VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

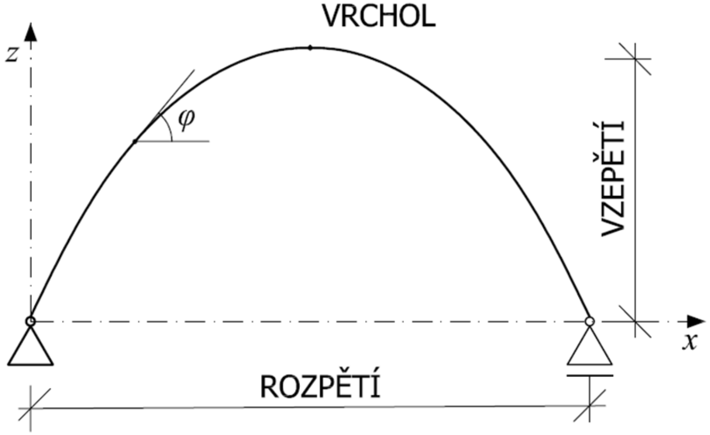
BDA015 Stavební mechanika 1

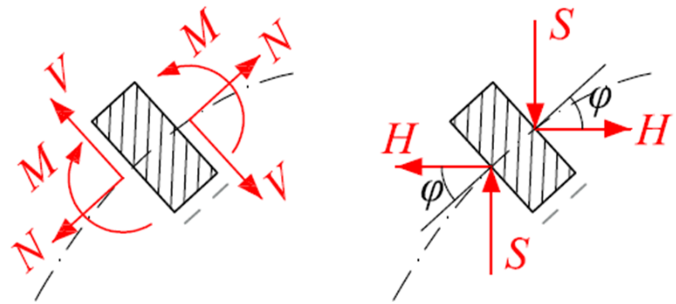
- Zakřivený prut – oblouk
- Jednoduchý prostorový nosník

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (hana.simonova@vut.cz)

ZAKŘIVENÝ ROVINNÝ NOSNÍK

- střednice ve tvaru rovinné křivky (část kružnice, elipsy, paraboly,…)





- normálová síla *N* je rovnoběžná ze střednicí (ve směru tečny)
- posouvající síla *V* je kolmá ke střednici (ve směru normály)
- výslednici vnitřních sil lze rozložit do horizontální *H* a vertikální složky *S*

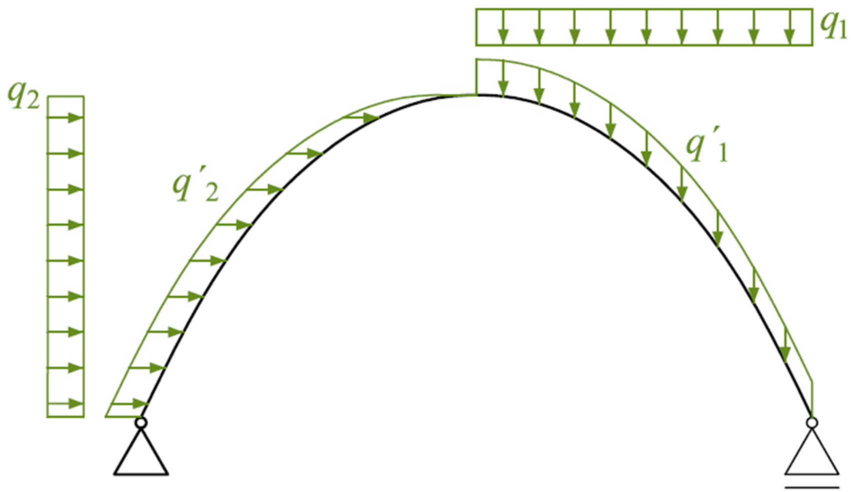
Transformační vztahy

$$N = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi$$

$$V = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi$$

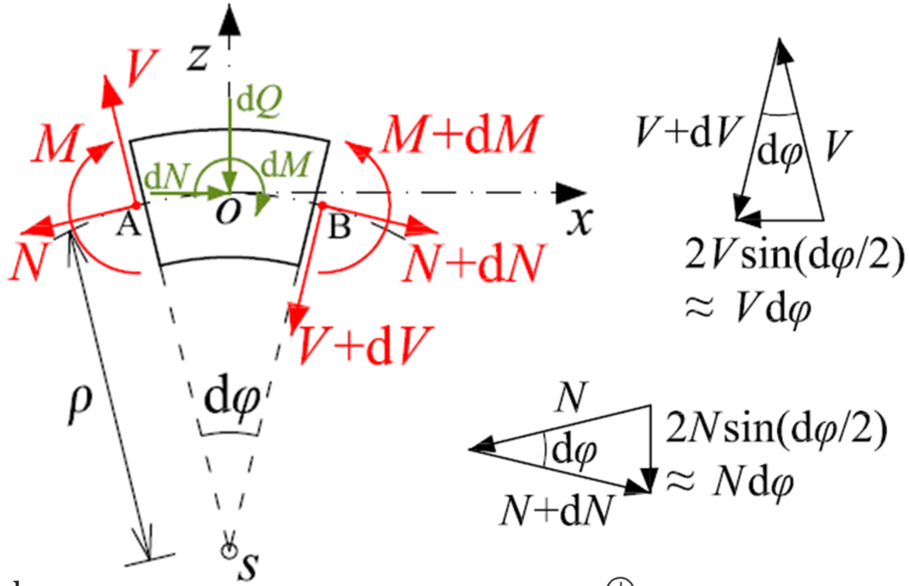
ZAKŘIVENÝ ROVINNÝ NOSNÍK

- vnitřní síly (ve zvolených průřezech, např. desetinách)
  - ve směru normál (kolmo) ke střednici v uvažovaných průřezech
  - svisle od vodorovné základny
- spojité zatížení
  - na jednotku svisle nebo vodorovně měřené délky
  - na jednotku délky střednice



ZAKŘIVENÝ ROVINNÝ NOSNÍK

Diferenciální podmínky rovnováhy



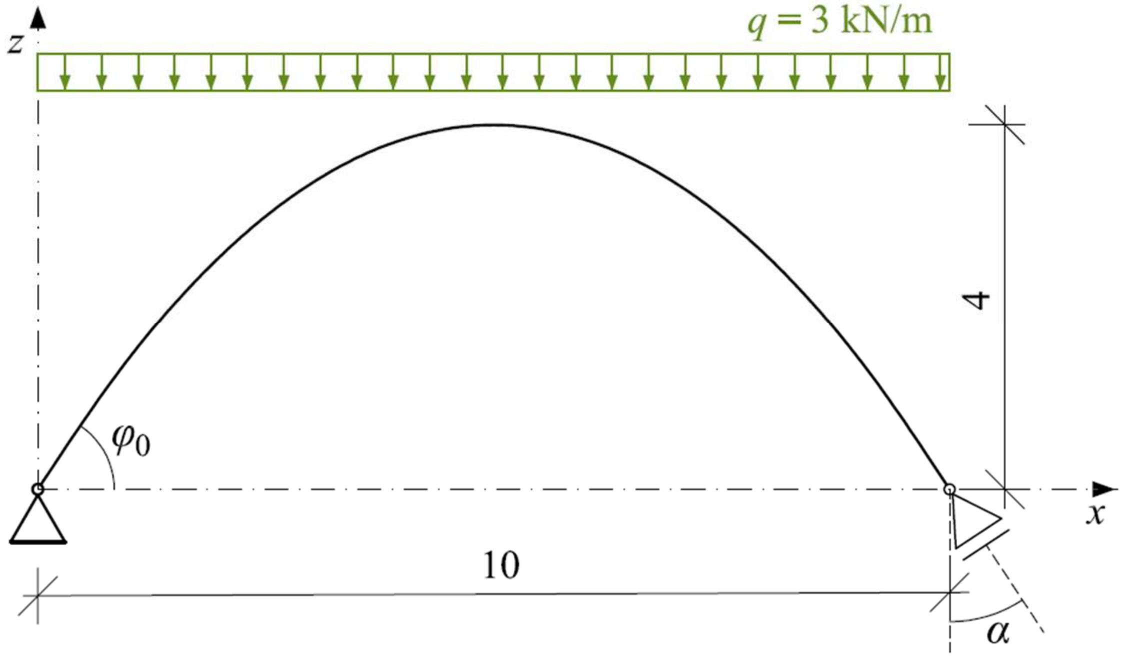
- $\mathrm{d}s = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi$
- $\mathrm{d}N = n \cdot \mathrm{d}s = n \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi$
- $\mathrm{d}Q = q \cdot \mathrm{d}s = q \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi$
- $\mathrm{d}M = m \cdot \mathrm{d}s = m \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi$
- $\cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 1;\ \sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = \mathrm{tg}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} \cong \frac{\mathrm{d}\varphi}{2}$
- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow -N \cdot \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + (N + \mathrm{d}N) \cdot \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} - V \cdot \mathrm{d}\varphi + n \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi = 0$ $\xrightarrow{\oplus}$

  $\rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varphi} = V - n \cdot \rho \rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \frac{V}{\rho} - n$
- $\sum F_{i,z} = 0 \rightarrow -V \cdot \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + (V + \mathrm{d}V) \cdot \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + N \cdot \mathrm{d}\varphi + q \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi = 0$ $\oplus$

  $\rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} = -N - q \cdot \rho \rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = -\frac{N}{\rho} - q$
- $\sum M_{i,B} = 0 \rightarrow -M + (M + \mathrm{d}M) - V \cdot \mathrm{d}s + q \cdot \mathrm{d}s \cdot \frac{\mathrm{d}s}{2} - m \cdot \mathrm{d}s = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = V + m$ $\oplus$

ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

Vykreslete průběhy vnitřních sil



- $z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2) = \frac{16}{100}(10x - x^2)$
- *f* – vzepětí; *l* – rozpětí; α – úhel odklonu

ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

1) Výpočet reakcí

- $\sum M_{ia} = 0$

  $-3 \cdot 10 \cdot 5 + R_{b,z} \cdot 10 = 0$

  $\rightarrow R_{b,z} = 15\ \text{kN}$

- $\sum M_{ib} = 0$

  $-R_{a,z} \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 5 = 0$

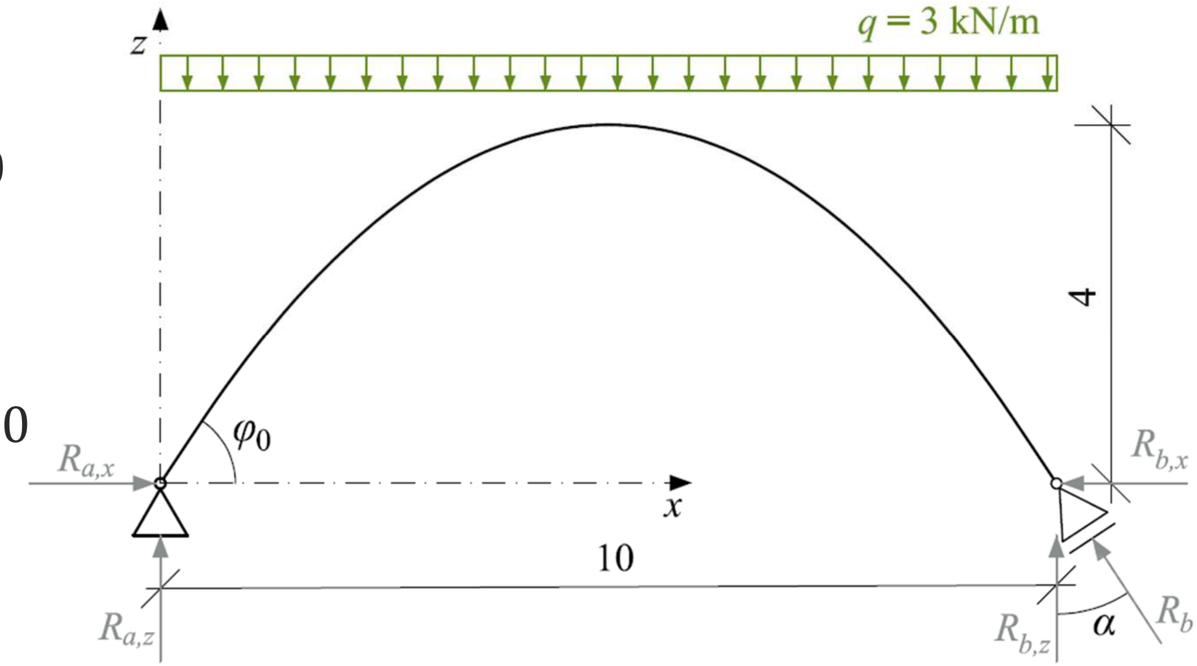
  $\rightarrow R_{a,z} = 15\ \text{kN}$

- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{R_{b,x}}{R_{b,z}}$

  $\rightarrow R_{b,x} = \operatorname{tg} \alpha\, R_{b,z}$

- $\sum F_{i,x} = 0$

  $R_{a,x} - R_{b,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = \operatorname{tg} \alpha\, R_{b,z}$



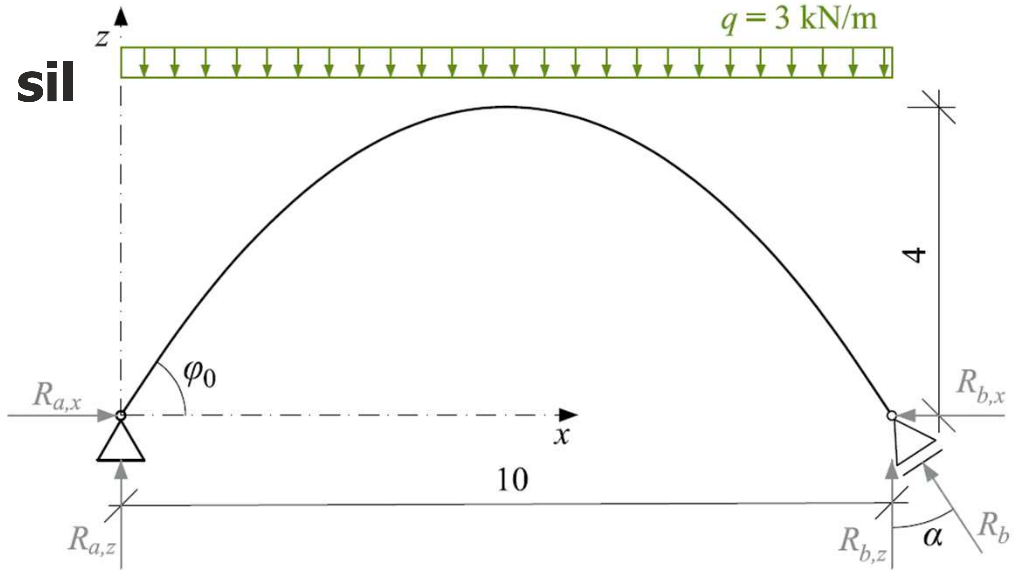
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}; \ \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

2) Složky výslednice vnitřních sil



- $H(x) = -\ R_{a,x} = -\ \operatorname{tg}\alpha\, R_{b,z}$

  $\rightarrow H(x) = -15 \cdot \operatorname{tg}\alpha$

- $S(x) = R_{a,z} - q \cdot x = 15 - 3x$

- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) =$

  $= \frac{16}{100}(10 - 2x) = 1{,}6 - 0{,}32x$

- $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1 + 2{,}56 - 1{,}024x + 0{,}1024x^2} = \sqrt{3{,}56 - 1{,}024x + 0{,}1024x^2}$

- $N(x) = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi = \frac{-15 \cdot \operatorname{tg}\alpha - (15 - 3x)\cdot(1{,}6 - 0{,}32x)}{\sqrt{3{,}56 - 1{,}024x + 0{,}1024x^2}}$

- $V(x) = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi = \frac{-15 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot (1{,}6 - 0{,}32x) + (15 - 3x)}{\sqrt{3{,}56 - 1{,}024x + 0{,}1024x^2}}$

- $M(x) = R_{a,z} \cdot x - R_{a,x} \cdot z - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 15 \cdot x - 15 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot z - 3 \cdot \frac{x^2}{2}$

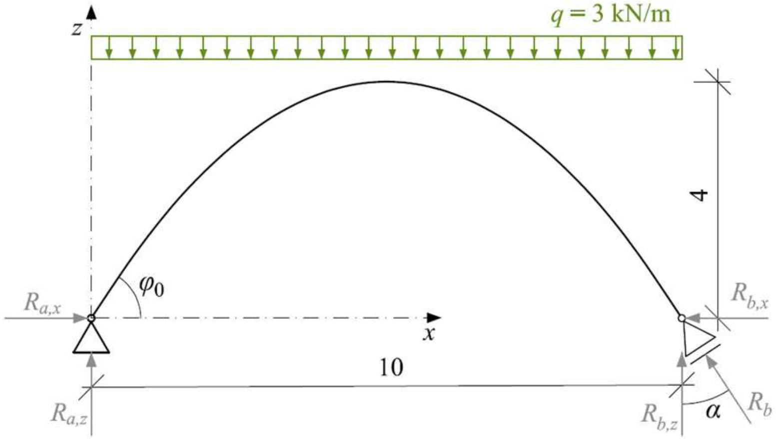
3) Složky výslednice vnitřních sil ve zvolených intervalech pro $\mathrm{tg}\alpha = 0$

x (m)	z (m)	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$H(x)$ (kN)	$S(x)$ (kN)	$N(x)$ (kN)	$V(x)$ (kN)	$M(x)$ (kN)
0	0	1,60	0,5300	0,8480	0	15	−12,72	7,95	0
1	1,44	1,28	0,6156	0,7880	0	12	−9,46	7,39	13,5
2	2,56	0,96	0,7214	0,6925	0	9	−6,23	6,49	24,0
3	3,36	0,64	0,8423	0,5391	0	6	−3,23	5,05	31,5
4	3,84	0,32	0,9524	0,3048	0	3	−0,91	2,86	36,0
5	4,00	0	1,0000	0	0	0	0	0	37,5

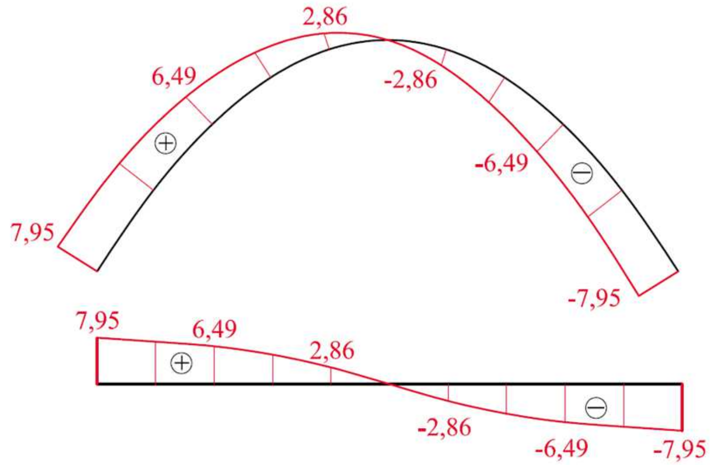
- $\mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}6 - 0{,}32x$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$; $\sin\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi}}$
- $H(x) = -15 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 0$; $S(x) = 15 - 3x$
- $N(x) = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi$; $V(x) = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi$;
  $M(x) = 15x - 15 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot z - 3 \cdot \frac{x^2}{2} = 15x - 3 \cdot \frac{x^2}{2}$

ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

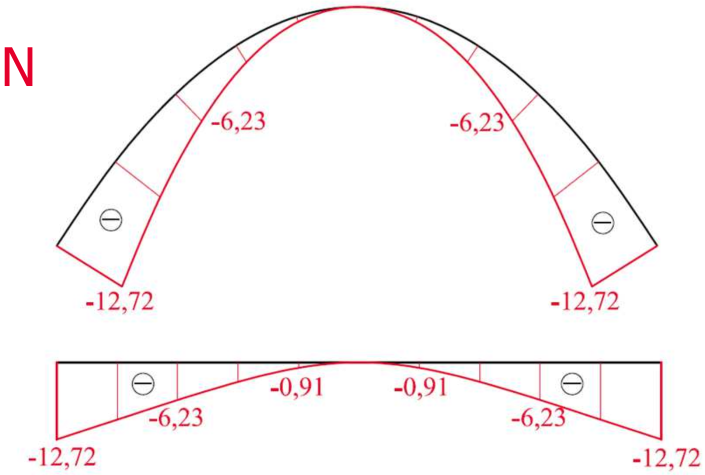
Průběhy vnitřních sil pro $\mathrm{tg}\alpha = 0$



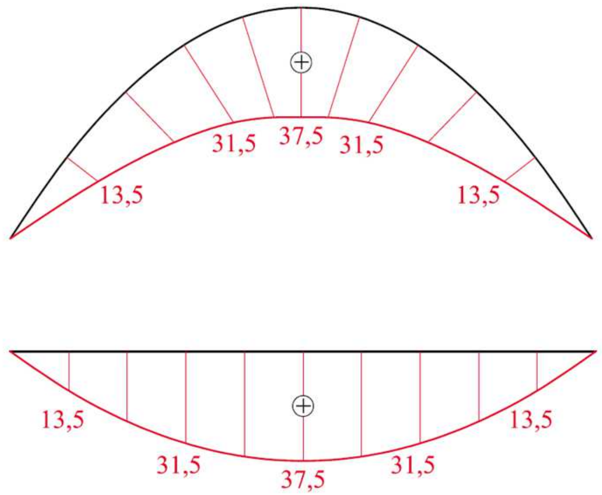
V



N



M



ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

4) Složky výslednice vnitřních sil ve zvolených intervalech pro $\operatorname{tg}\alpha = 0,625$

x (m)	z (m)	$\operatorname{tg}\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$H(x)$ (kN)	$S(x)$ (kN)	$N(x)$ (kN)	$V(x)$ (kN)	$M(x)$ (kN)
0	0	1,60	0,5300	0,8480	−9,375	15	−17,69	0	0
1	1,44	1,28	0,6156	0,7880	−9,375	12	−15,23	0	0
2	2,56	0,96	0,7214	0,6925	−9,375	9	−13,00	0	0
3	3,36	0,64	0,8423	0,5391	−9,375	6	−11,13	0	0
4	3,84	0,32	0,9524	0,3048	−9,375	3	−9,84	0	0
5	4,00	0	1,0000	0	−9,375	0	−9,375	0	0

- $\operatorname{tg}\varphi = 1,6 - 0,32x$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$; $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$
- $H(x) = -15 \cdot \operatorname{tg}\alpha$; $S(x) = 15 - 3x$
- $N(x) = H \cdot \cos\varphi - S \cdot \sin\varphi$; $V(x) = H \cdot \sin\varphi + S \cdot \cos\varphi$;

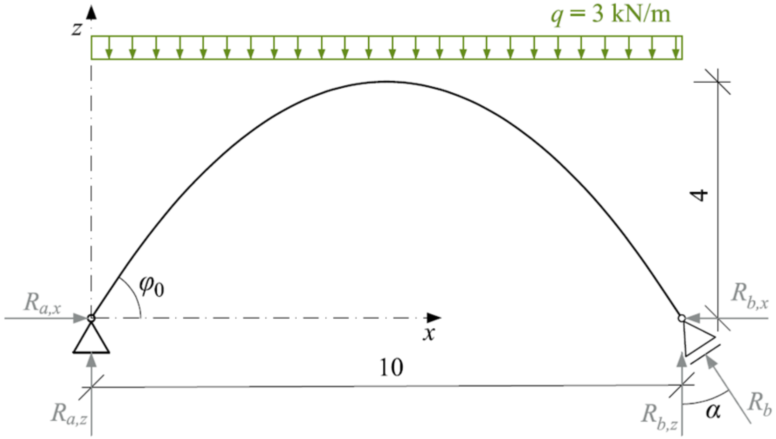
$$M(x) = 15x - 15 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot z - 3 \cdot \frac{x^2}{2}$$

ZAKŘIVENÝ NOSNÍK

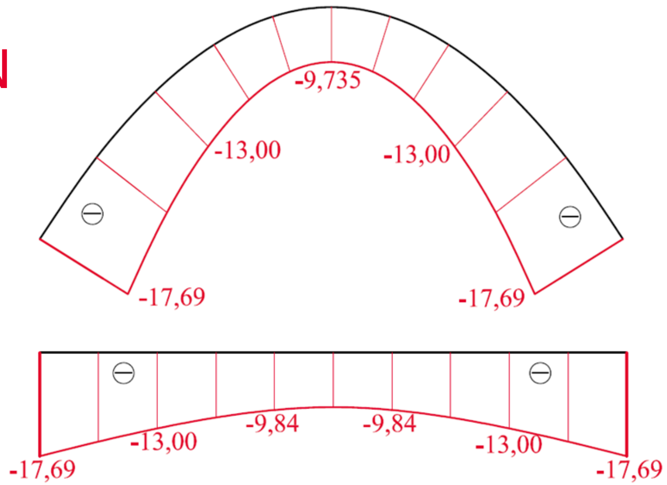
Průběhy vnitřních sil pro $\mathrm{tg}\alpha = 0$

V=0

M=0



N



STATICKÝ MOMENT SÍLY V PROSTORU

STATICKÝ MOMENT SÍLY K BODU

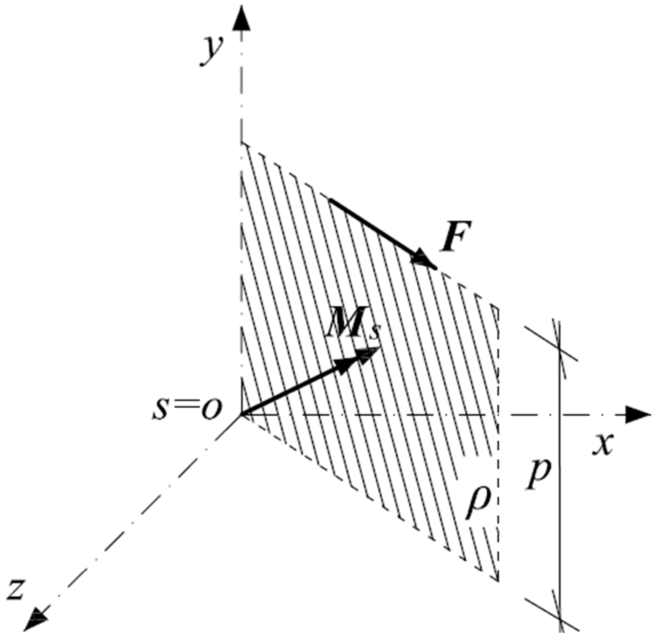
- roven statickému momentu síly v rovině
- $M_s = Fp$

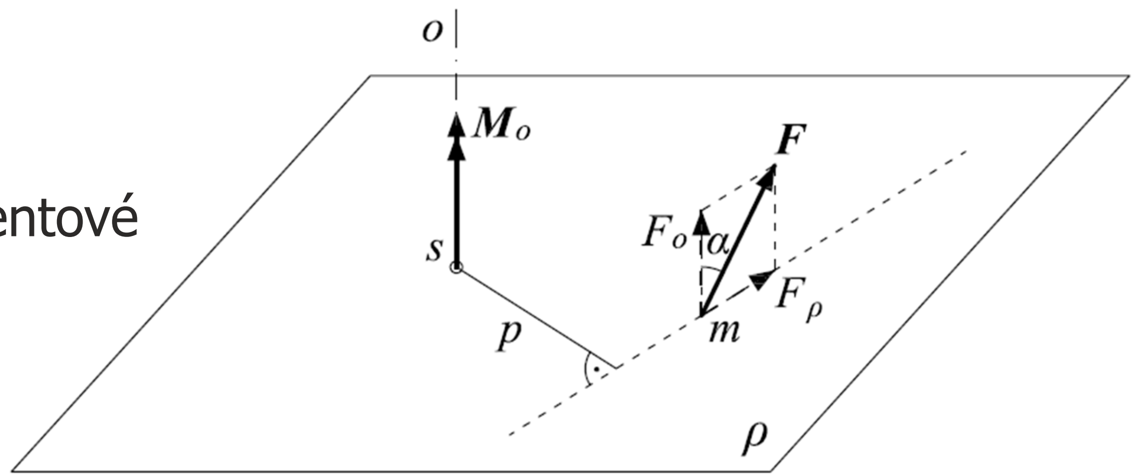
STATICKÝ MOMENT SÍLY K OSE

- rovina ρ kolmá k dané ose o
- m působiště síly F v rovině ρ
- $M_o = F_\rho p;\ F_\rho = F \sin \alpha$

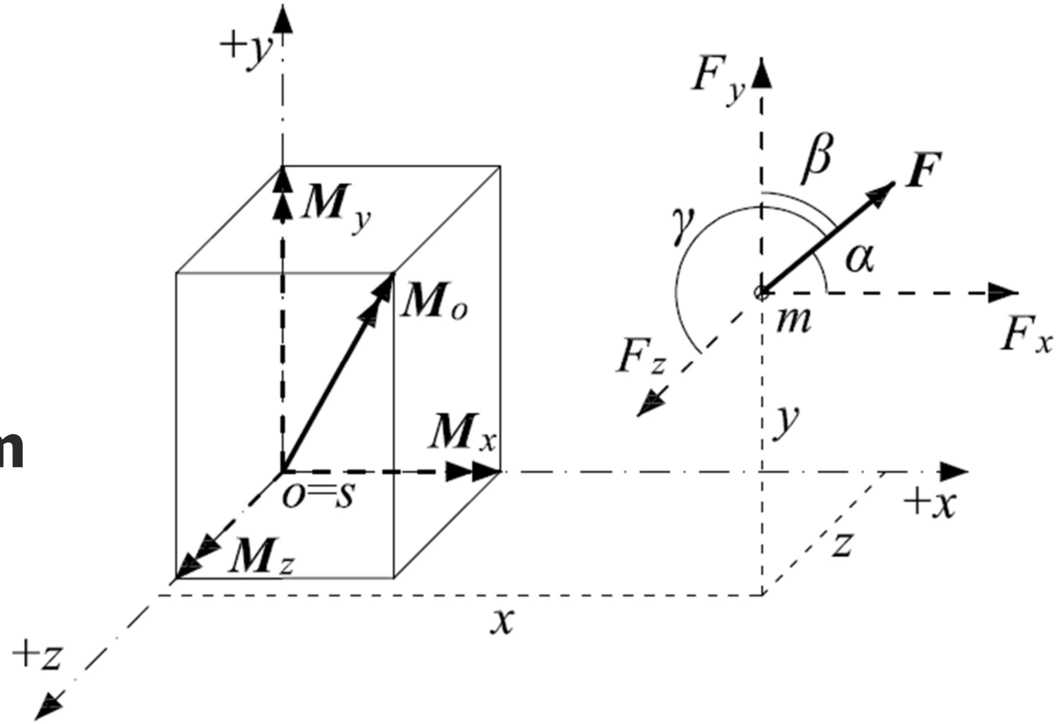
VARIGNONOVA VĚTA

staticky moment síly k momentové ose je roven algebraickému součtu statických momentů jejích složek k téže ose





STATICKÝ MOMENT SÍLY V PROSTORU



Pravoúhlé složky síly

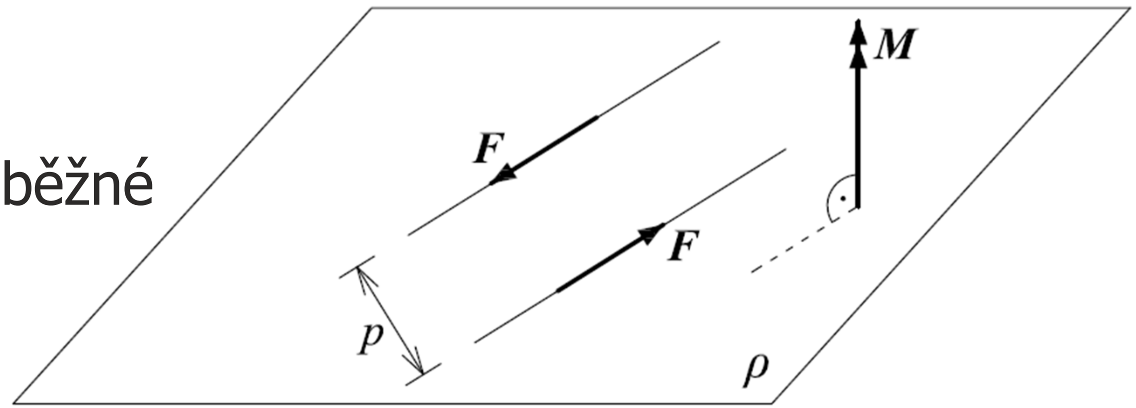
- $F_x = F\cos\alpha$
- $F_y = F\cos\beta$
- $F_z = F\cos\beta$

Statické momenty k osám

- $M_x = -F_y \cdot z + F_z \cdot y$
- $M_y = F_x \cdot z - F_z \cdot x$
- $M_z = -F_x \cdot y + F_y \cdot x$
- $M_x = -F\cos\beta \cdot z + F\cos\gamma \cdot y = F(y\cos\gamma - z\cos\beta)$
- $M_y = F\cos\alpha \cdot z - F\cos\beta \cdot x = F(z\cos\alpha - x\cos\beta)$
- $M_z = -F\cos\alpha \cdot y + F\cos\beta \cdot x = F(x\cos\beta - y\cos\alpha)$
- $M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

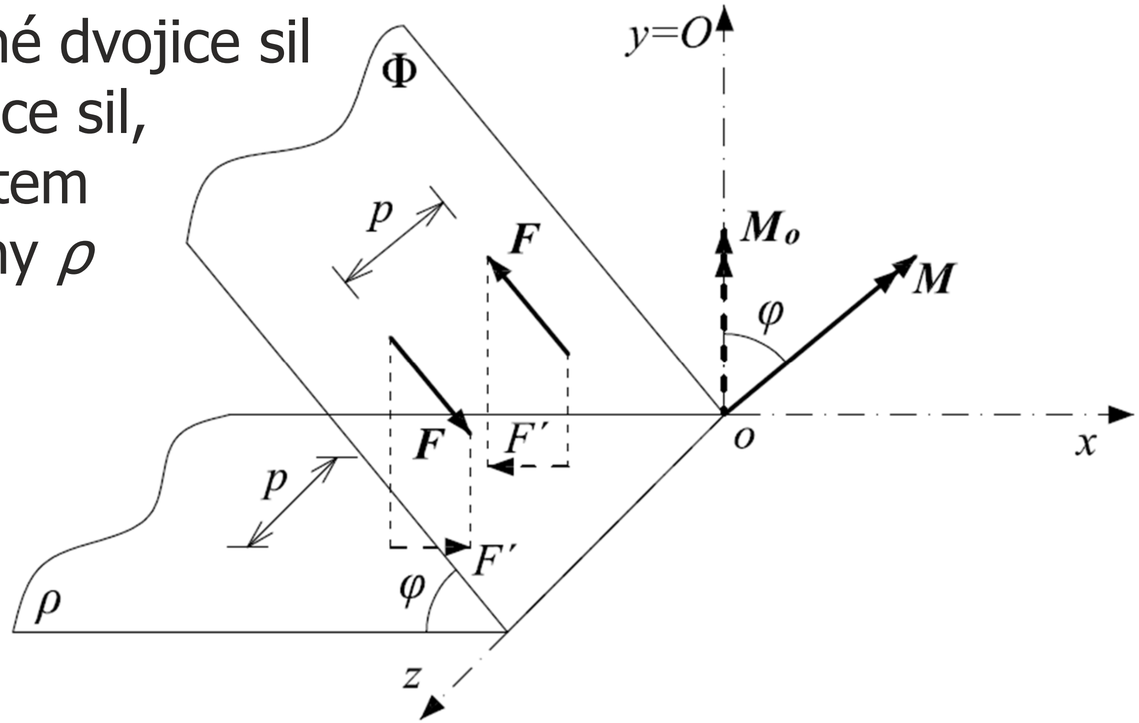
DVOJICE SIL V PROSTORU

- dvojice sil může působit v libovolné rovině
- výsledný účinek je volný vektor momentu ***M*** vztyčený v libovolném bodě roviny *ρ* dvojice sil kolmo k rovině *ρ*
- $M = F \cdot p$
- dvojici sil lze v její rovině *ρ* libovolně posouvat a otáčet
- dvojici sil o momentu ***M*** lze nahradit libovolnou jinou dvojicí v té samé rovině *ρ*, která má s původní dvojicí sil moment stejné velikosti a smyslu
- dvojici sil lze posunout do libovolné roviny rovnoběžné s rovinou *ρ*



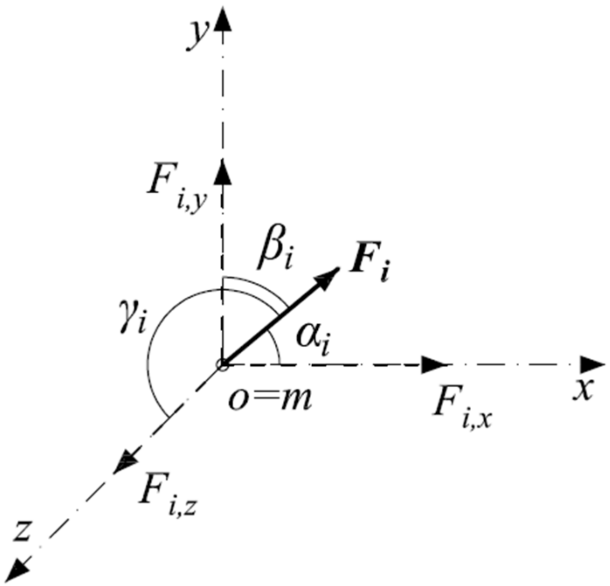
STATICKÝ MOMENT DVOJICE SIL K OSE

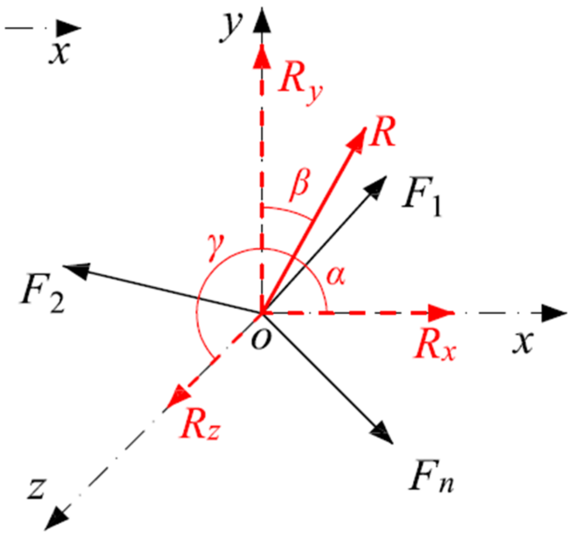
- statický moment M_o dvojice sil působící v rovině Φ k libovolné ose O v prostoru je roven průmětu vektoru $\boldsymbol{M}$ momentu dvojice sil do osy O
  $M_o = M\cos\varphi = Fp\cos\varphi$
- statický moment M_o dané dvojice sil je roven momentu dvojice sil, kterou obdržíme průmětem dané dvojice sil do roviny ρ kolmé k ose O
  $M_o = F'p = Fp\cos\varphi$



PROSTOROVÝ SVAZEK SIL

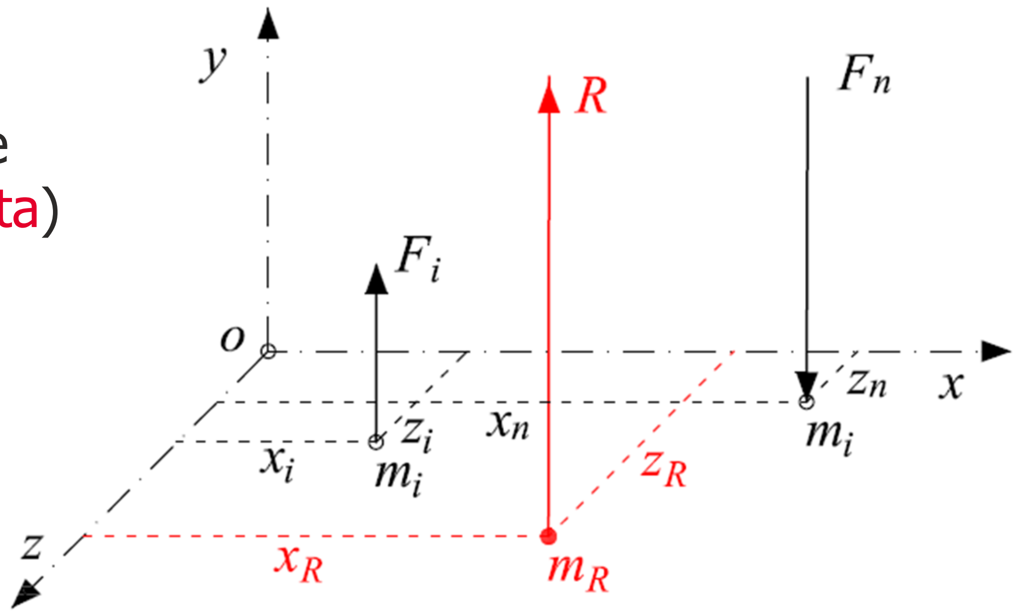
- soustava různosměrných sil $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$ se společným působištěm
- jednotlivé síly vztáhneme k souřadnicovým osám
- $F_{i,x} = F_i \cdot \cos \alpha_i$
- $F_{i,y} = F_i \cdot \cos \beta_i$
- $F_{i,z} = F_i \cdot \cos \gamma_i$
- $R_x = R \cdot \cos \alpha = \sum F_{i,x}$
- $R_y = R \cdot \cos \beta = \sum F_{i,y}$
- $R_z = R \cdot \cos \gamma = \sum F_{i,z}$
- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$





SOUSTAVA ROVNOBĚŽNÝCH SIL

- zvláštní případ obecné prostorové soustavy sil
- zvláštní případ soustavy sil působící na bod v prostoru (v nekonečnu)
- výslednice $R = \sum F_i$
- poloha výslednice
  podle momentové ekvivalence
  k osám x a z (Varignonova věta)
- $M_x = -R \cdot z_R = \sum -F_i \cdot z_i$
- $M_z = R \cdot x_R = \sum F_i \cdot x_i$
- $x_R = \frac{M_z}{R} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}$
- $z_R = \frac{-M_x}{R} = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\sum F_i}$



OBECNÁ PROSTOROVÁ SOUSTAVA SIL

- paprsky sil neleží v jediné rovině a neprocházejí jedním bodem
- redukce sil k počátku souřadnicového systému
  → přidání dvojice sil o momentu, který odpovídá statickému momentu dané síly k počátku souřadnicového systému
- určení pravoúhlých složek sil $F_{i,x}, F_{i,y}, F_{i,z}$
- prostorový svazek vektorů sil $\boldsymbol{F}_i$ a vektorů momentů $\boldsymbol{M}_{i,o}$
- vektor výslednice $\boldsymbol{R}$ prostorového svazku sil

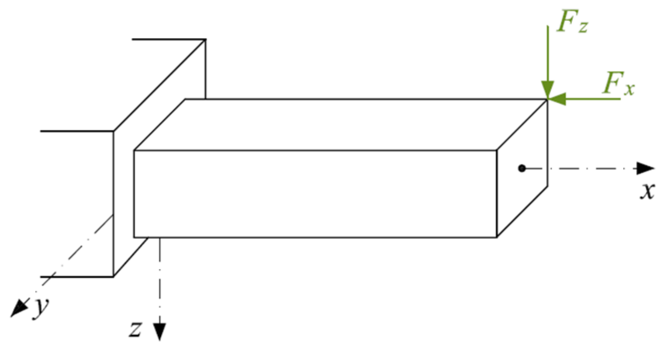
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

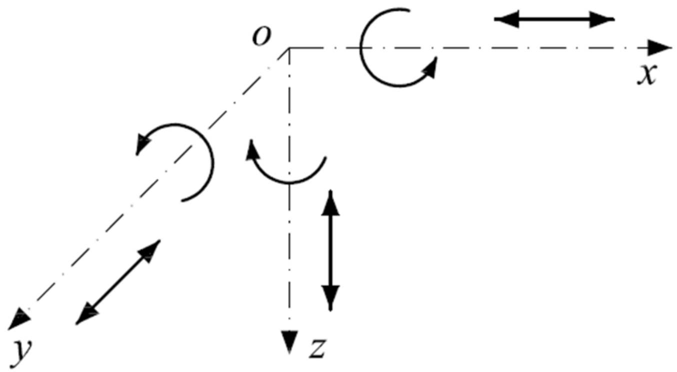
- výsledný účinek prostorového svazku momentů je dvojice sil o momentu

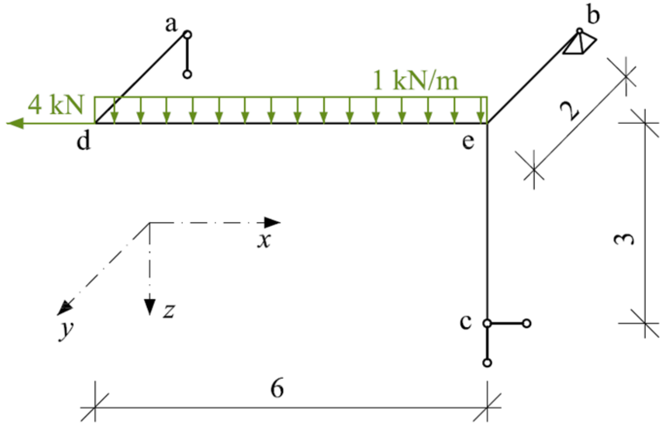
$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}$$

JEDNODUCHÝ PROSTOROVÝ NOSNÍK

- **prostorové namáhání**
  - prostorové zatížení
  - prostorové uspořádání střednice
- 6 stupňů volnosti



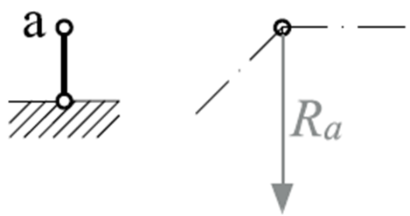




- a = 6 → **staticky určité podepření**, pokud je zároveň determinant statických podmínek rovnováhy D ≠ 0 → **kinematicky určité podepření**

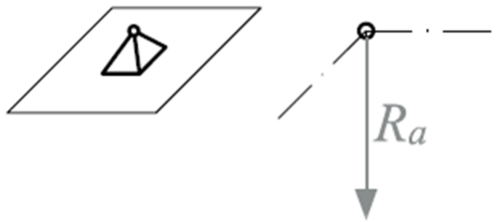
KYVNÝ PRUT

- odebírá 1 stupeň volnosti
- 1 silová reakce, která brání posunu ve směru osy kyvného prutu



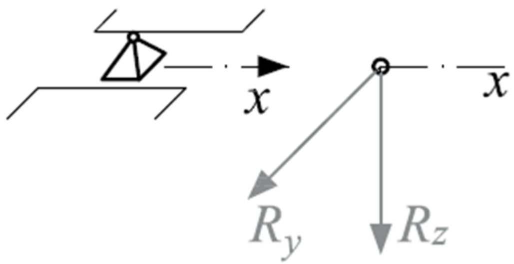
KULOVÝ KLOUB POSUVNÝ PO PLOŠE

- odebírá 1 stupeň volnosti
- 1 silová reakce, která brání posunu kolmo na plochu



KULOVÝ KLOUB POSUVNÝ PO PŘÍMCE

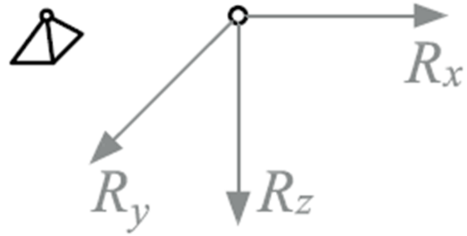
- odebírá 2 stupně volnosti
- 2 silové reakce



VNĚJŠÍ VAZBY V PROSTORU

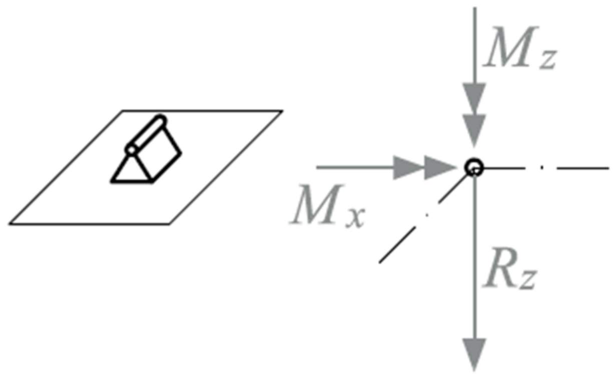
KULOVÝ KLOUB PEVNÝ

- odebírá 3 stupně volnosti
- 3 silové reakce



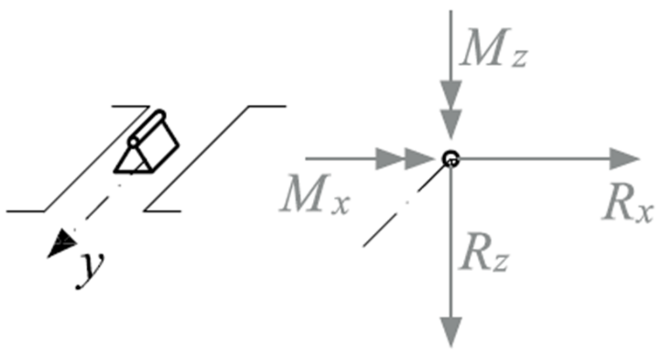
VÁLCOVÝ KLOUB POSUVNÝ PO PLOŠE

- odebírá 3 stupeň volnosti
- 1 silová a 2 momentové reakce



VÁLCOVÝ KLOUB POSUVNÝ OSE Y

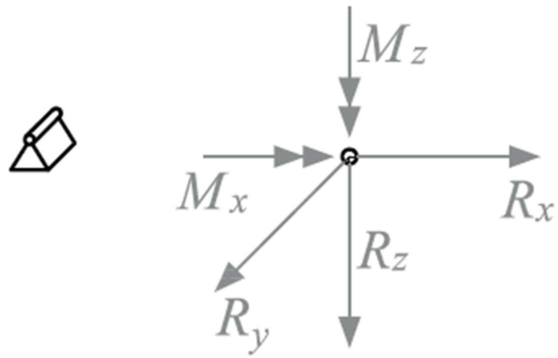
- odebírá 4 stupně volnosti
- 2 silové a 2 momentové reakce



VNĚJŠÍ VAZBY V PROSTORU

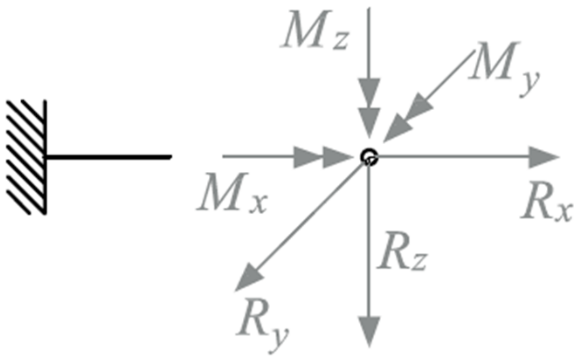
VÁLCOVÝ KLOUB PEVNÝ

- odebírá 5 stupňů volnosti
- 3 silové a 2 momentové reakce



VETKNUTÍ

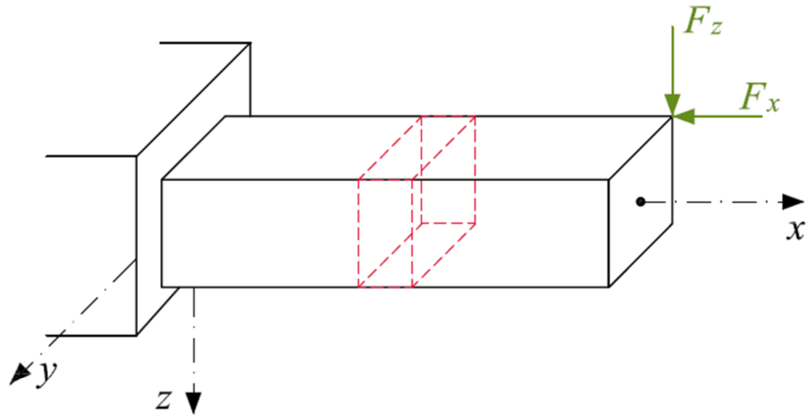
- odebírá 6 stupňů volnosti
- 3 silové a 3 momentové reakce

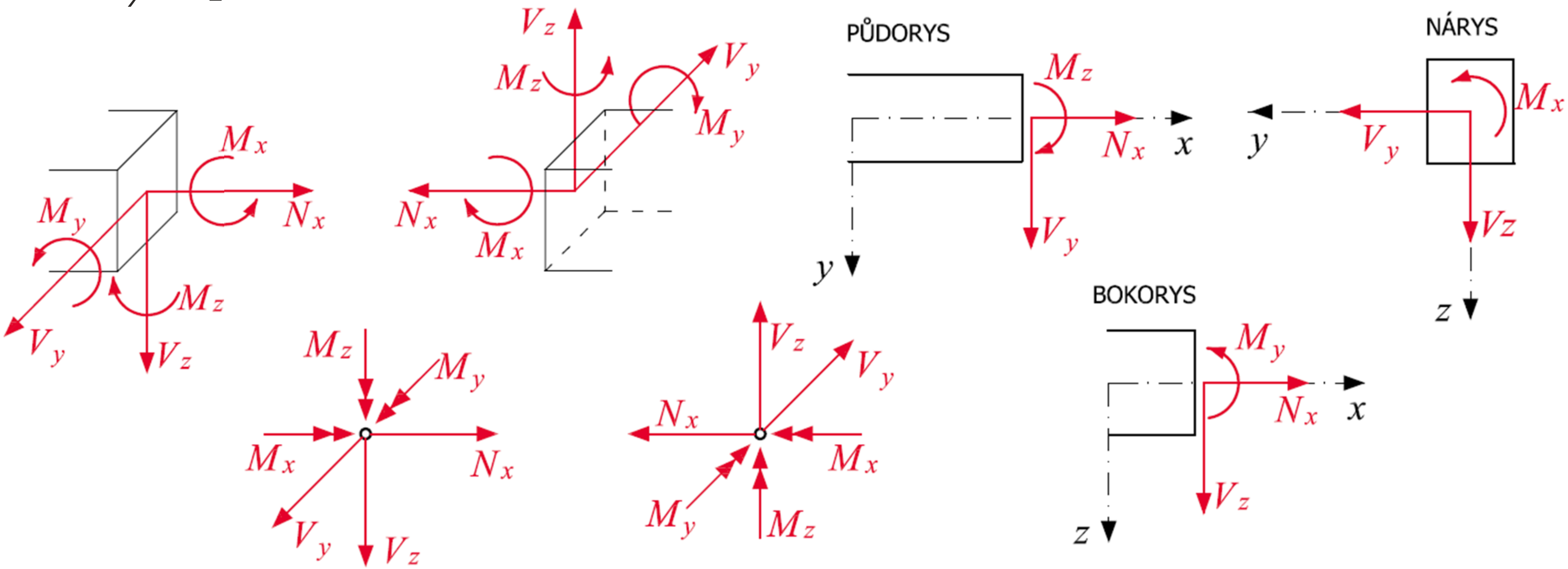


PROSTOROVĚ NAMÁHANÝ NOSNÍK

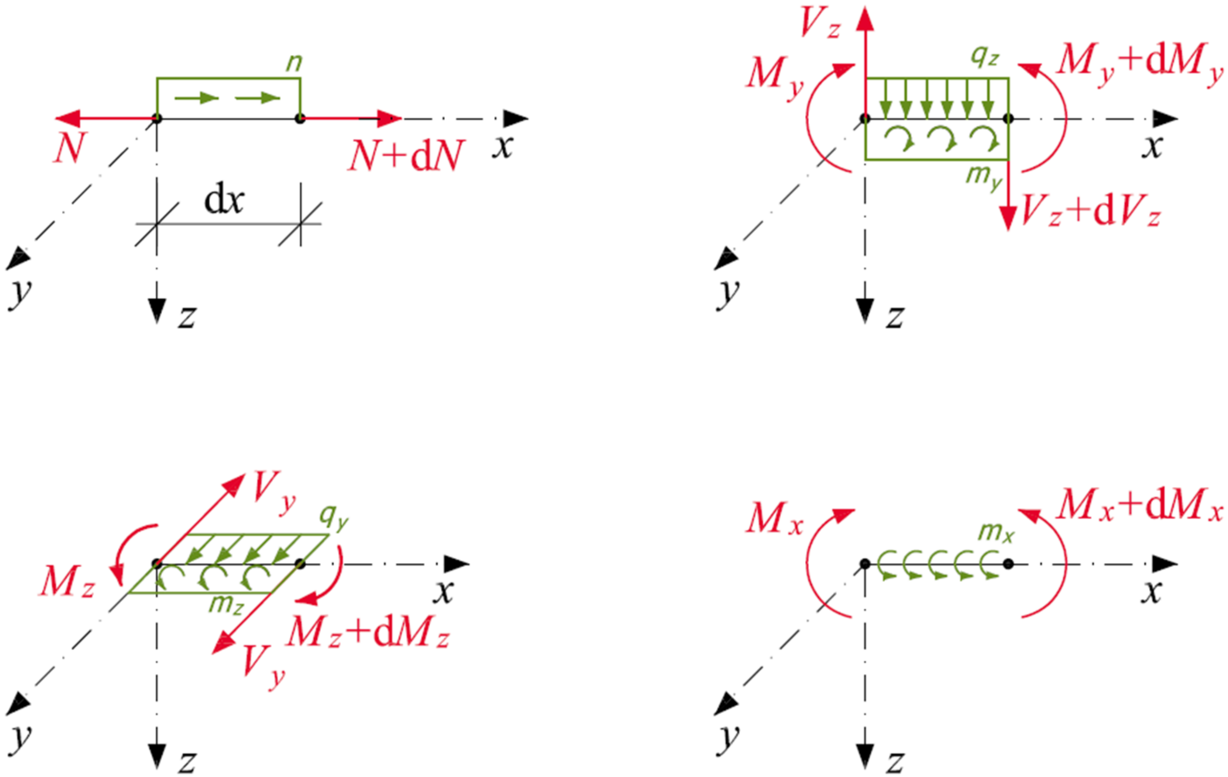
VNITŘNÍ SÍLY

- N_x – normálová síla
- V_y, V_z – posouvající síly
- M_x (T) – kroutící moment
- M_y, M_z – ohybové momenty

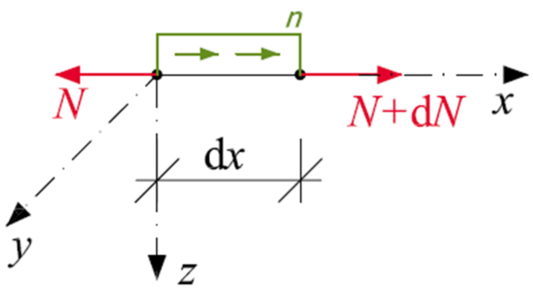


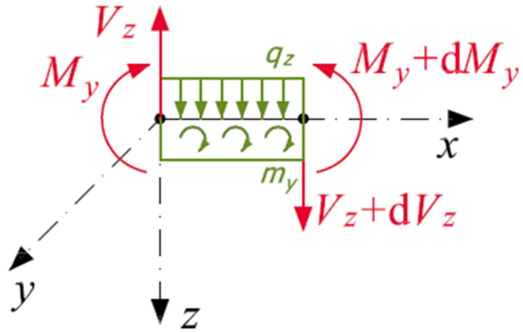


DIFERENCIÁLNÍ PODMÍNKY ROVNOVÁHY



DIFERENCIÁLNÍ PODMÍNKY ROVNOVÁHY

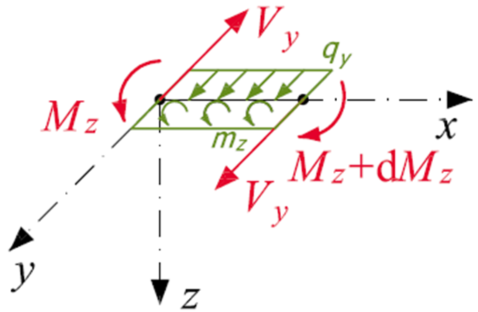


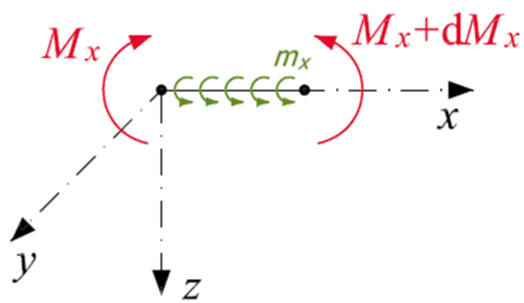


- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow -N + (N + \mathrm{d}N) + n \cdot \mathrm{d}x = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{dx} = -n$ $\oplus$
- $\sum F_{i,z} = 0 \rightarrow -V_z + (V_z + \mathrm{d}V_z) + q_z \cdot \mathrm{d}x = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}x} = -q_z$ $\oplus$
- $\sum M_{i,y} = 0 \rightarrow -M_y + \left(M_y + \mathrm{d}M_y\right) - V_z \cdot \mathrm{d}x + q_z \cdot \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} - m_y \cdot \mathrm{d}x = 0$

  $\rightarrow \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = V_z + m_y$; pokud $m_y = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = V_z$ $\oplus$

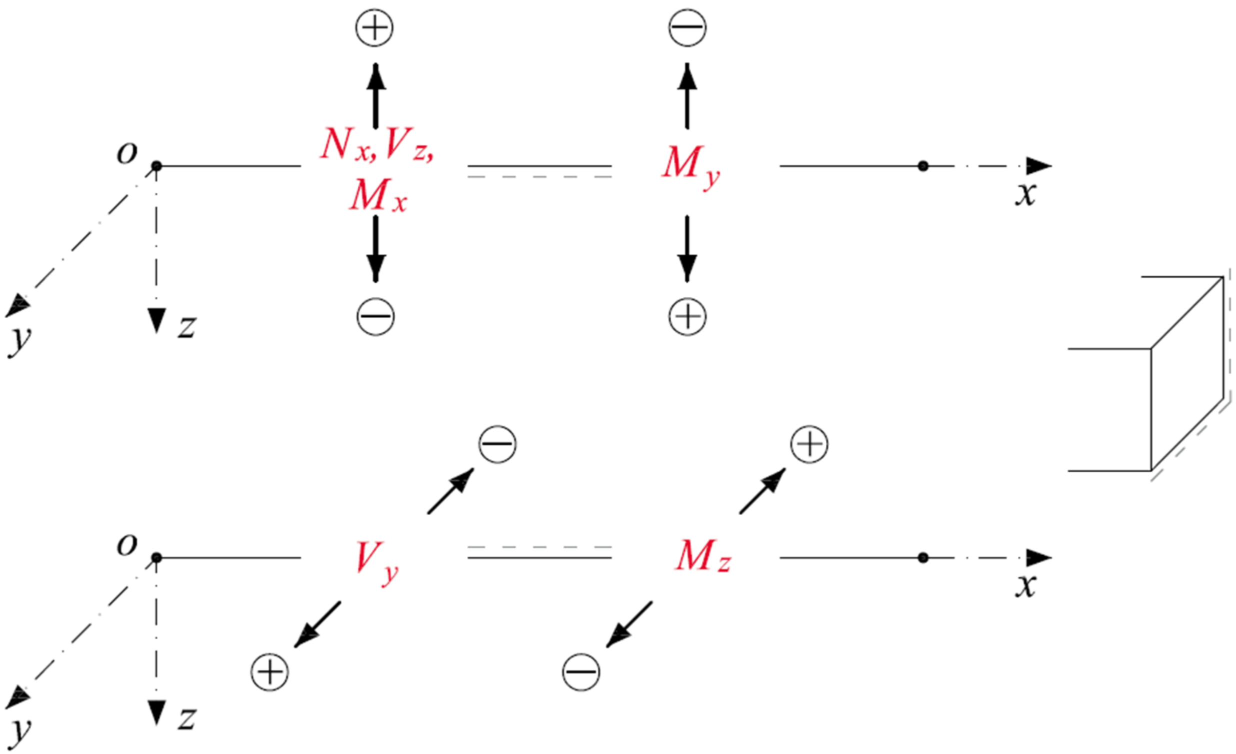
DIFERENCIÁLNÍ PODMÍNKY ROVNOVÁHY





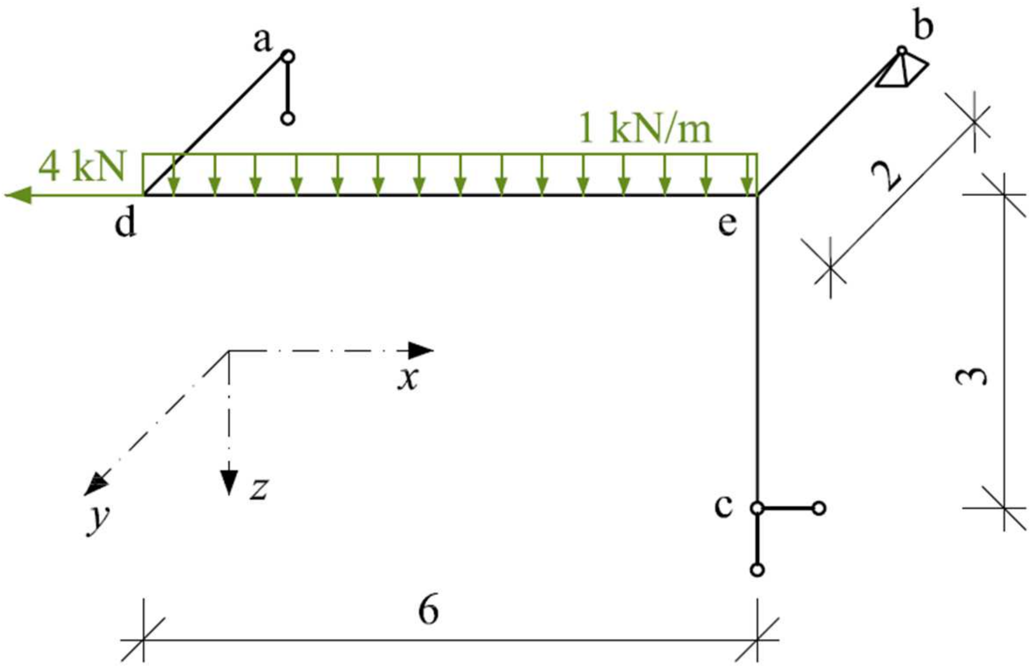
- $\sum F_{i,y} = 0 \rightarrow -V_y + \left(V_y + \mathrm{d}V_y\right) + q_y \cdot \mathrm{d}x = 0 \;\rightarrow \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}x} = -q_y$ $\downarrow\oplus$
- $\sum M_{i,z} = 0 \rightarrow M_z - (M_z + \mathrm{d}M_z) - V_y \cdot \mathrm{d}x + q_y \cdot \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} + m_z \cdot \mathrm{d}x = 0$
  $\rightarrow \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -V_y + m_z$; pokud $m_y = 0 \;\rightarrow \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -V_y$ $\oplus$
- $\sum M_{i,x} = 0 \rightarrow -M_x + (M_x + \mathrm{d}M_x) + m_x \cdot \mathrm{d}x = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = -m_x$

ZNAMÉNKOVÁ KONVENCE
PRO POŘADNICE VNITŘNÍCH SIL



PROSTOROVĚ LOMENÝ NOSNÍK

Vykreslete průběhy vnitřních sil



PROSTOROVĚ LOMENÝ NOSNÍK

1) Výpočet reakcí

- $\sum M_{i,ab} = 0$

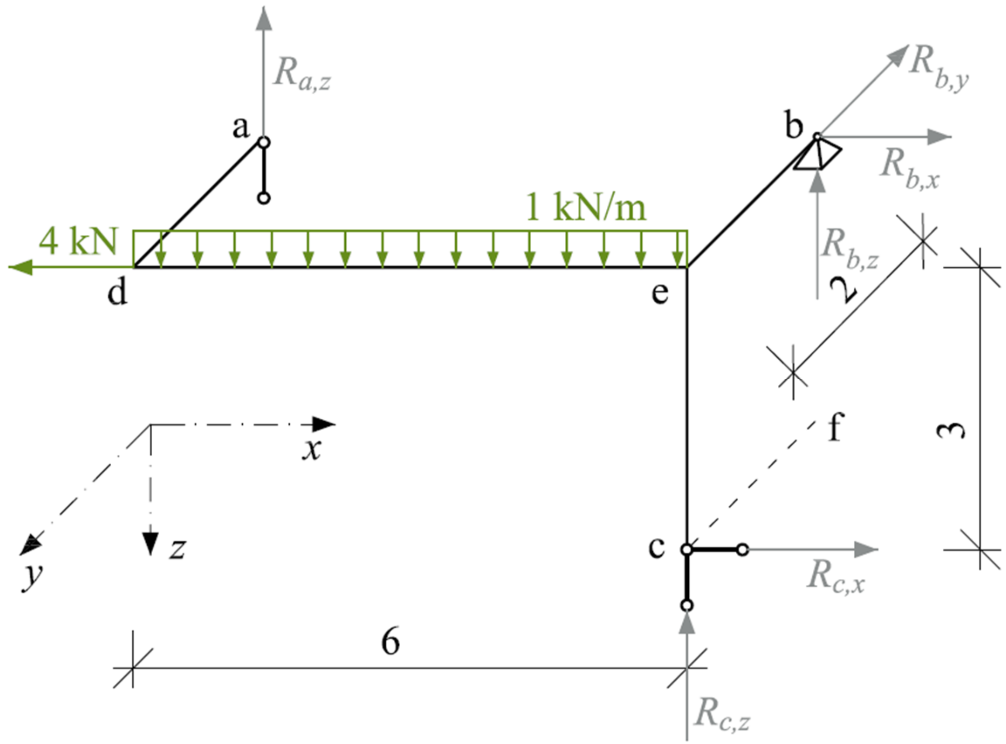
  $-R_{c,z} \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{c,z} = 6 \text{ kN}$

- $\sum M_{i,ce} = 0 \rightarrow R_{b,x} = 0 \text{ kN}$

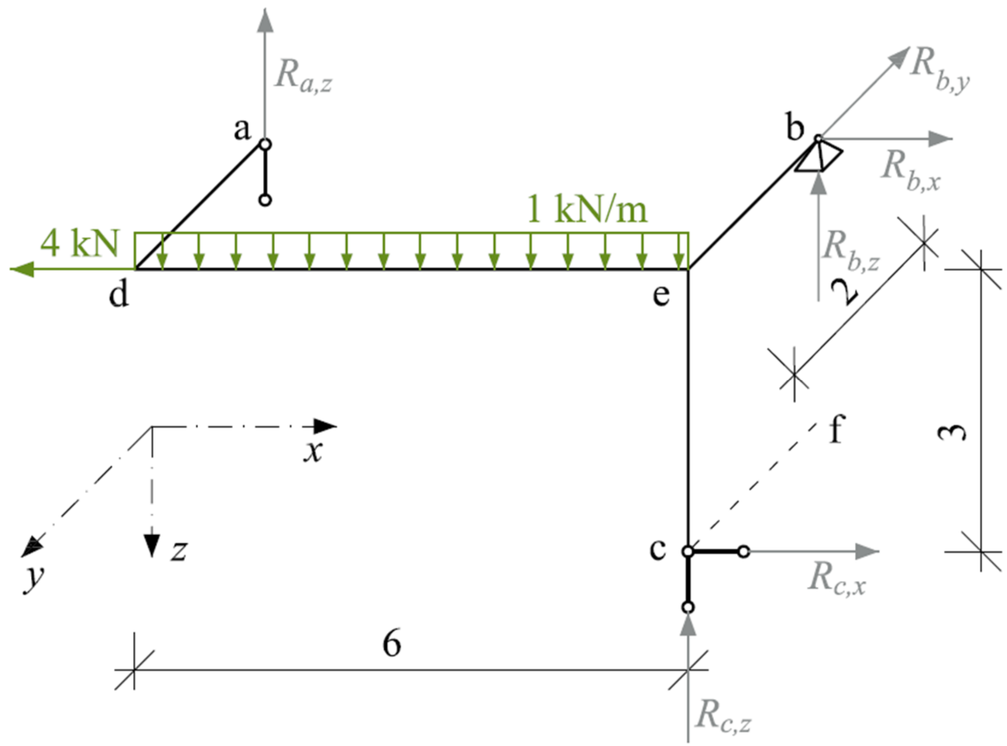
- $\sum M_{i,cf} = 0$

  $R_{a,z} \cdot 6 - 4 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \cdot 3 = 0$

  $\rightarrow R_{a,z} = 5 \text{ kN}$



1) Výpočet reakcí



- $\sum F_{i,z} = 0$

  $-R_{a,z} - R_{b,z} - R_{c,z} + 1 \cdot 6 = 0$

  $\rightarrow R_{b,z} = -5\ \text{kN}$

- $\sum F_{i,x} = 0$

  $-4 + R_{b,x} + R_{c,x} = 0$

  $\rightarrow R_{c,x} = 4\ \text{kN}$

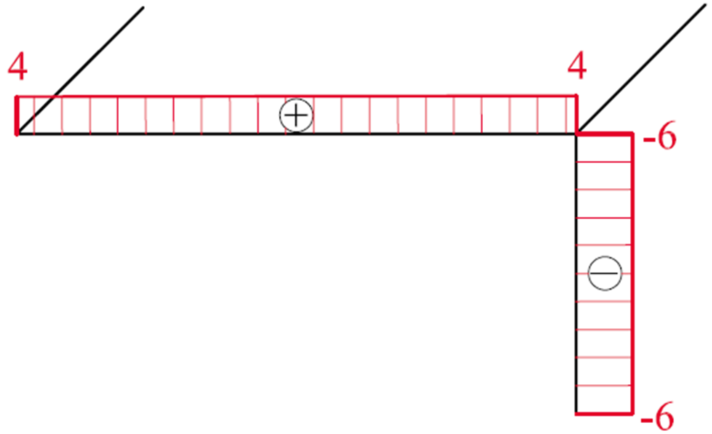
- $\sum F_{i,y} = 0 \ \rightarrow R_{b,y} = 0\ \text{kN}$

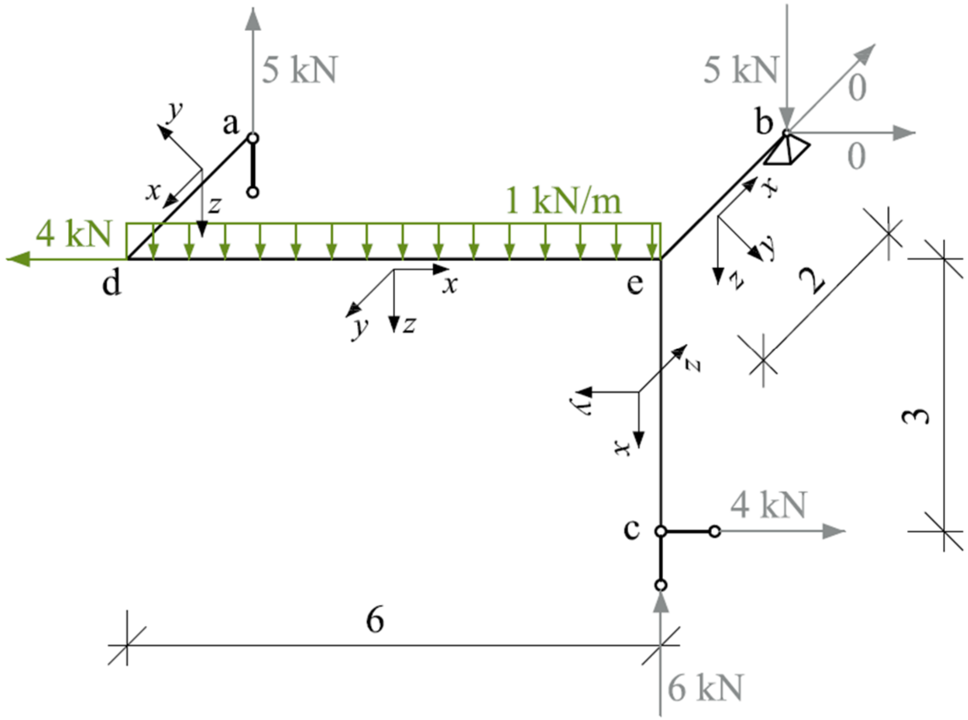
- $\sum M_{i,de} = 0;\ R_{a,z} \cdot 2 + R_{b,z} \cdot 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$ PLATÍ

- $\sum M_{i,da} = 0$

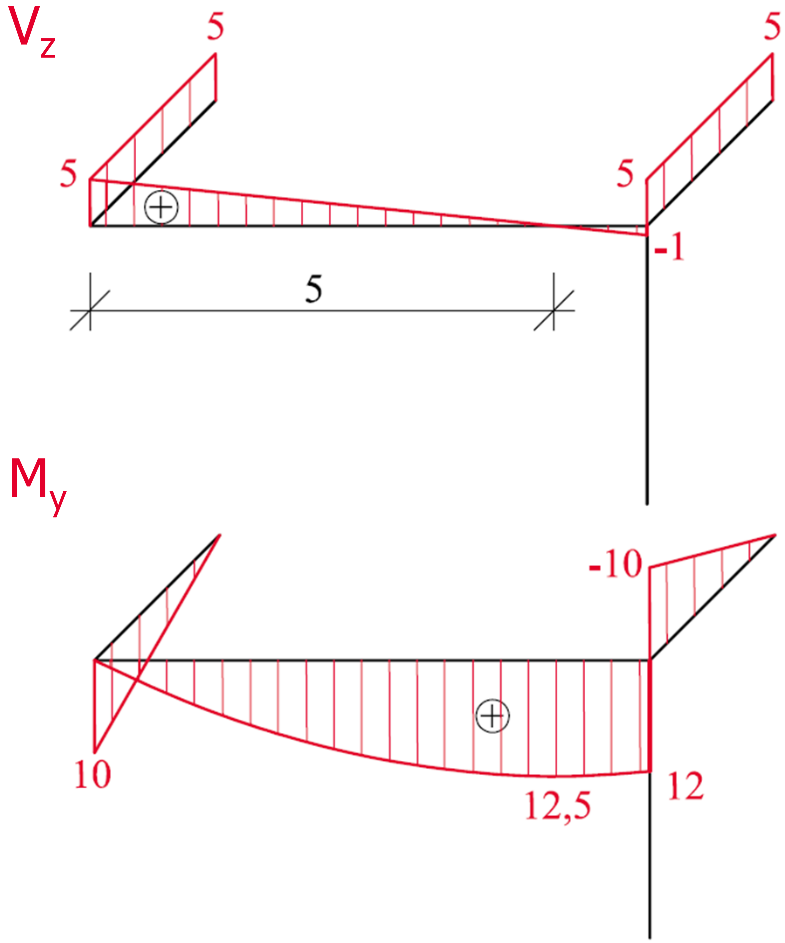
  $1 \cdot 6 \cdot 3 - R_{b,z} \cdot 6 - R_{c,z} \cdot 6 - R_{c,x} \cdot 3 = 0 \rightarrow 0 = 0$ PLATÍ

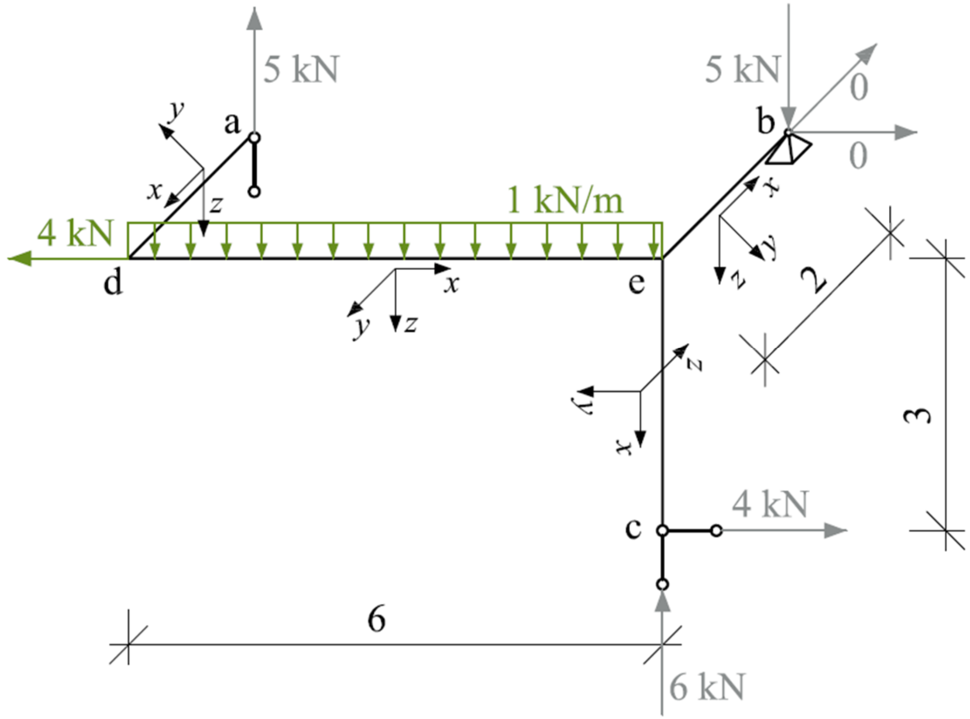
2) Normálové síly





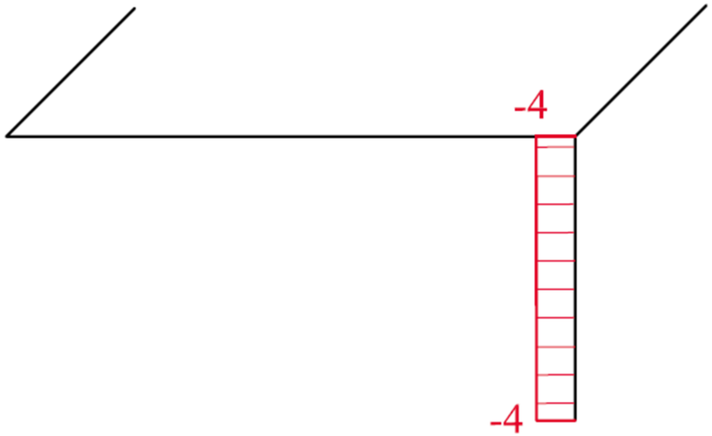
3) Posouvající síly V_z a ohybové momenty M_y



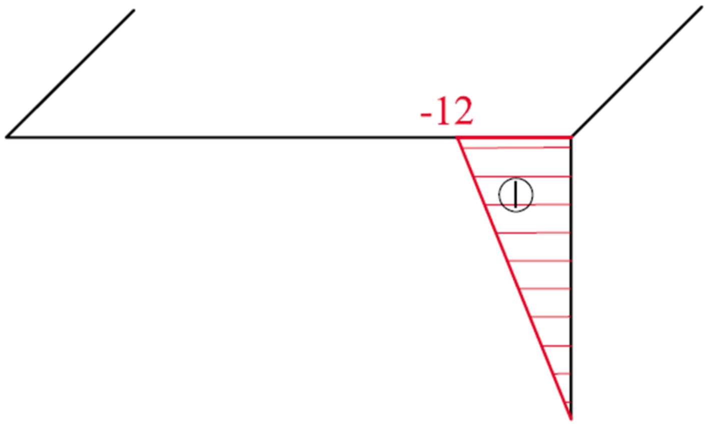


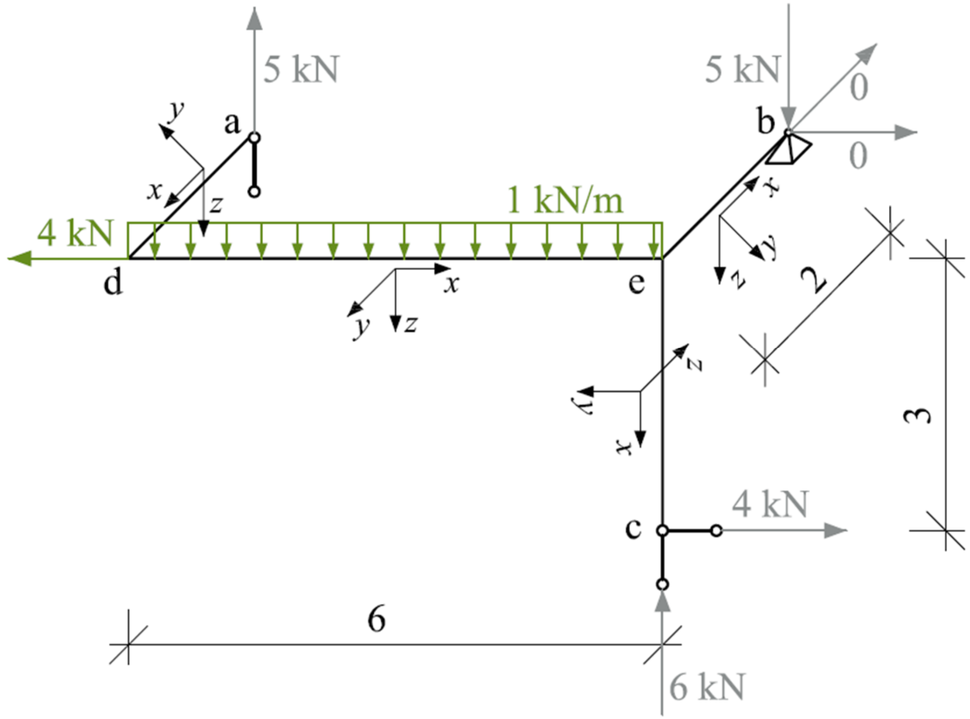
4) Posouvající síly V_y a ohybové momenty M_z

V_y



M_z





5) Kroutící moment M_x