

BDA016 Stavební mechanika 2

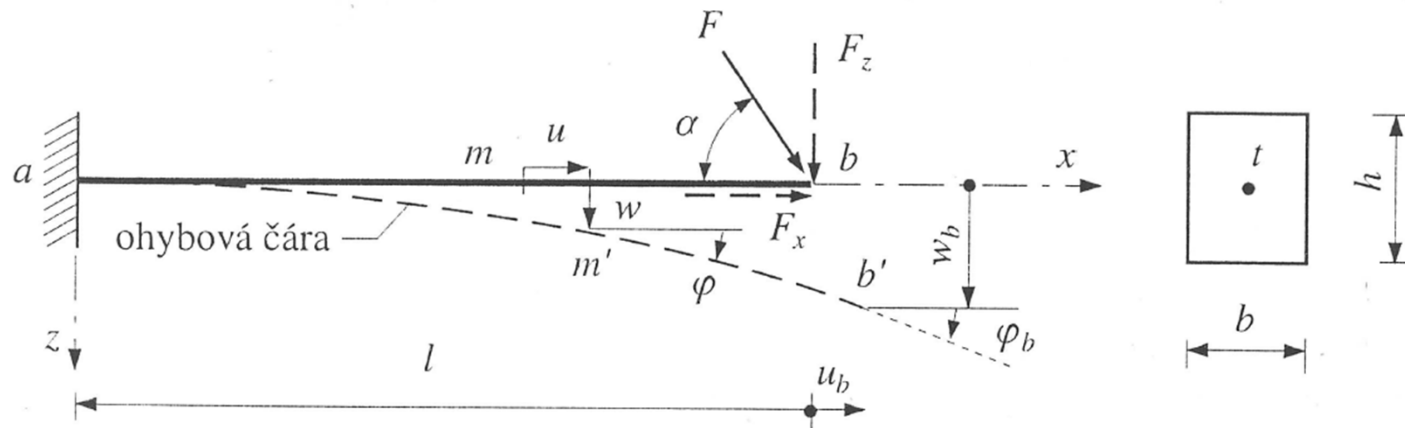
2. přednáška

- Lagrangeův princip virtuálních prací
- Věty o vzájemnosti virtuálních prací
- Mawellův–Mohrův vztah; Vereščaginovo pravidlo
- Určení posunutí a potočení prímých nosníku metodou jednotkových sil

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (hana.simonova@vut.cz)

Předpoklady výpočtu

- Fyzikální linearita – materiál prutů lineárně pružný, platí Hookův zákon
- Geometrická linearita – lineární závislost mezi silami a deformacemi konstrukce (deformace jsou ve srovnání s délkovými rozměry konstrukce velmi malé)
- statické podmínky rovnováhy sestavujeme na nepřetvořené konstrukci – výpočet provádíme podle tzv. teorie prvního řádu
- platí princip úměrnosti a superpozice účinků



Důvody pro výpočet deformací (přetvoření)

- Posouzení konstrukce podle mezního stavu použitelnosti – ověření zda jsou deformace (zejména průhyby) konstrukce v přijatelných mezích
- Řešení staticky neurčitých konstrukcí
 - při výpočtu je nutné respektovat přetvoření konstrukce
 - kromě statických podmínek rovnováhy se uvažují také podmínky deformační

Metody pro stanovení posunutí a potočení průřezu nosníku

- z principu virtuálních prací, tzv. **Metoda jednotkových sil**
- Mohrova metoda
- integrací diferenciální rovnice ohybové čáry (Clebshova úprava)
- přetvárnou (deformační) prací

Virtuální přetvoření

- velmi malé, fiktivní, myšlené avšak možné přetvoření, které nastává vždy v souladu s vnějšími a vnitřními vazbami tělesa
- např. pružná deformace (posunutí δs a pootočení $\delta \varphi$ průřezu) nosníku vyvolaná virtuálním zatížením

Virtuální zatížení

- síla δF , moment δM je zatížení fiktivní, myšlené avšak možné a mohlo by skutečně na pružném tělese působit
- jeho velikost není omezena, pro jednoduchost volíme $\delta F = 1$, $\delta M = 1$

Virtuální práce

- práce virtuální síly (momentu) na skutečném posunutí (pootočení) tělesa
 $\delta L = \delta F \cdot s$; $\delta L = \delta M \cdot \varphi$
- práce skutečné síly (momentu) na virtuálním posunutí (pootočení) tuhého tělesa
 $\delta L = F \cdot \delta s$; $\delta L = M \cdot \delta \varphi$

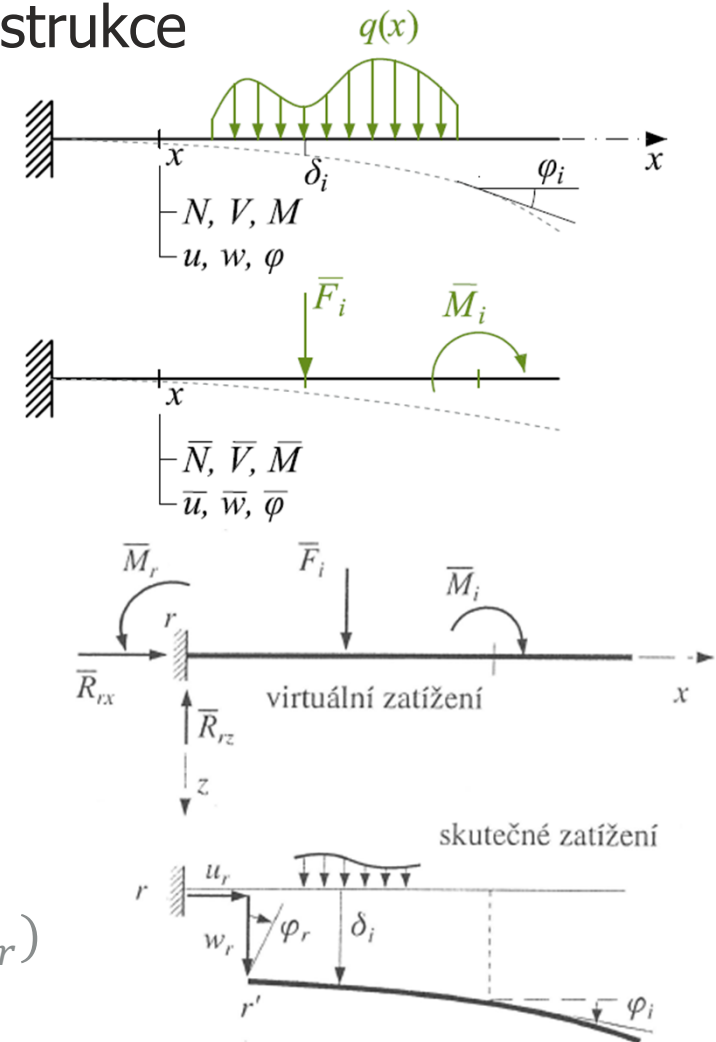
Uvažuje **dva zatěžovací stavy téže konstrukce**

- 1. Skutečné zatížení** vyvolá skutečné deformace $\delta_i(u_i, w_i, \varphi_i)$ a skutečné vnitřní síly N, V, M
- 2. Virtuální zatížení** vyvolá virtuální deformace $\bar{\delta}_i, \bar{\varphi}_i$ a virtuální vnitřní síly $\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}$

VIRTUÁLNÍ PRÁCE VNĚJŠÍCH SIL

$$L_e = \sum \bar{F}_i \cdot \delta_i + \sum \bar{M}_i \cdot \varphi_i + \sum \bar{R}_r \cdot \delta_r$$

$$\sum \bar{R}_r \cdot \delta_r = \sum (\bar{R}_{rx} \cdot u_r + \bar{R}_{rz} \cdot w_r + \bar{R}_{rM} \cdot \varphi_r)$$



VIRTUÁLNÍ PRÁCE VNITŘNÍCH SIL

$$L_i = - \int_0^l (\bar{N} \cdot \Delta u + \bar{V} \cdot \Delta w + \bar{M} \cdot \Delta \varphi)$$

- **vliv normálové síly**

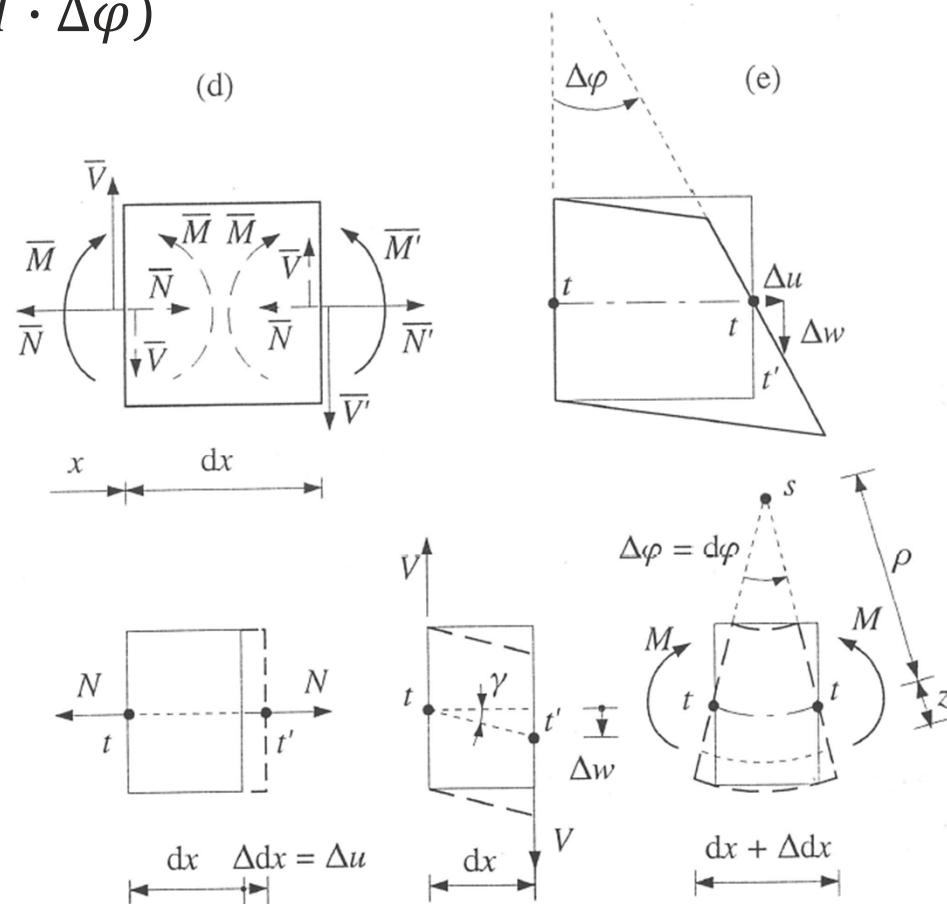
$$\Delta u = \frac{N dx}{EA}$$

- **vliv posouvající síly**

$$\Delta w = \gamma dx = \kappa \frac{V dx}{GA}$$

- **vliv ohybového momentu**

$$\Delta \varphi = \frac{M dx}{EI}$$



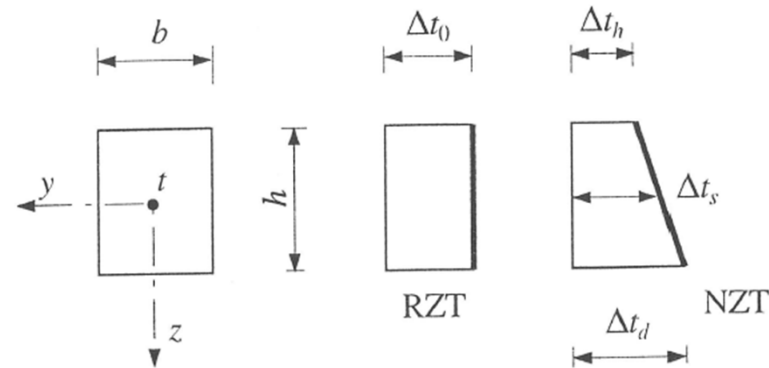
VIRTUÁLNÍ PRÁCE VNITŘNÍCH SIL

- **vliv rovnoměrné změny teploty**

$$\Delta u = \alpha_t \Delta t_0 dx$$

- **vliv nerovnoměrné změny teploty**

$$\Delta \varphi = \frac{\alpha_t \Delta t_1 dx}{h}$$



$$L_i = - \left[\int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx + \int_0^l \bar{N} \alpha_t \cdot \Delta t_0 dx + \int_0^l \bar{M} \frac{\alpha_t \Delta t_1}{h} dx \right]$$

LAGRANGEŮV PRINCIP VIRTUÁLNÍCH PRACÍ

Princip virtuálních přemístění

- tuhé těleso – virtuální veličina je přemístění (posunutí nebo pootočení)
- virtuální práce rovnovážné soustavy sil působící na tuhé těleso je při libovolném virtuálním přemístění rovna nule

Princip virtuálních sil

- rozšíření pro pružná tělesa – virtuální veličina je síla
- při libovolném virtuálním přetvoření pružného tělesa, nacházejícího se v rovnovážném stavu, je součet virtuální práce vnějších a vnitřních sil působících na těleso roven nule

$$L = L_e + L_i = 0 \rightarrow L_e = -L_i$$

$$\sum \bar{F}_i \cdot \delta_i + \sum \bar{M}_i \cdot \varphi_i = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

→ rovnice pro výpočet posunu a potočení průřezu rovinného nosníku

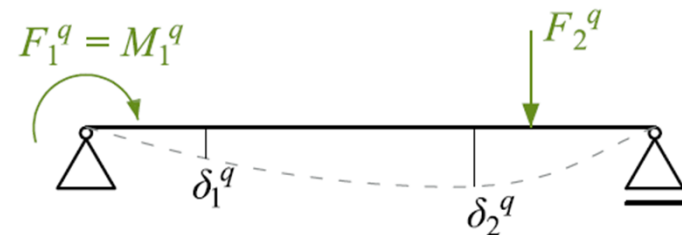
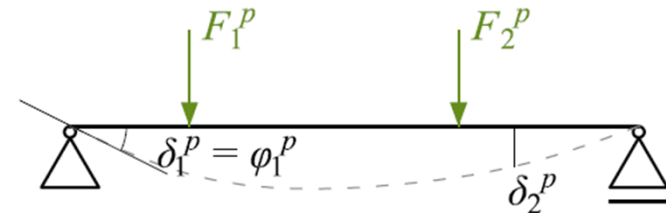
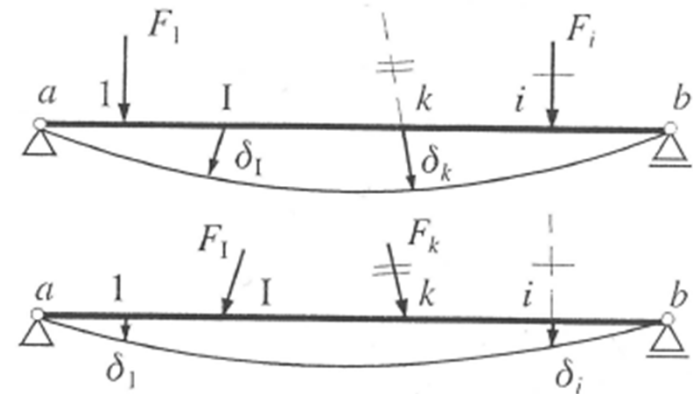
Virtuální práce jedné soustavy vnějších sil $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n$ na posunutích $\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_n$ vyvolaných druhou soustavou vnějších sil $F_1, \dots, F_k, \dots, F_m$ je rovna virtuální práci druhé soustavy sil na posunutích $\delta_1, \dots, \delta_i, \dots, \delta_n$ vyvolaných první soustavou sil

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta_i = \sum_{I=1}^m F_k \delta_k$$

Věta o vzájemnosti virtuálních prací platí i pro virtuální práci momentů

$$\sum_{i=1}^n M_i \varphi_i = \sum_{I=1}^m M_k \varphi_k$$

$$F_1^p \cdot \delta_1^q + F_2^p \cdot \delta_2^q = M_1^q \cdot \varphi_1^p + F_2^q \cdot \delta_2^p$$

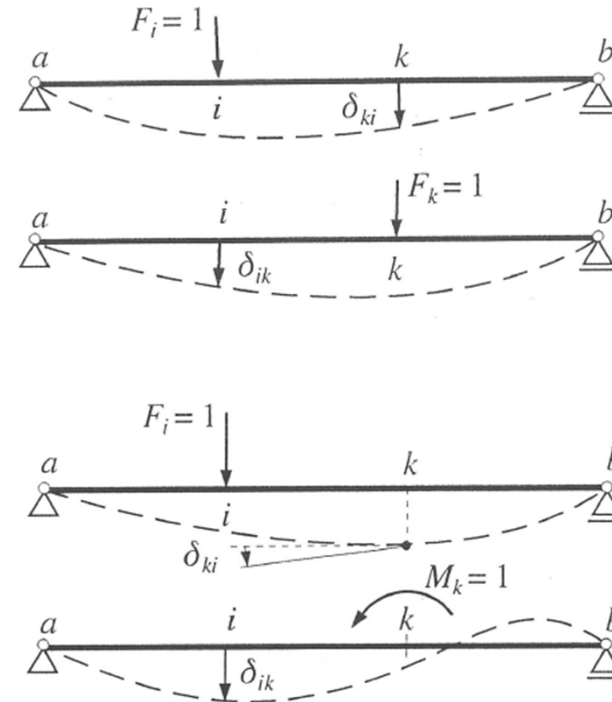
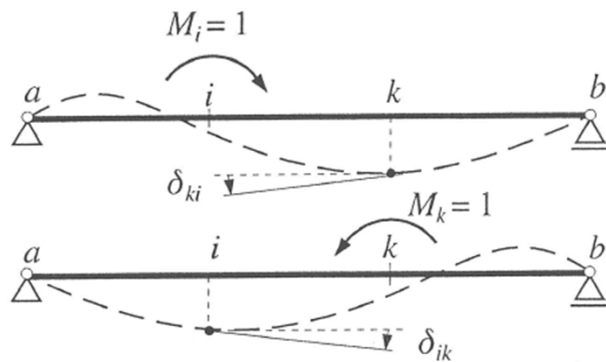


Zvláštní případ Bettiho věty

- ukazuje na **vzájemnost posunutí (pootočení) dvou libovolných průřezů** pro případ kdy každá soustava sil je reprezentována pouze **jedním jednotkovým zatížením** (silou nebo momentem)

$$F_i \cdot \delta_{ik} = F_k \cdot \delta_{ki}$$

$$F_i = 1; F_k = 1 \rightarrow \delta_{ik} = \delta_{ki}$$

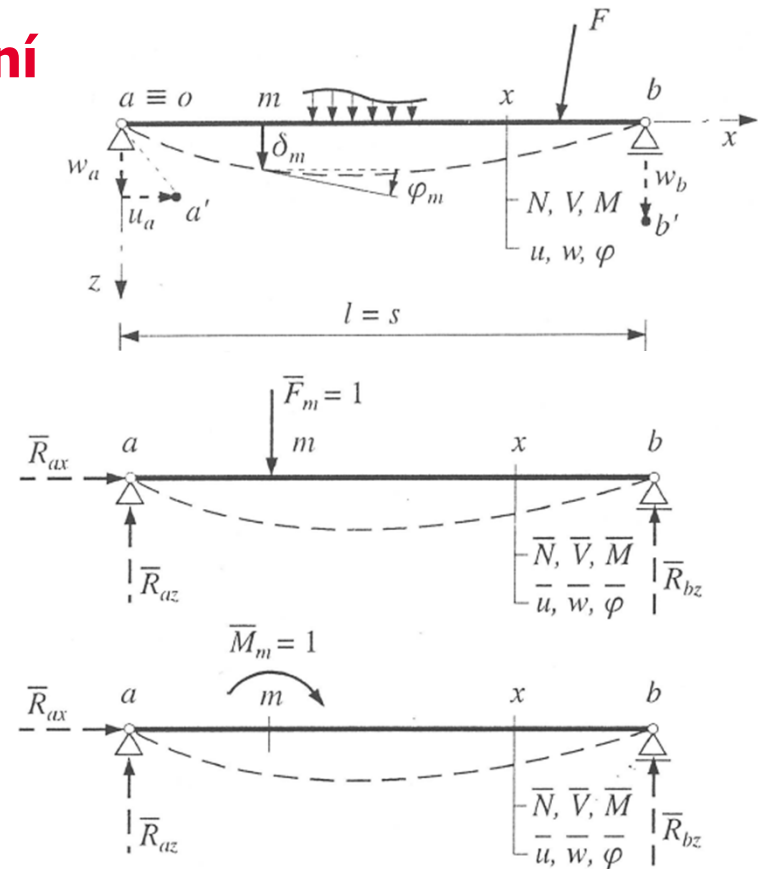


- výpočet **přetvoření průřezu** pomocí **principu virtuálních prací**
- spojení Bettiho a Maxwellovy věty s principem virtuálních prací
- uvažujeme **jednotkové virtuální zatížení** (síla nebo moment)
- virtuální zatížení umístíme **do místa** a **ve směru** hledané deformace průřezu nosníku
- pak pro $\overline{F}_m = 1$

$$\overline{F}_m \cdot \delta_m =$$

$$\delta_m = \int_0^l \frac{N\overline{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\overline{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\overline{M}}{EI} dx$$

Maxwell-Mohrův vzorec



Maxwell-Mohrův vzorec

$$\delta_m = \int_0^l \frac{N\bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \kappa \frac{V\bar{V}}{GA} dx + \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

N, V, M – vnitřní síly od skutečného zatížení

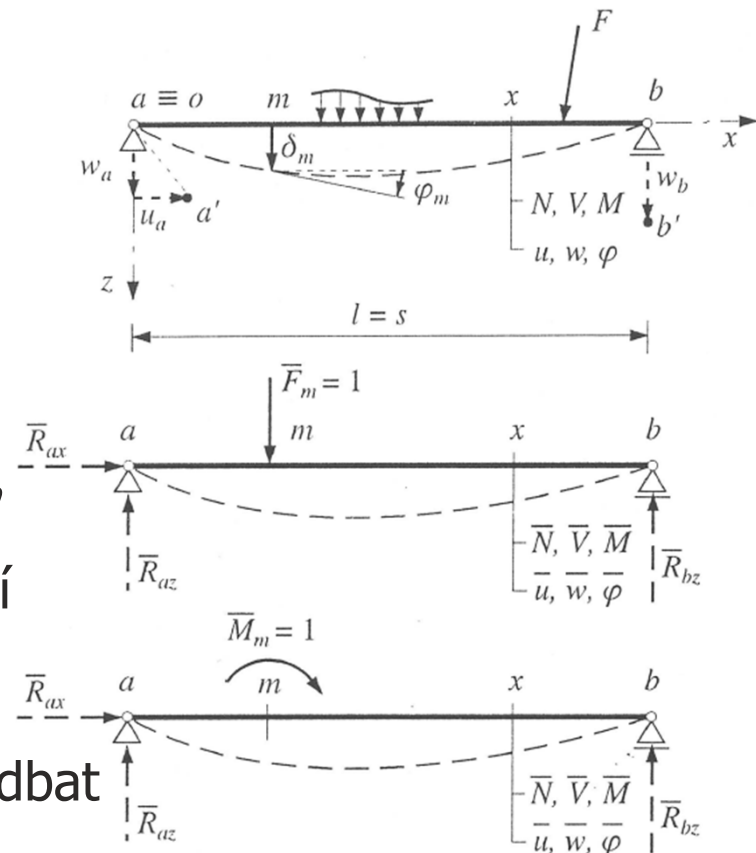
$\bar{N}, \bar{V}, \bar{M}$ – vnitřní síly od virtuálního zatížení
($\bar{F}_m = 1$) v umístěného v průřezu m

Praktické úlohy – ohýbané nosníky – největší podíl na velikosti celkové virtuální práce má **ohybový moment**,

vliv normálových a posouvajících sil lze zanedbat

$$\delta_m = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

pro nosník konstantního průřezu $\delta_m = \frac{1}{EI} \int_0^l M\bar{M} dx$



Jak spočítat $\int_0^l M \bar{M} dx$?

- analytická integrace
- numerická integrace (např. Simpsonovo pravidlo)
- Vereščaginovo pravidlo
- tabulky

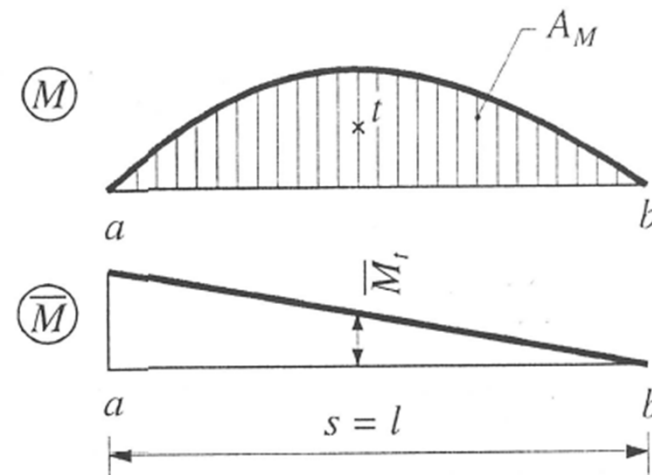
Vereščaginovo pravidlo

$$\int_0^l M \bar{M} dx = A_M \cdot \bar{M}_t$$

A_M – plocha momentového obrazce M

\bar{M}_t – hodnota momentu \bar{M} v místě
těžiště momentového obrazce M

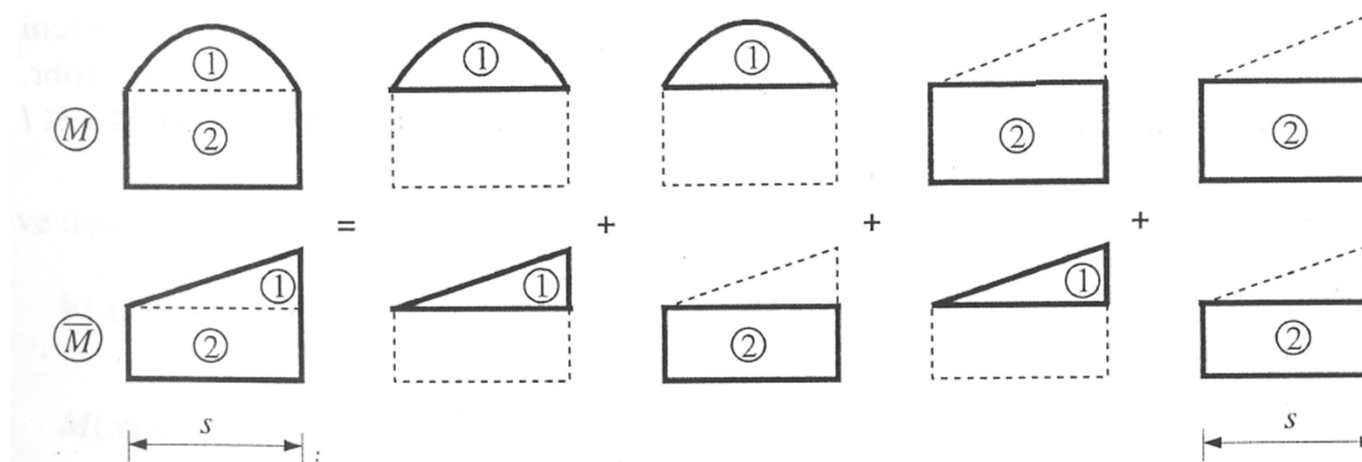
pozn. lze použít i pro funkce normálových a posouvajících sil



Omezující podmínky

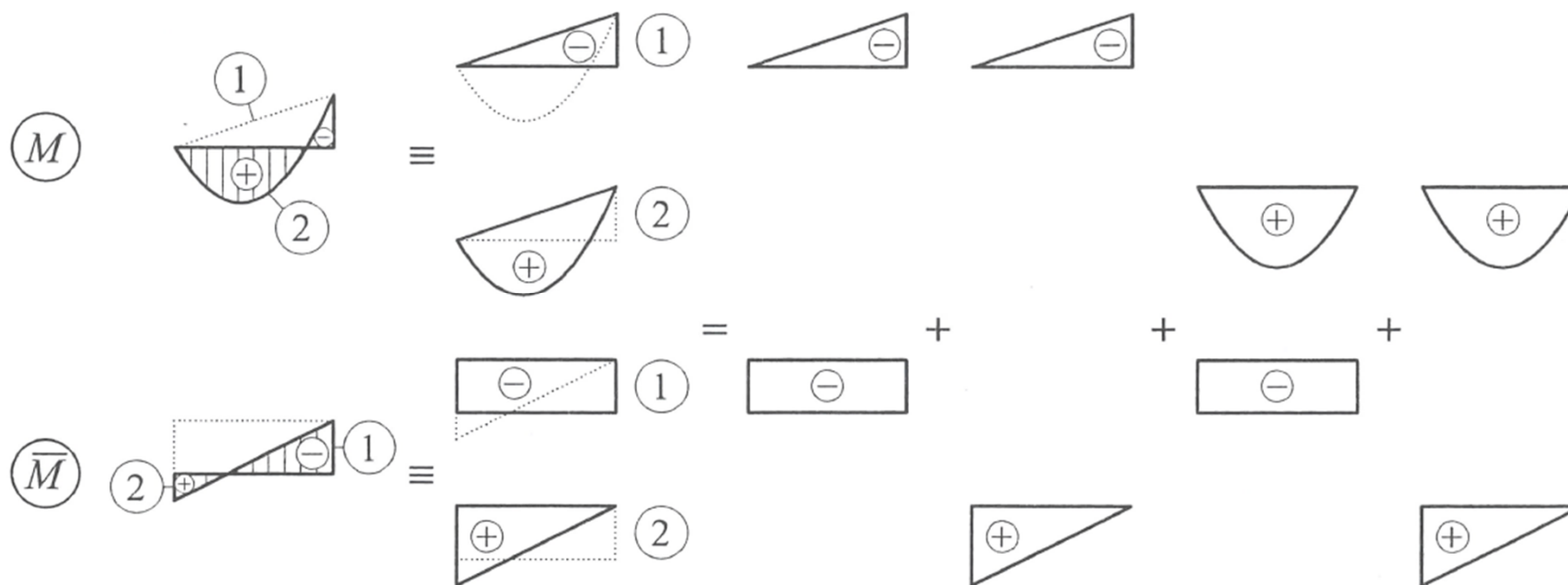
- jedna z funkcí musí být **konstantní** nebo **lineární**
- obě funkce musí být **spojité** na daném intervalu
- **plocha** se určí **pod křivkou vyššího řádu**
- pořadnice pod těžištěm odečteny z **konstantní** nebo **lineární** funkce

Složitější momentové obrazce (funkce) lze rozdělit na jednodušší obrazce a využít principu superpozice



FAST VEREŠČAGINOVO PRAVIDLO

Složitější momentové obrazce (funkce) lze rozdělit na jednodušší obrazce a využít principu superpozice

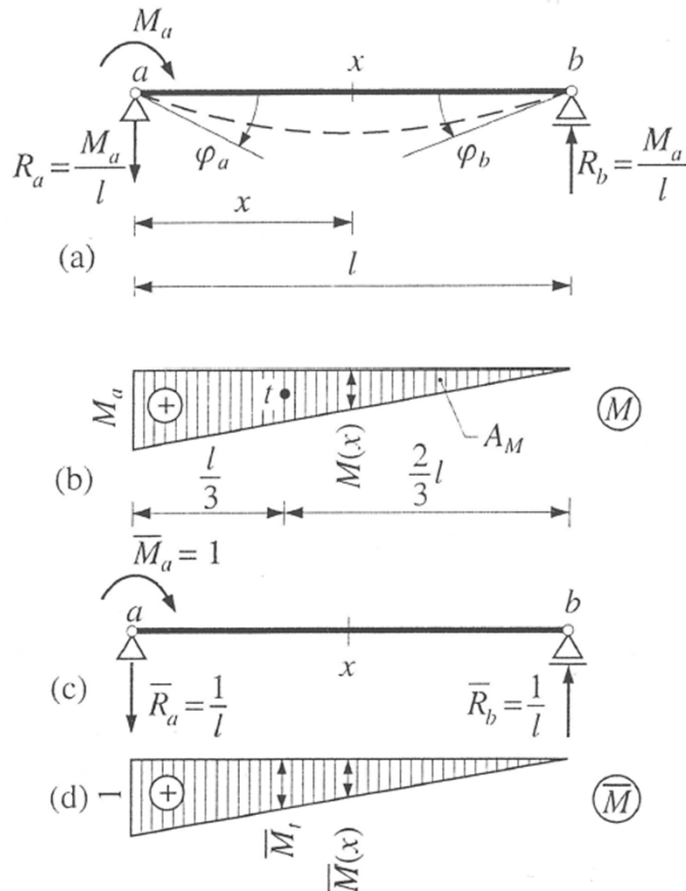


FAST TABULKY

Zatěž. případ	M	\bar{M}_a	\bar{M}_b	\bar{M}
1		$\frac{1}{2} M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{6} M_a (2\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$
2		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{6} M_b (\bar{M}_a + 2\bar{M}_b) l$
3		$\frac{1}{2} (M_a + M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (2M_a + M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} [\bar{M}_a (2M_a + M_b) + \bar{M}_b (M_a + 2M_b)] l$
4		$\frac{1}{2} (M_a - M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} (2M_a - M_b) \bar{M}_a l$	$\frac{1}{6} [\bar{M}_a (2M_a - M_b) + \bar{M}_b (M_a - 2M_b)] l$
5		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{6} \bar{M}_a M_c (l + x')$	$\frac{1}{6} [\bar{M}_a (l + x') + \bar{M}_b (l + x)] M_c$
6		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_c (x - x')$	$\frac{1}{6l} \bar{M}_a M_c (l^2 - 3x'^2)$	$\frac{M_c}{6l} [\bar{M}_b (3x'^2 - l^2) - \bar{M}_a (3x'^2 - l^2)]$
7		$M_a \bar{M}_a l$	$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{2} (\bar{M}_a + \bar{M}_b) M_a l$
8		$\frac{2}{3} \bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_c l$	$\frac{1}{3} M_c (\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$
9		$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{12} M_a (3\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$
10		$\frac{1}{3} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12} M_b (\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) l$
11		$\frac{2}{3} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{5}{12} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{12} M_a (5\bar{M}_a + 3\bar{M}_b) l$
12		$\frac{2}{3} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{12} M_b (3\bar{M}_a + 5\bar{M}_b) l$
13		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_a x$	$\frac{1}{6} \bar{M}_a M_a \frac{x}{l} (3l - x)$	$\frac{M_a}{6} \cdot \frac{x}{l} [\bar{M}_a (3l - x) + \bar{M}_b x]$
14		$\frac{1}{2} \bar{M}_a M_b x'$	$\frac{1}{6} \bar{M}_a M_b \frac{x'^2}{l}$	$\frac{M_b}{6} \cdot \frac{x'}{l} [\bar{M}_b (3l - x') + \bar{M}_a x']$
15		$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{1}{20} \bar{M}_a M_b l$	$\frac{M_b}{20} (\bar{M}_a + 4\bar{M}_b) l$
16		$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{1}{5} \bar{M}_a M_a l$	$\frac{M_a}{20} (4\bar{M}_a + \bar{M}_b) l$

Zatěž. případ	M	\bar{M}_a	\bar{M}_b	\bar{M}
17		$\frac{\bar{M}_a}{8} (M_a + 3M_c + 3M_d + M_b) l$	$\frac{\bar{M}_a}{120} (13M_a + 36M_c + 9M_d + 2M_b) l$	$\frac{l}{120} [\bar{M}_a \cdot (13M_a + 36M_c + 9M_d + 2M_b) + \bar{M}_b \cdot (2M_a + 9M_c + 36M_d + 13M_b)]$
Zatěž. případ	M			
18		$\frac{1}{6} \bar{M}_c M_a (l + u)$	$\frac{1}{3} \bar{M}_c M_a l$	$\frac{1}{4} \bar{M}_a M_a l$
19		$\frac{1}{6} \bar{M}_c M_b (l + u)$	$\frac{1}{3} \bar{M}_c M_b l$	$\frac{1}{12} \bar{M}_a M_b l$
20		$\frac{\bar{M}_c}{6} [M_a (l + u) + M_b (l + u)]$	$\frac{1}{3} \bar{M}_c (M_a + M_b) l$	$\frac{1}{12} \bar{M}_a (3M_a + M_b) l$
21		$\frac{\bar{M}_c}{6} [M_a (l + u) - M_b (l + u)]$	$\frac{1}{3} \bar{M}_c (M_a - M_b) l$	$\frac{1}{12} \bar{M}_a (3M_a - M_b) l$
22		$\frac{\bar{M}_c M_c l}{6ux'} \cdot [2ux' - (x' - u)^2]$ pro $x < u$; $\frac{\bar{M}_c M_c l}{6ux} \cdot [2ux - (u - x')^2]$ pro $x > u$	$\frac{\bar{M}_c M_c}{3l} (l^2 + xx')$	$\frac{\bar{M}_a M_c}{12l} (3lx' + x^2)$
23		$\frac{\bar{M}_c M_c}{6} \left(l + u - \frac{3x'^2}{u} \right)$ pro $x > u$; $-\frac{\bar{M}_c M_c}{6} \left(l + u - \frac{3x'^2}{u} \right)$ pro $x < u$	$-\frac{\bar{M}_c M_c}{3l} \cdot (l^3 - 6lx^2 + 4x^3)$	$\frac{\bar{M}_a M_c}{12l^2} (l^3 - 4x^3)$

Stanovte pootočení φ_a a φ_b prostého nosníku dle obrázku:



$$M(x) = M_a - R_a \cdot x = M_a - \frac{M_a}{l}x = M_a \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

potočení průřezu φ_a

$$\bar{M}(x) = 1 - R_a \cdot x = 1 - \frac{x}{l}$$

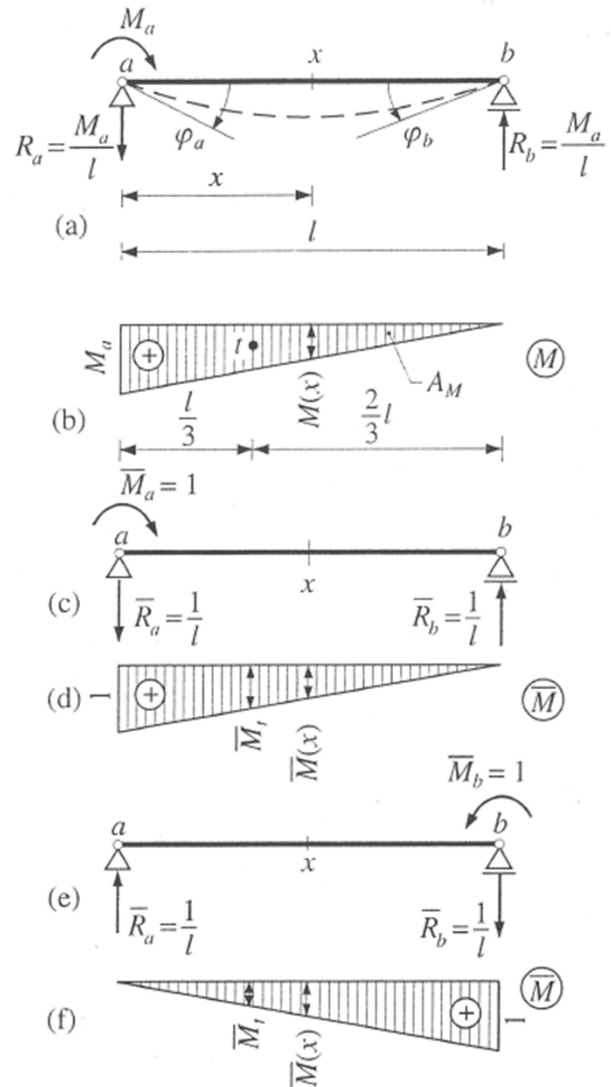
analytická integrace

$$\varphi_a = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x)\bar{M}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^l M_a \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^l M_a \left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) dx =$$

$$= \frac{M_a}{EI} \left[x - \frac{2x^2}{2l} + \frac{x^3}{3l^2} \right]_0^l = \frac{M_a}{EI} \left(l - l + \frac{l}{3} \right) = \frac{M_a l}{3EI}$$



Vereščaginovo pravidlo

potočení průřezu φ_a

$$\varphi_a = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) \bar{M}(x) dx = \frac{1}{EI} A_M \bar{M}_t$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} M_a l \cdot \frac{2}{3} \rightarrow \varphi_a = \frac{M_a l}{3EI}$$

potočení průřezu φ_b

$$\varphi_b = \frac{1}{EI} \int_0^l M(x) \bar{M}(x) dx = \frac{1}{EI} A_M \bar{M}_t$$

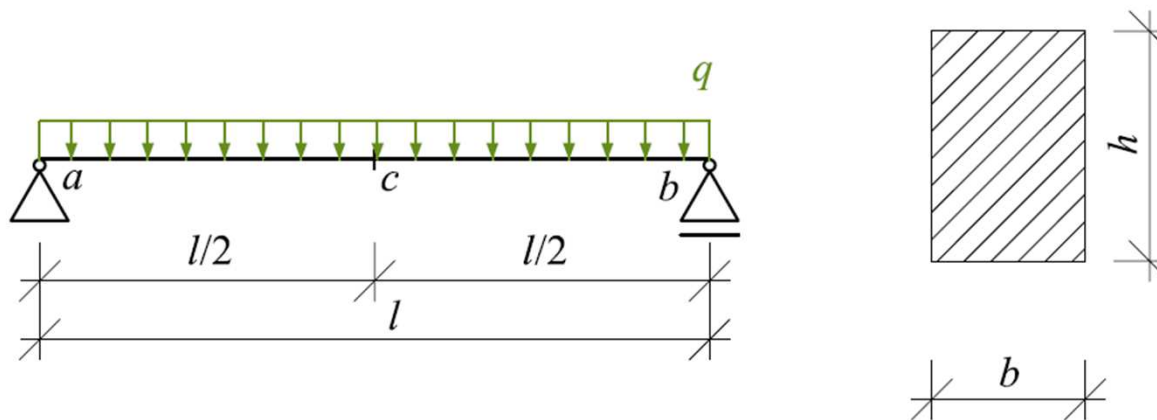
$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} M_a l \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \varphi_b = \frac{M_a l}{6EI}$$

pro jednotkový moment $M_a = 1$

$$\varphi_a = \frac{l}{3EI}; \quad \varphi_b = \frac{l}{6EI}$$

základní deformační úhly pro prostý nosník
s konstantním průřezem **PAMATOVAT!!!**

Určete průhyb w_c uprostřed rozpětí prostě podepřeného nosníku s konstantním průřezem $b \times h$. Uvažujte pouze vliv práce ohybových momentů.



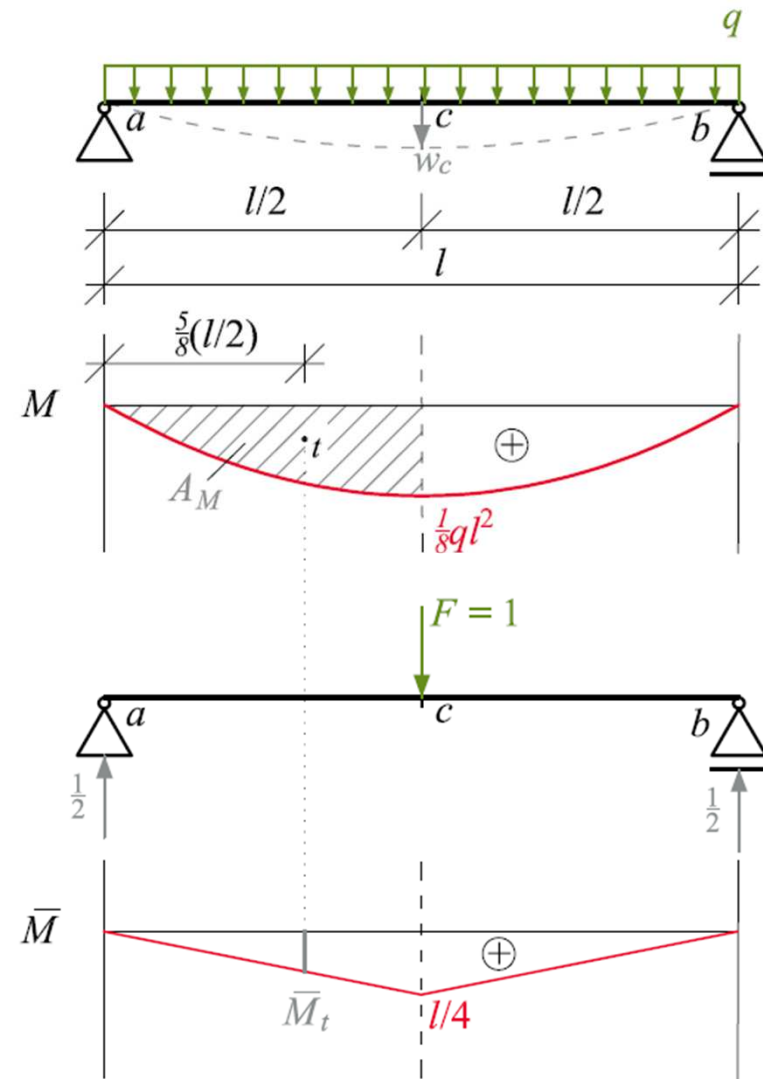
$$w_c = \frac{1}{EI} \int_0^l M \bar{M} dx = \frac{1}{EI} A_M \cdot \bar{M}_t$$

$$A_M = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{8} q l^2 = \frac{q l^3}{24}$$

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}} = \frac{\frac{5l}{8}}{\frac{l}{2}} \rightarrow \bar{M}_t = \frac{\frac{5l}{8} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{5l}{32}$$

$$w_c = \frac{1}{EI} A_M \cdot \bar{M}_t = \frac{1}{EI} \left(\frac{q l^3}{24} \cdot \frac{5l}{32} \right) \cdot 2 \rightarrow$$

$$w_c = \frac{5 q l^4}{384 EI}$$



$$w_c = \frac{1}{EI} \int_0^l M \bar{M} dx = \frac{1}{EI} A_M \cdot \bar{M}_t$$

$$A_{M1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{8} q l^2 = \frac{q l^3}{32}$$

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}} = \frac{\frac{2l}{32}}{M_{t1}} \rightarrow \bar{M}_{t1} = \frac{\frac{l}{32}}{\frac{l}{2}} = \frac{l}{6}$$

$$A_{M2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} q \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) = \frac{q l^3}{96}$$

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}} = \frac{\frac{1l}{22}}{M_{t2}} \rightarrow \bar{M}_{t2} = \frac{\frac{l}{44}}{\frac{l}{8}} = \frac{l}{8}$$

$$w_c = \frac{1}{EI} (A_{M1} \cdot \bar{M}_{t1} + A_{M2} \cdot \bar{M}_{t2}) \cdot 2 =$$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{q l^3}{32} \cdot \frac{l}{6} + \frac{q l^3}{96} \cdot \frac{l}{8} \right) \cdot 2 \rightarrow w_c = \frac{5 q l^4}{384 EI}$$

