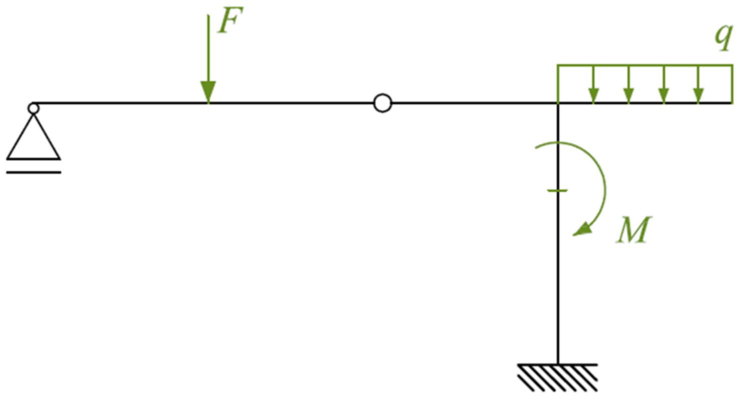
- Určení posunutí a potočení lomených a příhradových nosníků metodou jednotkových sil
- Vereščaginovo pravidlo

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (hana.simonova@vut.cz)

V přednášce jsou použity obrázky z učebnice Kadlčák, J., Kytýr, J. Statika stavebních konstrukcí II. Staticky neurčité prutové konstrukce. Nakladatelství VUTIUM v Brně, 2004.

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

SLOŽENÁ NOSNÍKOVÁ SOUSTAVA



Deformace složené nosníkové soustavy (nebo lomeného nosníku) tvořené z $j = 1, 2, \cdots, p$ přímých částí (prutů) o délkách l_j s konstantními průřezy se stanoví ze vztahu:

$$\boldsymbol{\delta_m = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} \int_0^{l_j} M_j \overline{M_j} \mathrm{d}x_j}$$

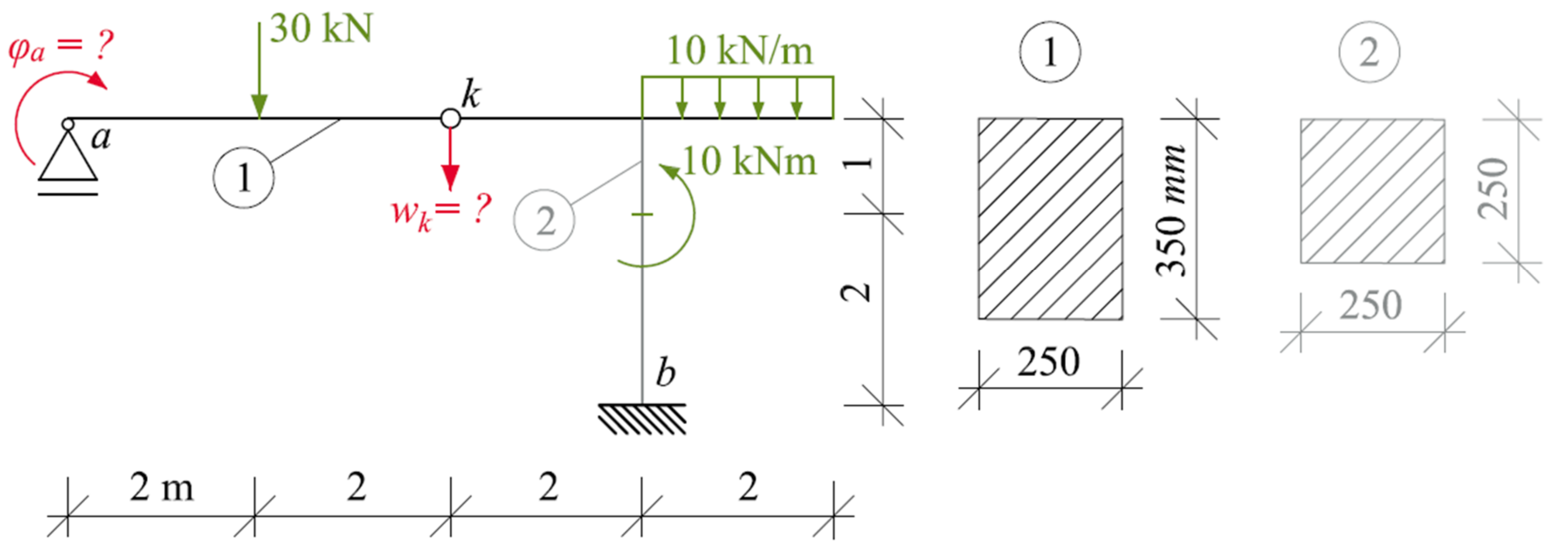
Opět lze na jednotlivých částech (prutech) využít Vereščaginovo pravidlo

$$\boldsymbol{\delta_m = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} A_{M_j} \cdot \overline{M_{j}}_t}$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

Na dané konstrukci stanovte svislý posun vnitřního kloubu *k* a potočení v levé podpoře *a* od daného silového zatížení.

Uvažujte pouze vliv práce ohybových momentů. *E* = 25 GPa

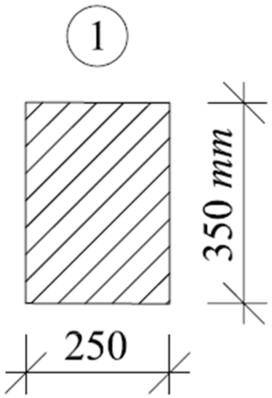


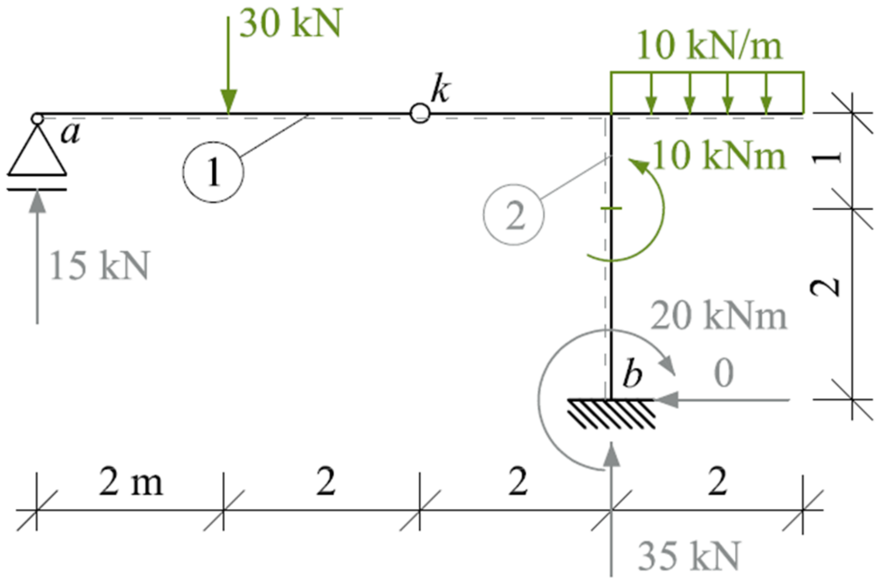
METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

$$I_1 = \frac{1}{12} 0{,}25 \cdot 0{,}35^3 \rightarrow$$

$$I_1 = 8{,}932 \cdot 10^{-4} \mathrm{m}^4$$

$$EI_1 = 22{,}33 \cdot 10^6 \mathrm{Nm}^2$$

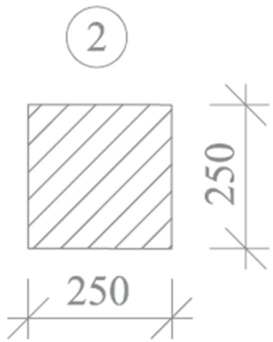


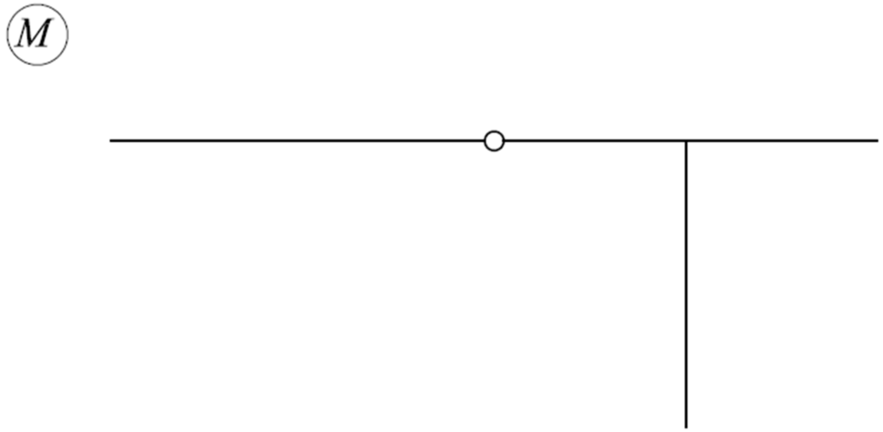


$$I_2 = \frac{1}{12} 0{,}25 \cdot 0{,}25^3 \rightarrow$$

$$I_2 = 3{,}255 \cdot 10^{-4} \mathrm{m}^4$$

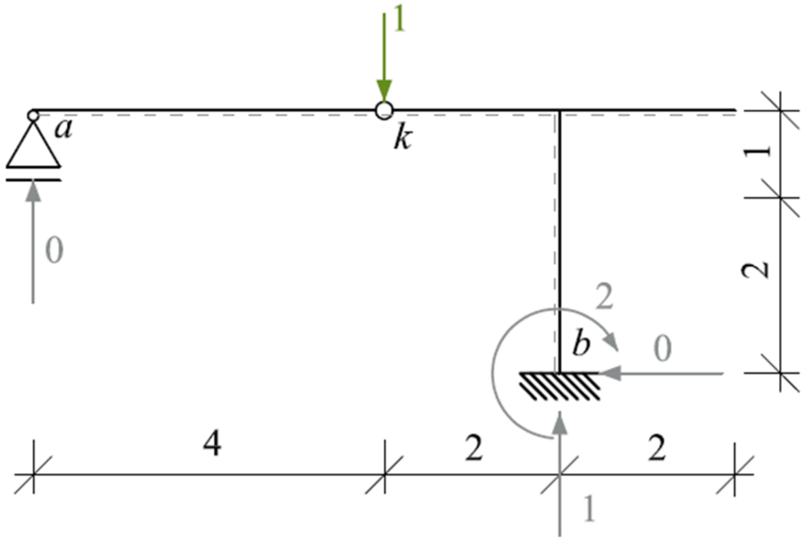
$$EI_2 = 8{,}1375 \cdot 10^6 \mathrm{Nm}^2$$

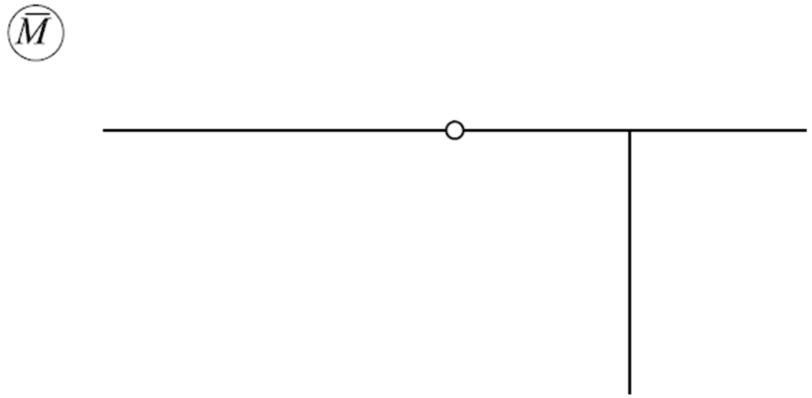




METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

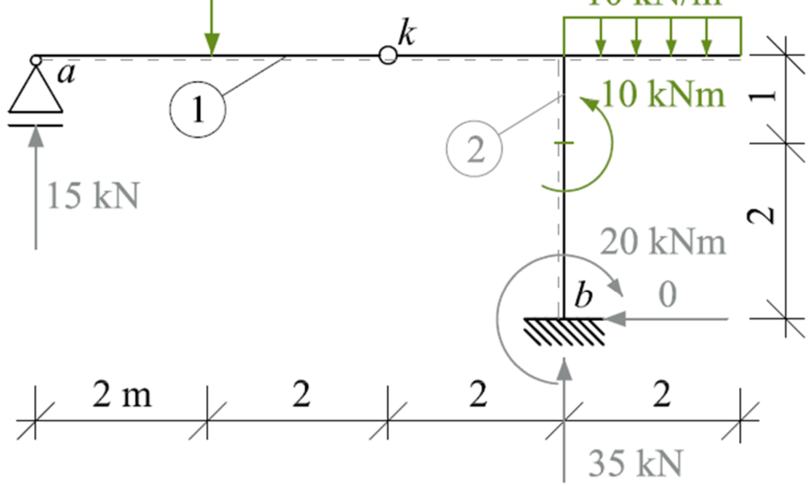
svislý posun w_k

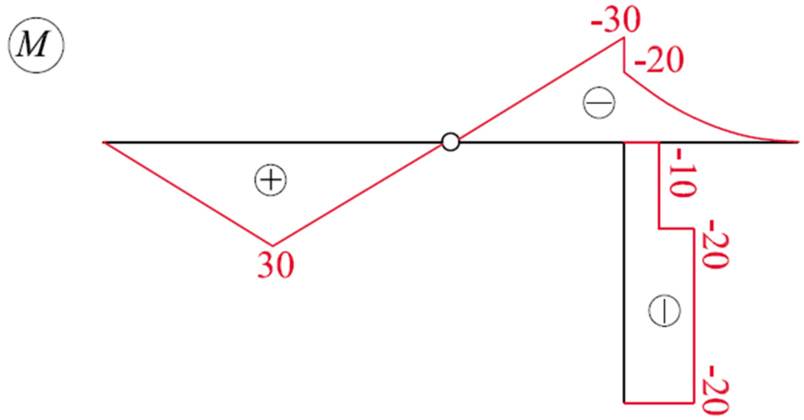


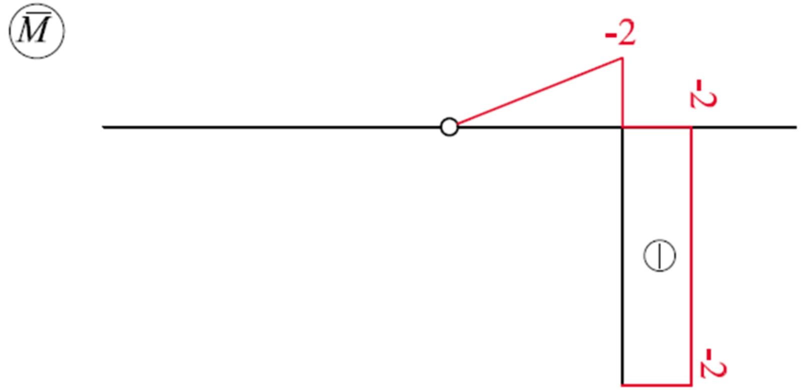


METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

svislý posun w_k







$$w_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} \int_0^{l_j} M_j \overline{M_j} \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} A_{M_j} \cdot \overline{M_j}_t =$$

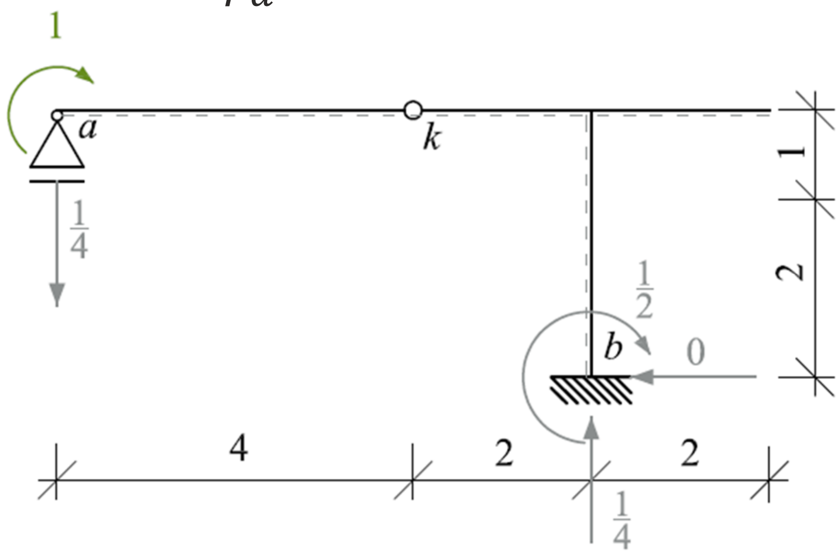
$$= \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-30 \cdot 10^3) \cdot \frac{2}{3} (-2) \right] +$$

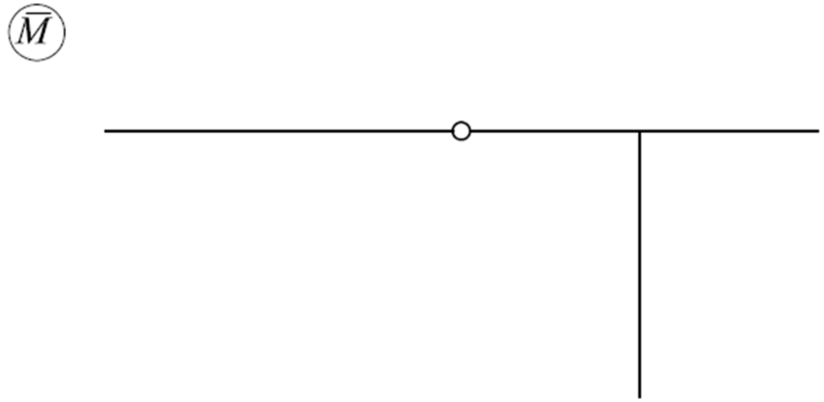
$$+ \frac{1}{EI_2} [1 \cdot (-10 \cdot 10^3) \cdot (-2) + 2 \cdot (-20 \cdot 10^3) \cdot (-2)] = \frac{40 \cdot 10^3}{EI_1} + \frac{100 \cdot 10^3}{EI_2} \rightarrow$$

$$w_k = 1{,}791 \cdot 10^{-3} + 12{,}289 \cdot 10^{-3} \mathrm{m} \rightarrow \boldsymbol{w_k = 14{,}08\ \mathrm{mm}}$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

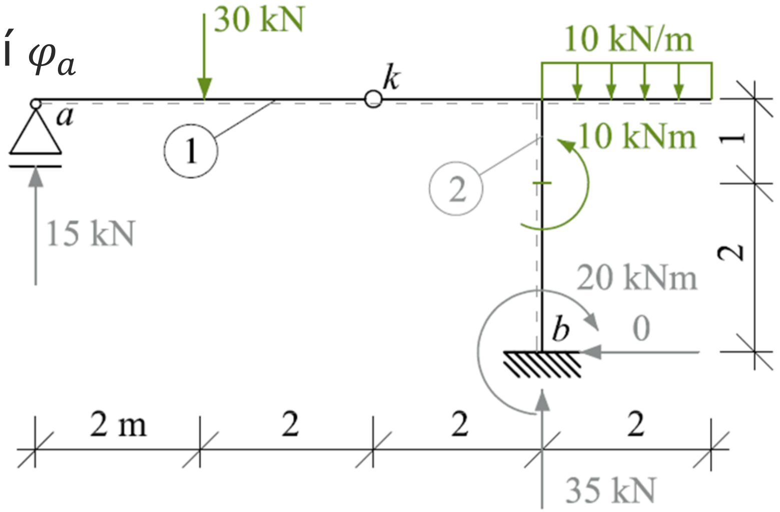
pootočení φ_a

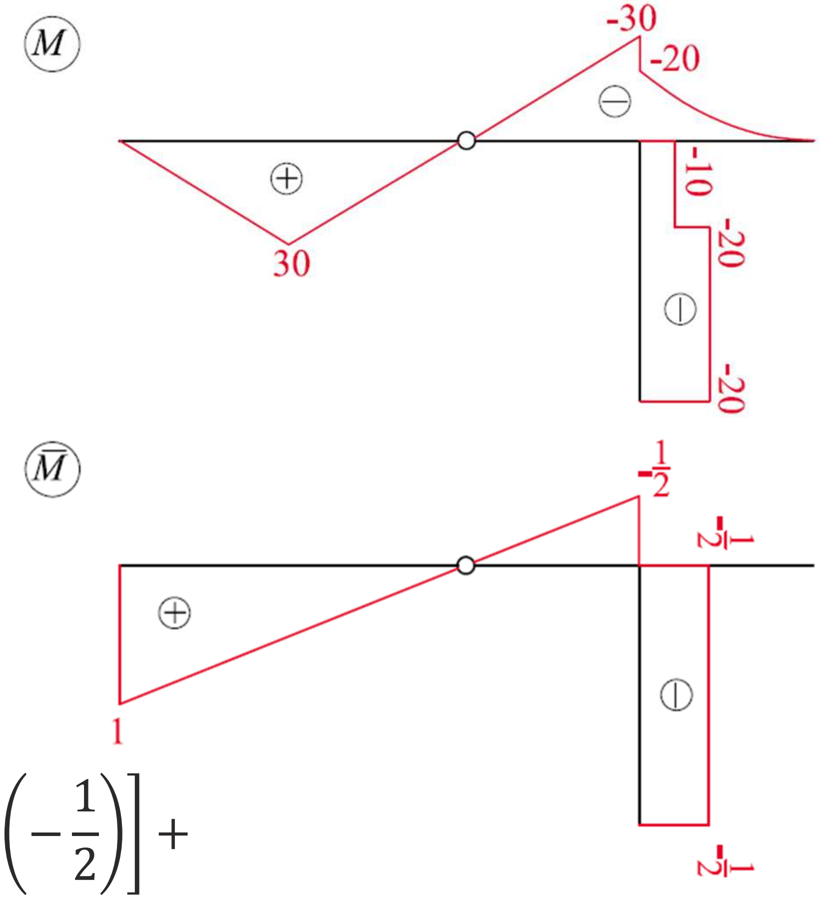




METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

pootočení φ_a





$$\varphi_a = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} \int_0^{l_j} M_j \overline{M_j} \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{E_j I_j} A_{M_j} \cdot \overline{M_j}_t =$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-30 \cdot 10^3) \cdot \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] +$$

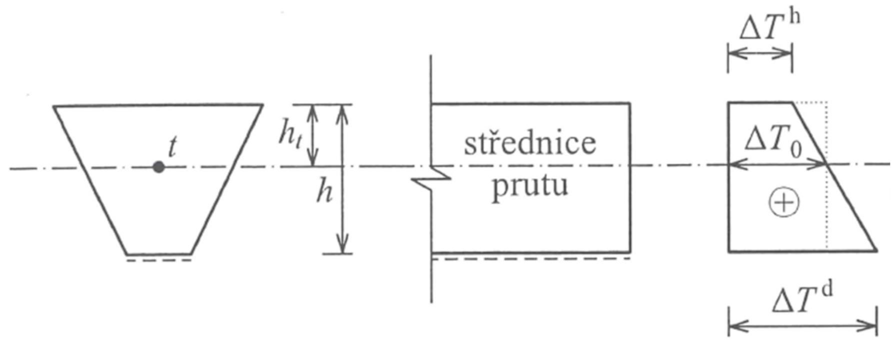
$$+ \frac{1}{EI_2}\left[1 \cdot (-10 \cdot 10^3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot (-20 \cdot 10^3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{40 \cdot 10^3}{EI_1} + \frac{25 \cdot 10^3}{EI_2} \rightarrow$$

$$\varphi_a = 1{,}791 \cdot 10^{-3} + 3{,}072 \cdot 10^{-3} \mathrm{rad} \rightarrow \boldsymbol{\varphi_a = 4,863\ \mathrm{mrad}}$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

PŘETVOŘENÍ VLIVEM ZMĚNY TEPLOTY

- za běžných podmínek lze změřit **teplotu** na **dolním** (ΔT_d) a **horním** (ΔT_h) povrchu nosníku
- předpokládáme, že teplota se mění **po výšce** průřezu **lineárně**
- zatížení změnou teploty lze rozdělit na **dvě nezávislé složky:**



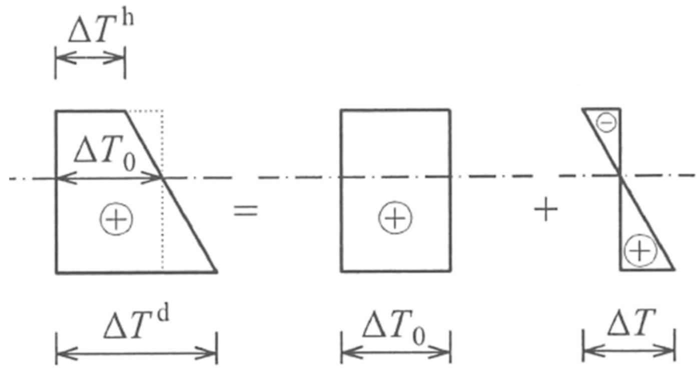
rovnoměrná změna teploty (RZT)

$\Delta T_0 = \frac{\Delta T_d + \Delta T_h}{2}$ – symetrický průřez

$\Delta T_0 = \Delta T_h + \frac{h_t}{h} \Delta T$ – obecný průřez

nerovnoměrná změna teploty (NZT)

$\Delta T = \Delta T_d - \Delta T_h$



METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

VIRTUÁLNÍ PRÁCE VNITŘNÍCH SIL

na deformacích vlivem změny teploty

$$L_i = -\int_0^l (\overline{N} \cdot \Delta u_t + \overline{M} \cdot \Delta \varphi_t)$$

- **vliv rovnoměrné změny teploty**

  $\Delta u_t = \alpha_t \Delta T_0 \mathrm{d}x$

- **vliv nerovnoměrné změny teploty**

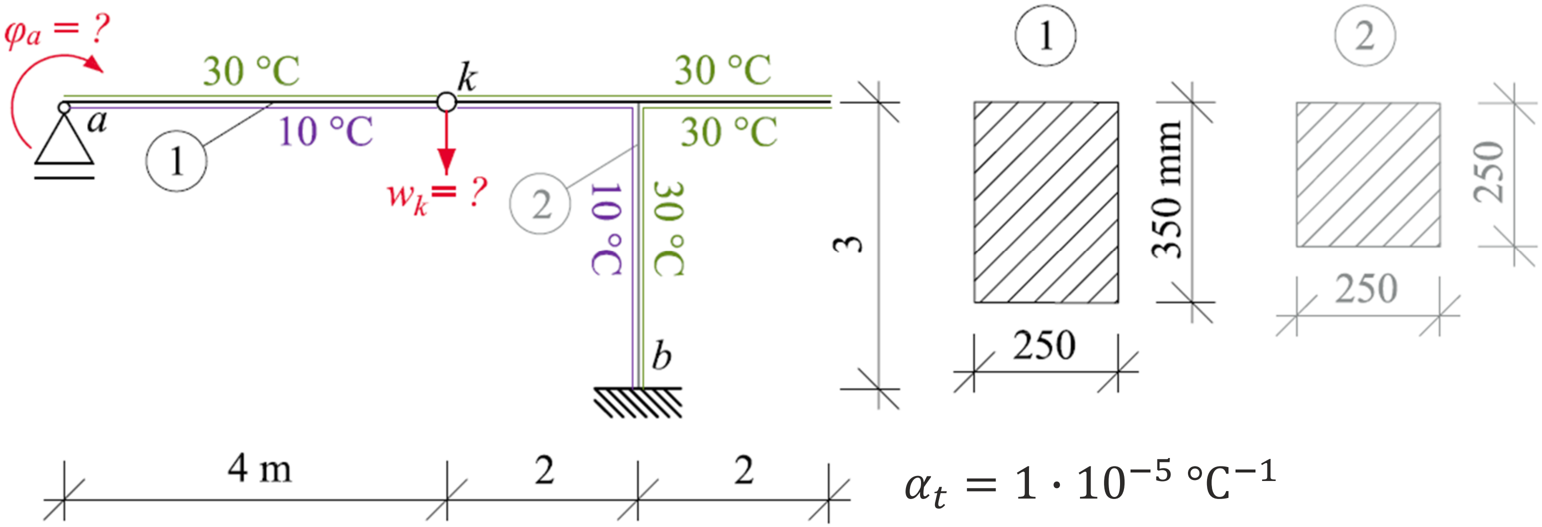
  $\Delta \varphi_t = \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \mathrm{d}x$

$$L_e = \overline{F_m} \cdot \delta_m = 1 \cdot \delta_m; \;\; L_e + L_i = 0 \rightarrow \;\; L_e = -L_i \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\delta_m = \int_0^l \overline{N}\, \alpha_t \cdot \Delta T_0 \mathrm{d}x + \int_0^l \overline{M} \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \mathrm{d}x = \alpha_t \cdot \Delta T_0 \int_0^l \overline{N}\, \mathrm{d}x + \frac{\alpha_t \Delta T}{h} \int_0^l \overline{M}\, \mathrm{d}x}$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

Na dané konstrukci stanovte svislý posun vnitřního kloubu *k* a potočení v levé podpoře *a* od změny teploty



$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$

$\Delta T_d = 10\ °C$

$\Delta T_h = 30\ °C$

$$\Delta T_0 = \frac{\Delta T_d + \Delta T_h}{2} = \frac{10+30}{2} = 20\ °C$$

$$\Delta T = \Delta T_d - \Delta T_h = 10 - 30 = -20\ °C$$

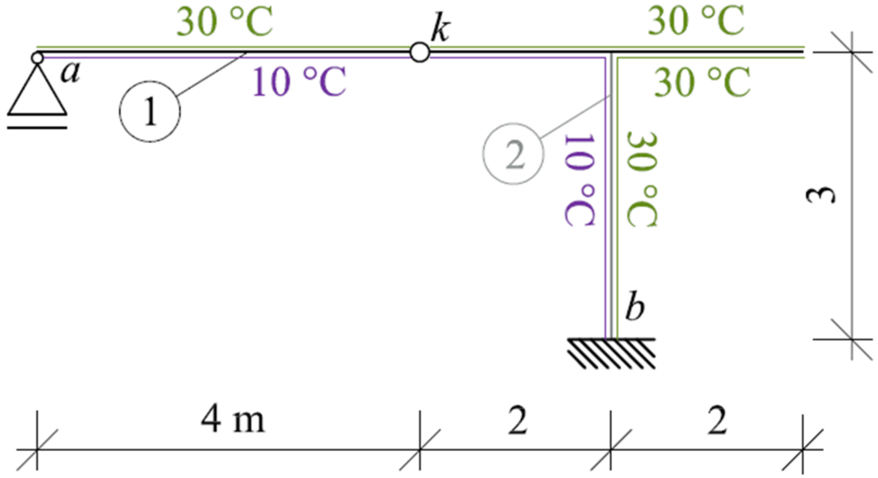
$\Delta T_d = 30\ °C$

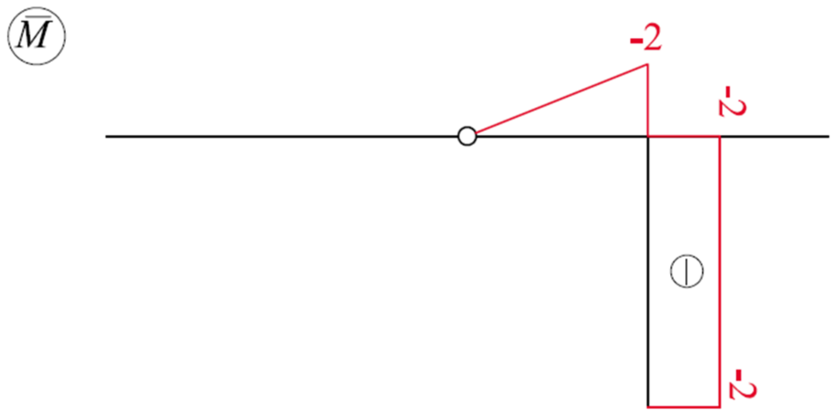
$\Delta T_h = 30\ °C$

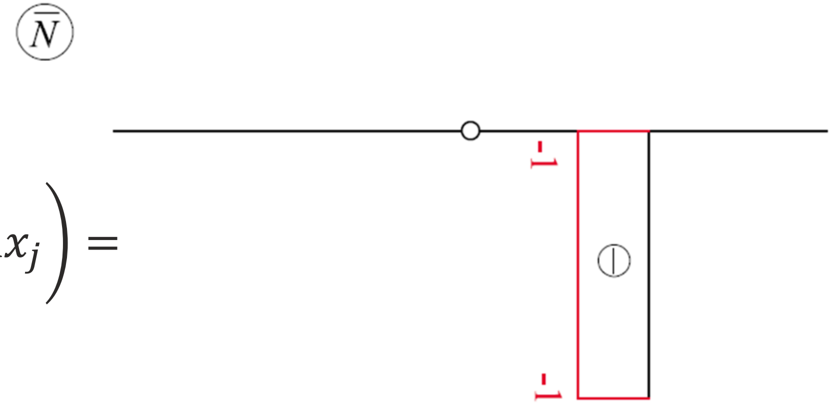
$$\Delta T_0 = \frac{\Delta T_d + \Delta T_h}{2} = \frac{30+30}{2} = 30\ °C$$

$$\Delta T = \Delta T_d - \Delta T_h = 30 - 30 = 0\ °C$$

svislý posun w_k







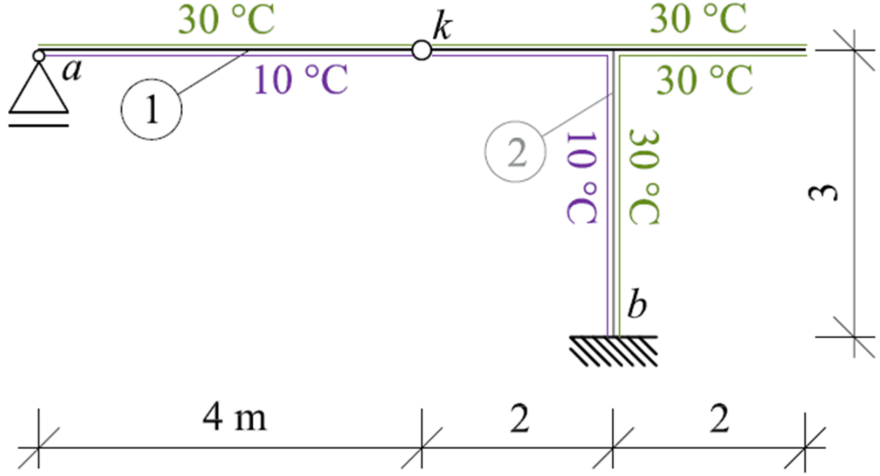
$$w_k = \sum_{j=1}^{p}\left(\alpha_{t_j}\cdot\Delta T_{0_j}\int_0^{l_j}\bar{N}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\alpha_{t_j}\Delta T_j}{h_j}\int_0^{l_j}\bar{M}\,\mathrm{d}x_j\right) =$$

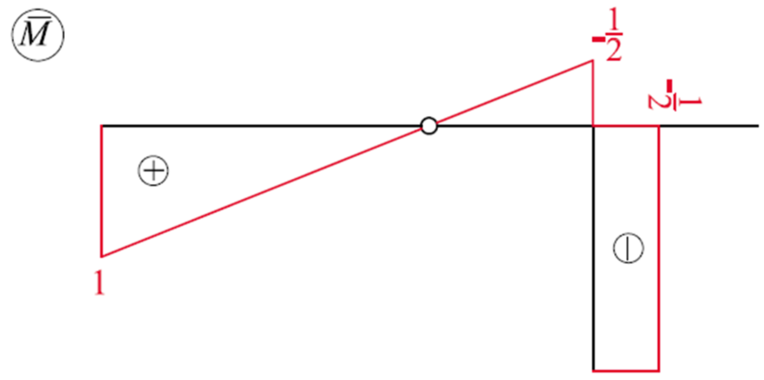
$$= \alpha_t\cdot\sum_{j=1}^{p}\left(\Delta T_{0_j}\cdot A_{\bar{N}_j} + \frac{\Delta T_j}{h_j}\cdot A_{\bar{M}_j}\right) =$$

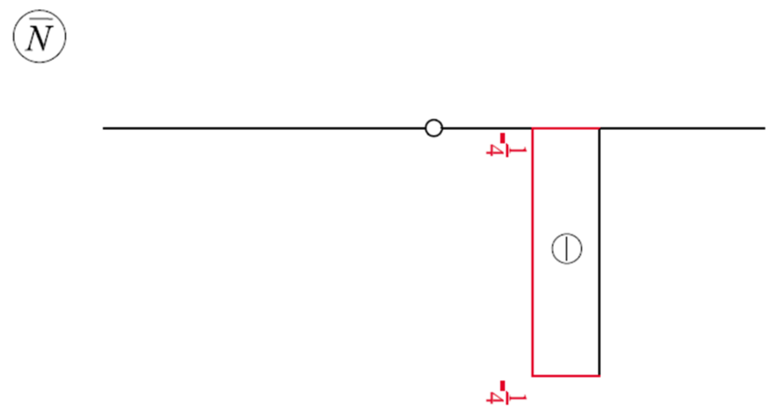
$$= 1\cdot 10^{-5}\left(\frac{(-20)}{0{,}35}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-2) + 20\cdot 3\cdot(-1) + \frac{(-20)}{0{,}25}\cdot 3\cdot(-2)\right)\rightarrow \boldsymbol{w_k = 5{,}34\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

pootočení φ_a







$$\varphi_a = \alpha_t \cdot \sum_{j=1}^{p} \left(\Delta T_{0_j} \cdot A_{\overline{N}_j} + \frac{\Delta T_j}{h_j} \cdot A_{\overline{M}_j} \right) =$$

$$= 1 \cdot 10^{-5} \left(\frac{(-20)}{0{,}35} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{(-20)}{0{,}35} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 20 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{(-20)}{0{,}25} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

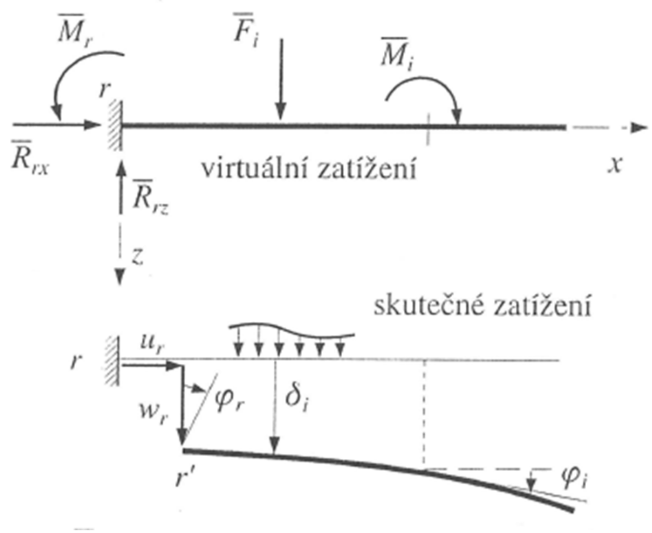
$$\rightarrow \boldsymbol{\varphi_a = 0{,}193 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}}$$

VIRTUÁLNÍ PRÁCE VNĚJŠÍCH REAKCÍ na deformacích podpor

$$L_{er} = \sum(\bar{R}_{rx} \cdot u_r + \bar{R}_{rz} \cdot w_r + \bar{M}_r \cdot \varphi_r) = \sum_{r=1}^{p_v} \bar{R}_r \cdot \delta_r$$

VIRTUÁLNÍ PRÁCE JEDNOTKOVÉ SÍLY

$$L_{ef} = \bar{F}_i \cdot \delta_i = 1 \cdot \delta_i$$



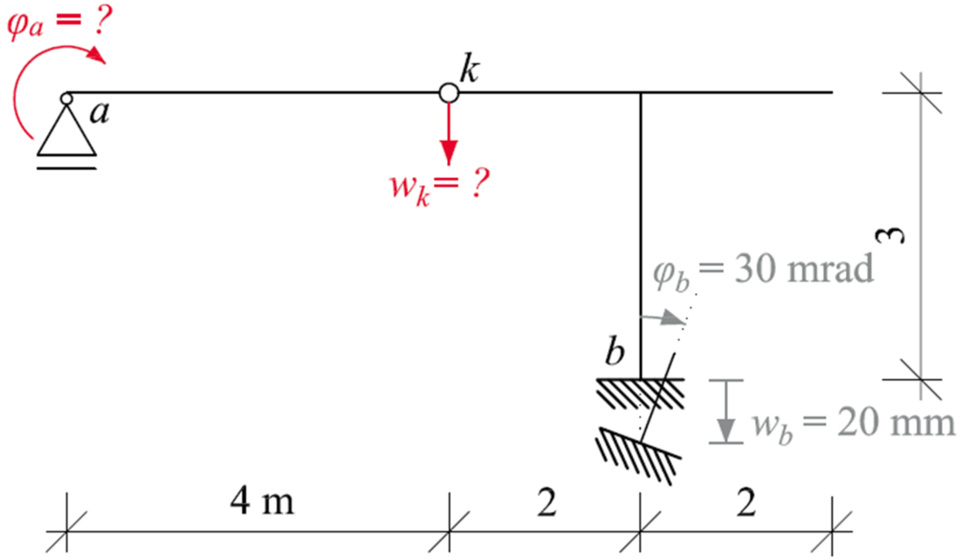
CELKOVÁ VITRUÁLNÍ PRÁCE

$$L_e = L_{er} + L_{ef}$$

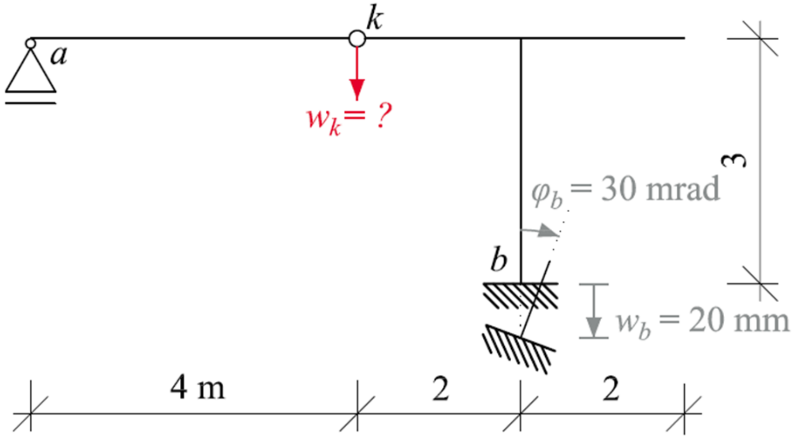
$$L_e + L_i = 0; L_i = 0 \rightarrow L_{ef} = -L_{er}$$

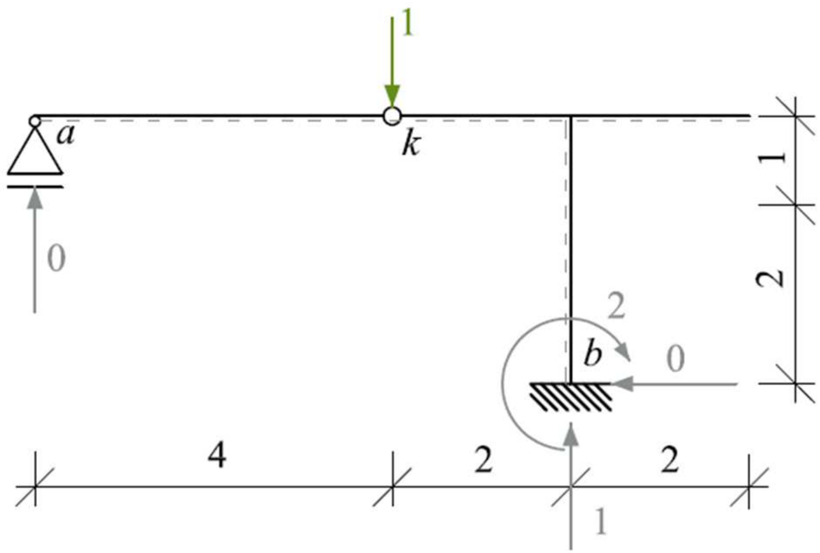
$$\boldsymbol{\delta_i = -\sum_{r=1}^{p_v} \bar{R}_r \cdot \delta_r}$$

Na dané konstrukci stanovte svislý posun vnitřního kloubu *k* a potočení v levé podpoře *a* od popuštění podpor.



svislý posun w_k

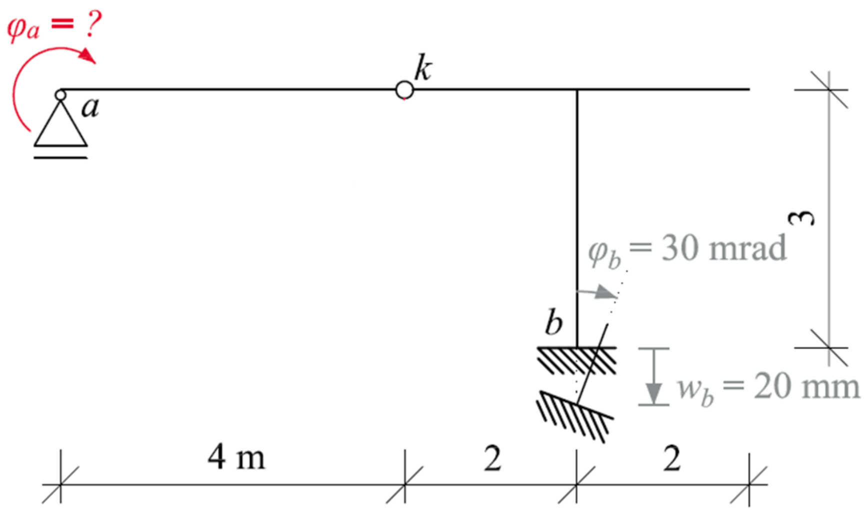


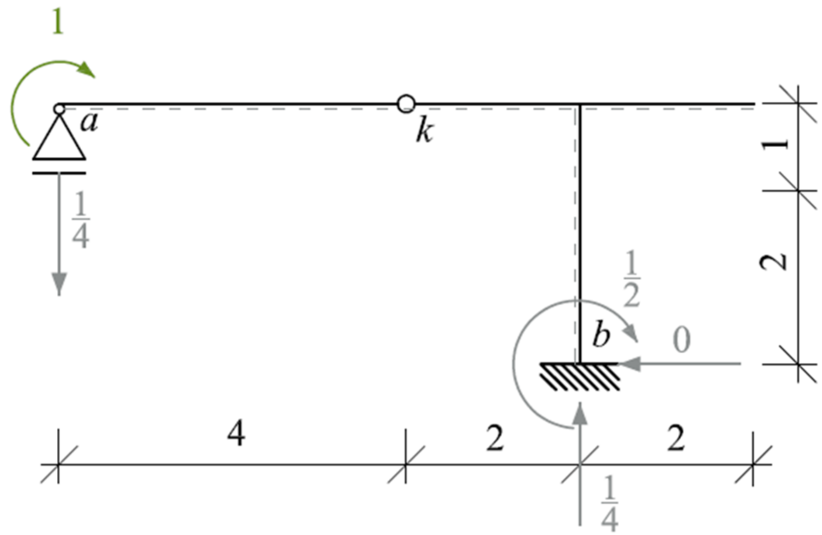


$$W_k = -\sum_{r=1}^{p_v} \bar{R}_r \cdot \delta_r = -(1 \cdot (-0{,}02) + 2 \cdot 0{,}03)$$

$$\boldsymbol{W_k = -0{,}04\ \mathrm{m}}$$

pootočení φ_a



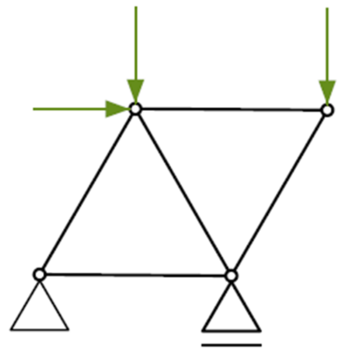


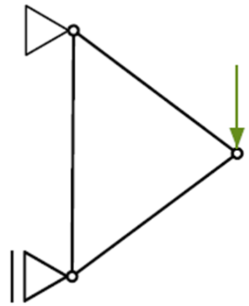
$$\varphi_a = -\sum_{r=1}^{p_v} \bar{R}_r \cdot \delta_r = -\left(\frac{1}{4} \cdot (-0{,}02) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03\right)$$

$$\boldsymbol{\varphi_a = -0,01\ \mathrm{rad}}$$

PŘÍHRADOVÁ KONSTRUKCE

Postup výpočtu přetvoření příhradové konstrukce metodou jednotkových sil je obdobný jako u složené nosníkové soustavy s tím rozdílem, že na výsledné přetvoření mají vliv pouze normálové síly



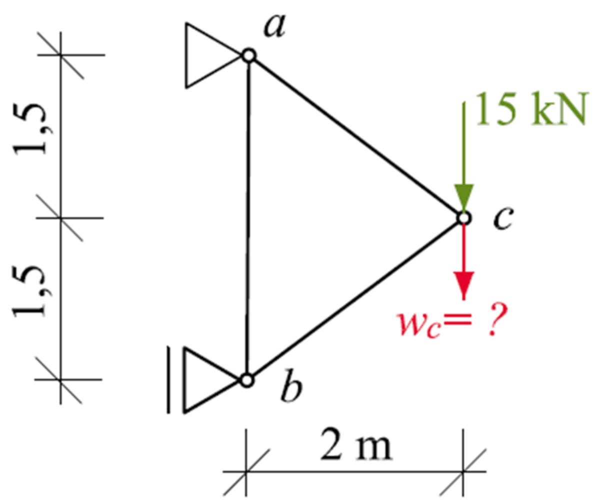


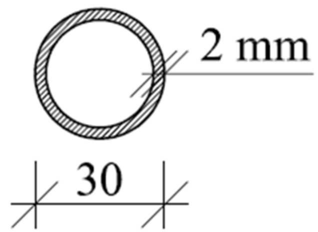
Přetvoření příhradové konstrukce tvořené z $j = 1, 2, \cdots, p$ přímých prutů o délkách l_j s konstantními průřezy se stanoví ze vztahu:

$$\boldsymbol{\delta_m = \sum_{j=1}^{p} \int_0^{l_j} \frac{N_j \overline{N_j}}{E_j A_j} \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{N_j \overline{N_j}}{E_j A_j} \int_0^{l_j} 1 \mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{N_j \overline{N_j}}{E_j A_j} l_j}$$

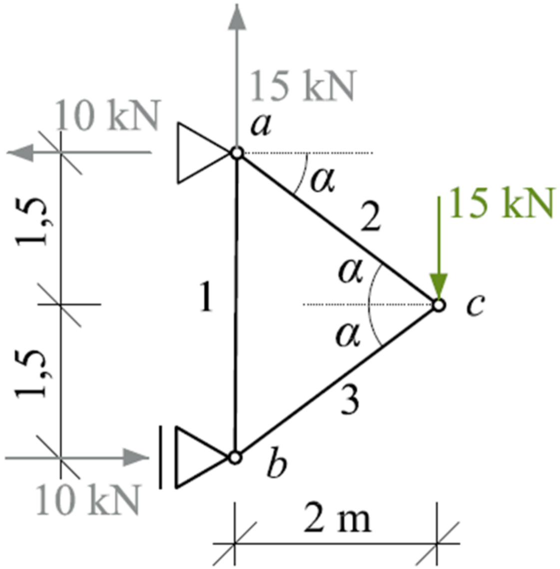
METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

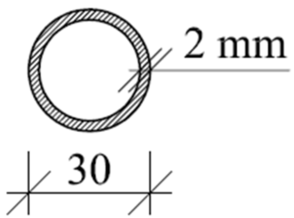
Na dané příhradové konstrukci stanovte svislý posun uzlu *c* od daného silového zatížení. *E* = 210 GPa



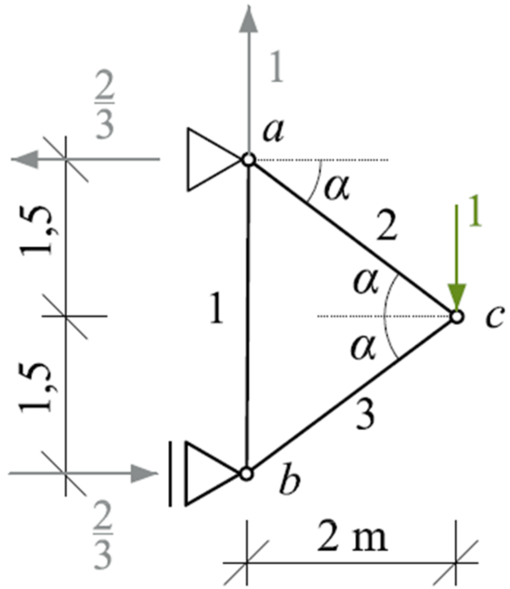


METODA JEDNOTKOVÝCH SIL





svislý posun w_c – jednotkové zatížení



$d_1 = 30 \text{ mm}; d_2 = 26 \text{ mm}$

$$A = \frac{\pi\left(d_1^2 - d_2^2\right)}{4} = 175{,}93 \text{ mm}^2 = 1{,}7593 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$EA = 36{,}9453 \cdot 10^6 \text{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8; \ \sin\alpha = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$$

METODA JEDNOTKOVÝCH SIL

Výpočet osových sil v prutech – dané zatížení

styčník „a"

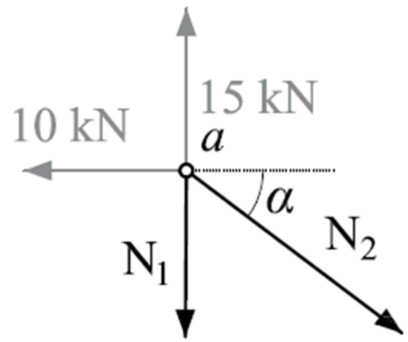
- $\sum F_{i,x} = 0$ $\xrightarrow{\oplus}$

  $-10 + \cos\alpha \cdot N_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_2} = 12{,}5\ \mathrm{kN}$

- $\sum F_{i,z} = 0$

  $N_1 - 15 + \sin\alpha \cdot N_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_1} = 7{,}5\ \mathrm{kN}$

$\oplus$



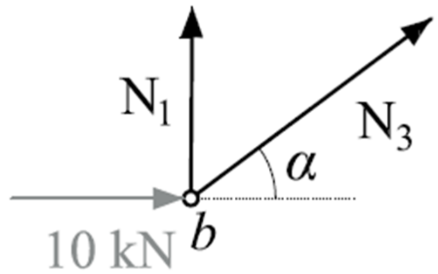
styčník „b"

- $\sum F_{i,x} = 0$ $\xrightarrow{\oplus}$

  $10 + \cos\alpha \cdot N_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_3} = -12{,}5\ \mathrm{kN}$

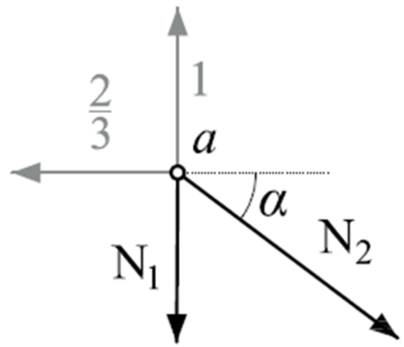
- $\sum F_{i,z} = 0$

  $-N_1 - \sin\alpha \cdot N_3 = 0 \rightarrow 0 = 0$



Výpočet osových sil v prutech – virtuální jednotkové zatížení

styčník „a"

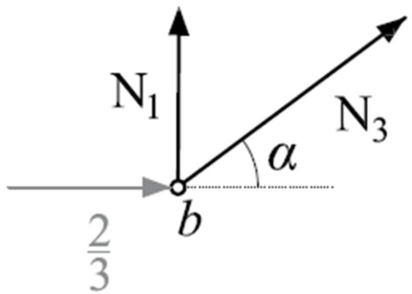


- $\sum F_{i,x} = 0$ $\quad \xrightarrow{\oplus}$

  $-\frac{2}{3} + \cos\alpha \cdot N_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_2} = \frac{5}{6}$
- $\sum F_{i,z} = 0$

  $N_1 - 1 + \sin\alpha \cdot N_2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_1} = \frac{1}{2}$

styčník „b"



- $\sum F_{i,x} = 0$ $\quad \xrightarrow{\oplus}$

  $\frac{2}{3} + \cos\alpha \cdot N_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{N_3} = -\frac{5}{6}$
- $\sum F_{i,z} = 0$

  $-N_1 - \sin\alpha \cdot N_3 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Výpočet svislého posunu uzlu *c*

$$w_c = \sum_{j=1}^{p} \frac{N_j \overline{N_j}}{E_j A_j} l_j = \frac{1}{EA} \sum_{j=1}^{3} N_j \overline{N_j}\, l_j =$$

prut j	l_j [m]	N_j [N]	$\overline{N_j}$ [−]	$N_j \overline{N_j l_j}$ [Nm]
1				
2				
3				
Σ				