



## **BDA015 Stavební mechanika 1**

### **12. přednáška**

- Kroucení
- Stabilita a vzpěrná pevnost tlačných prutů

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

- v průřezu působí pouze kroucí moment

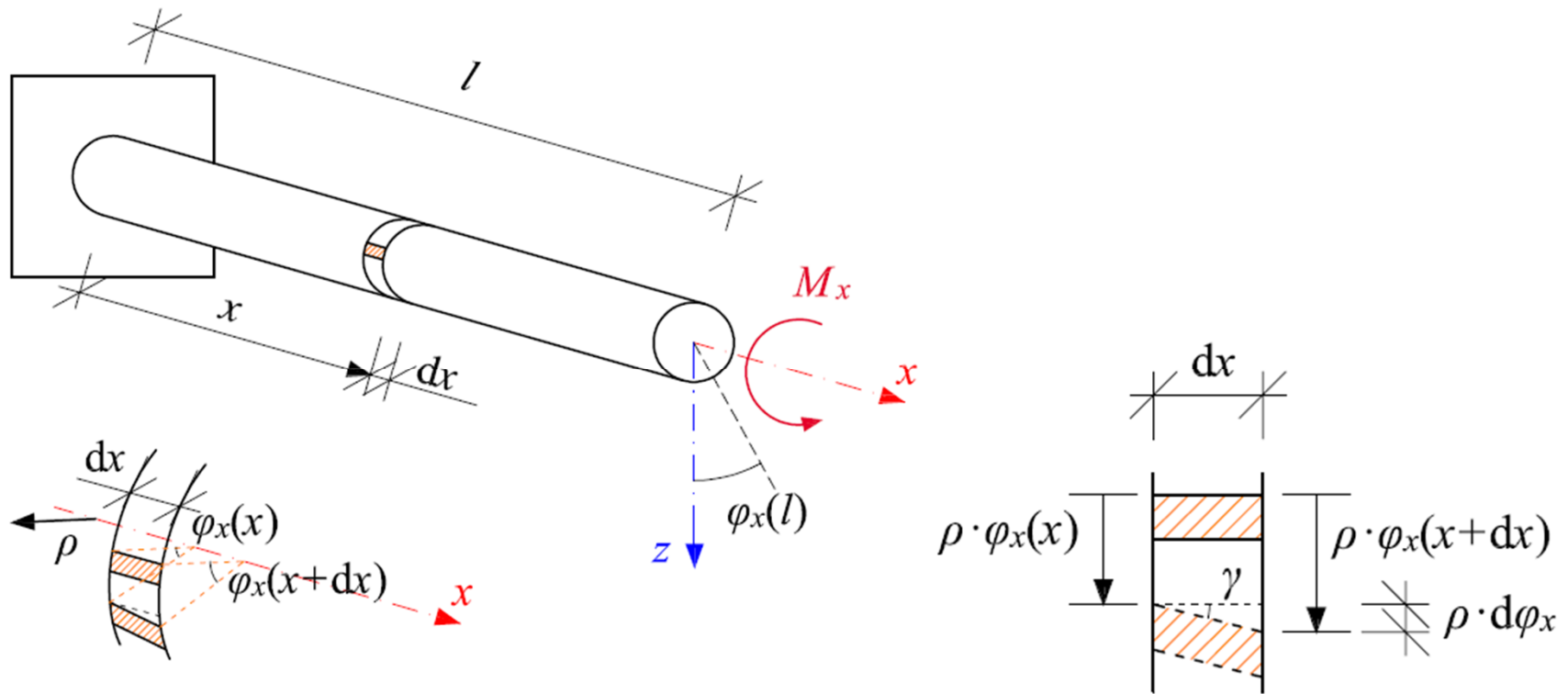
## **ROTAČNĚ SYMETRICKÉ PRŮŘEZY**

- kruhové a mezikruhové průřezy

## **ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY**

- osa prutu zůstane i po deformaci přímá
- průřezy zůstávají rovinnými i po deformaci
- deformací se nemění poloměry ani vzdálenosti mezi sousedními průřezy
- dochází pouze k jejich pootočení kolem osy prutu

# FAST KROUCENÍ



$$\varphi_x(x + dx) = \varphi_x(x) + d\varphi_x$$

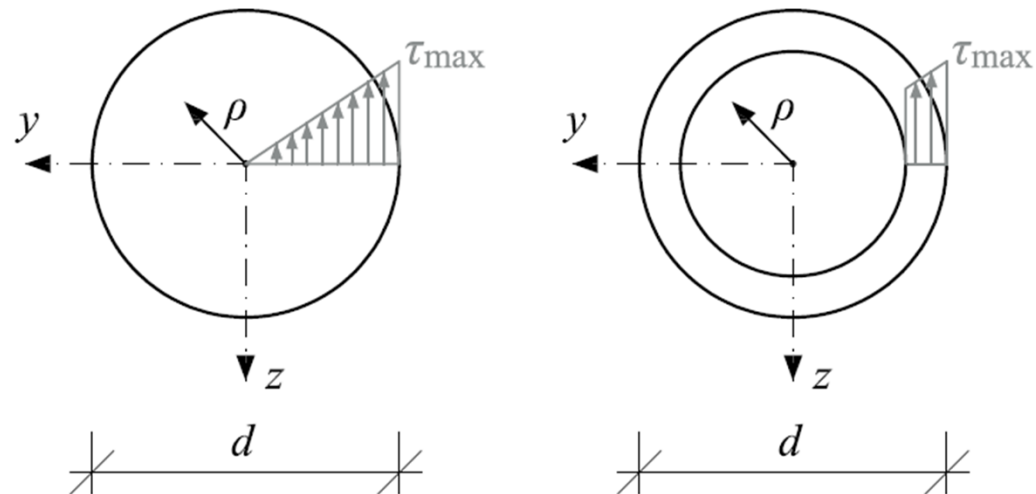
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho \cdot d\varphi_x}{dx} \Rightarrow \gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$$

## SMYKOVÉ NAPĚTÍ

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$$

- závislé na vzdálenosti od podélné osy krouceného prvku
- lineární závislost



## KROUTÍČÍ MOMENT

$$M_x \approx \sum_A dF \cdot \rho$$

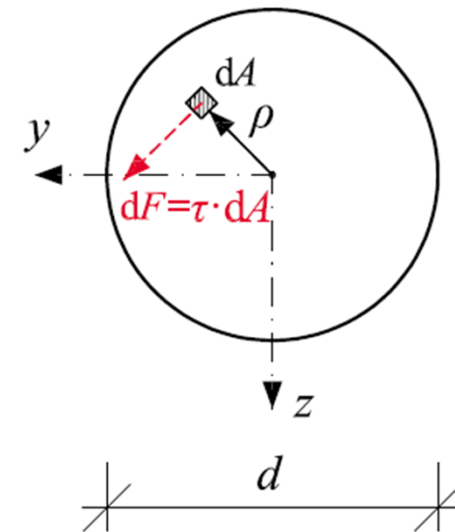
$$M_x = \int_A \rho \cdot dF = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA = \int_A \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \cdot dA$$

$$M_x = G \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \int_A \rho^2 dA$$

$$I_t = \int_A \rho^2 dA \quad \text{moment tuhosti v kroucení}$$

$$M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\varphi_x}{dx}$$

$G \cdot I_t$  – kroučící tuhost průřezu



## POSUDEK

$$M_x = G \cdot I_t \cdot \frac{d\varphi_x}{dx} \Rightarrow \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_x}{G \cdot I_t} \quad \text{diferenciální rovnice kroucení}$$

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{M_x}{G \cdot I_t} = \frac{M_x}{I_t} \cdot \rho$$

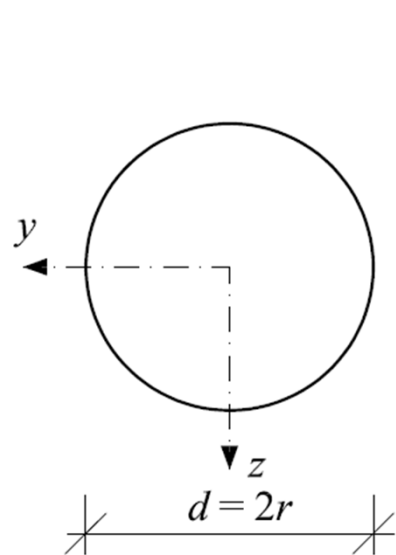
$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_t} \cdot \rho_{\max}; W_t = \frac{I_t}{\rho_{\max}} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t} \leq \frac{f_d}{\sqrt{3}} \text{ pro ocel}$$

## POOTOČENÍ PRŮŘEZU – ÚHEL ZKROUCENÍ

$$\int_l \frac{d\varphi_x}{dx} dx = \int_l \frac{M_x}{G \cdot I_t} dx$$

$$\varphi_x = \int_l \frac{M_x}{G \cdot I_t} dx + c \rightarrow \varphi_x = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_t}$$

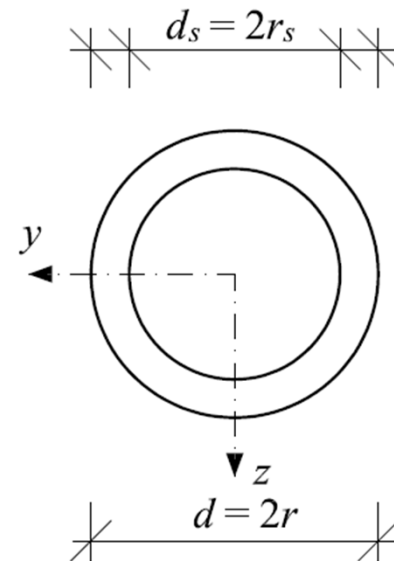
## Polární kvadratické momenty a průřezové moduly



$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I_t = I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$$



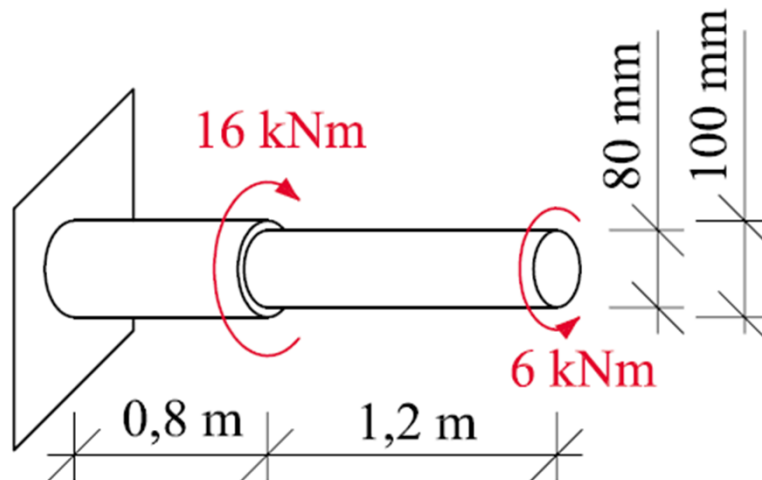
$$A = \pi(r^2 - r_s^2) = \frac{\pi(d^2 - d_s^2)}{4}$$

$$I_t = I_p = \frac{\pi}{2}(r^4 - r_s^4) = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_s^4)$$

$$W_t = W_p = \frac{\pi}{2r}(r^4 - r_s^4) = \frac{\pi}{16d}(d^4 - d_s^4)$$

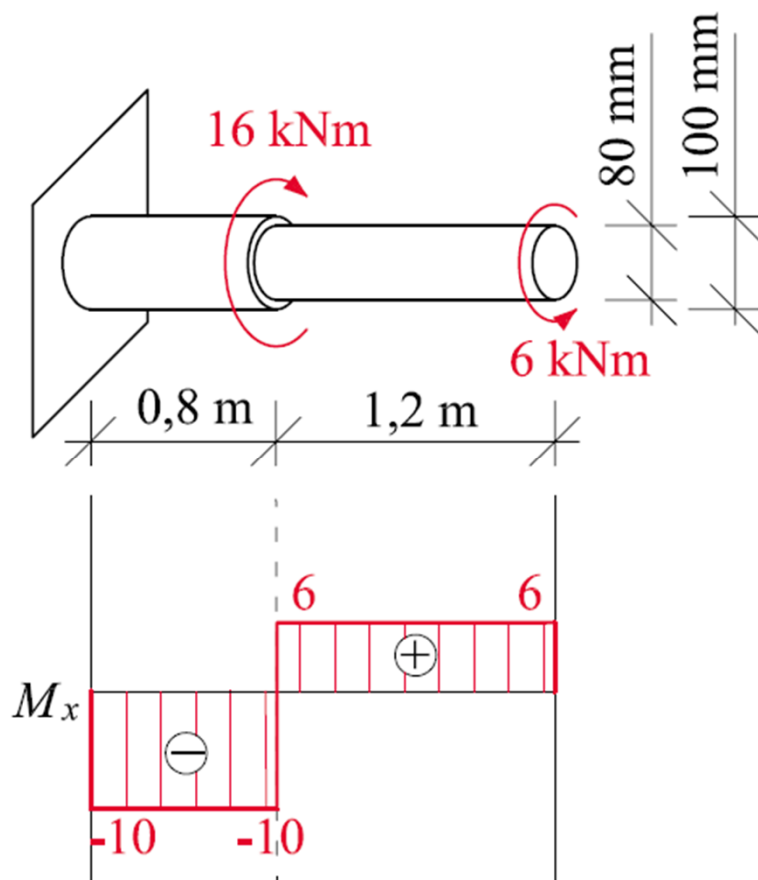
Vetknutý prut kruhového průřezu je namáhán kroutící momenty podle obrázku. Určete:

- největší smykové napětí
- úhel zkroucení na volném konci
- $G = 80 \text{ GPa}$





## PRŮBĚH KROUTÍCÍCH MOMENTŮ



## POLÁRNÍ KVADRATICKÉ MOMENTY

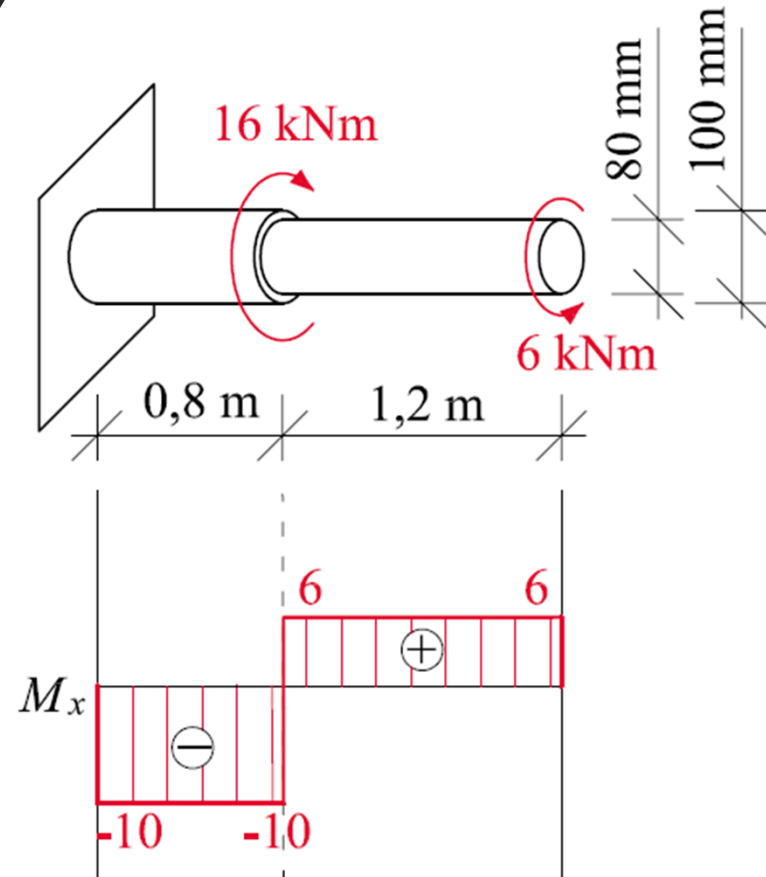
$$I_{t1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,08^4}{32} = 4,021 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{t2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,1^4}{32} = 9,817 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

## PRŮŘEZOVÉ MODULY

$$W_{t1} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0,08^3}{16} = 1,00531 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W_{t2} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0,1^3}{16} = 1,96350 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$



## SMYKOVÉ NAPĚTÍ

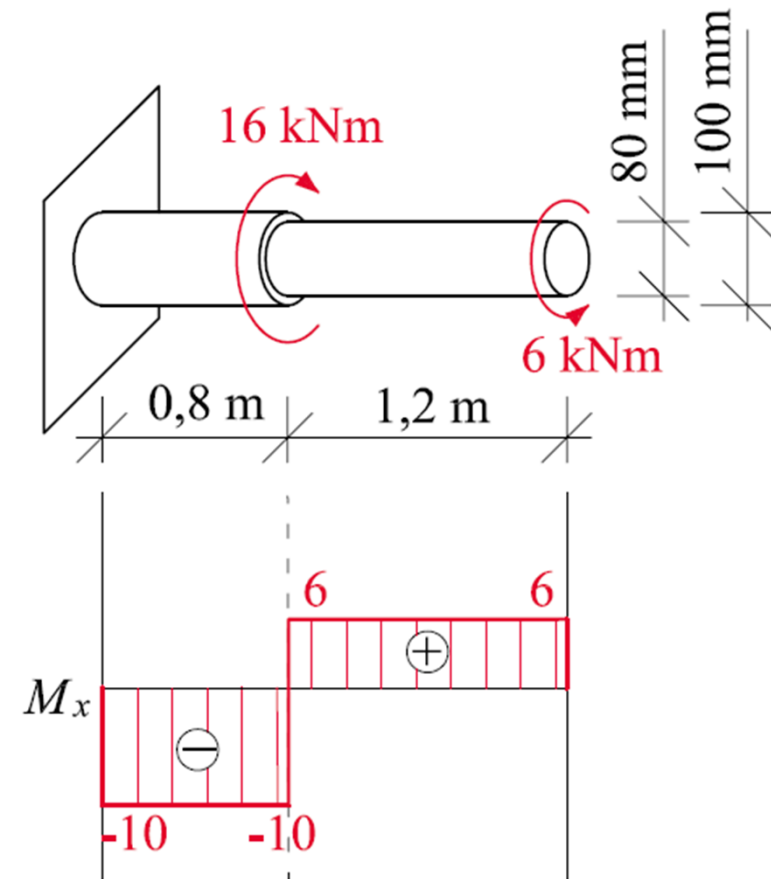
$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_t} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_x}{W_t}; W_t = \frac{I_t}{\rho_{\max}}$$

$$\tau_1 = \frac{M_{x1}}{W_{t1}} = \frac{6 \cdot 10^3}{1,00531 \cdot 10^{-4}}$$

$$\rightarrow \tau_1 = 59,68 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{M_{x2}}{W_{t2}} = \frac{-10 \cdot 10^3}{1,96350 \cdot 10^{-4}}$$

$$\rightarrow \tau_2 = -50,93 \text{ MPa}$$



## ÚHEL ZKROUCENÍ

$$\varphi_x = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_t}$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{x1} \cdot l_1}{G \cdot I_{t1}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 4,021 \cdot 10^{-6}}$$

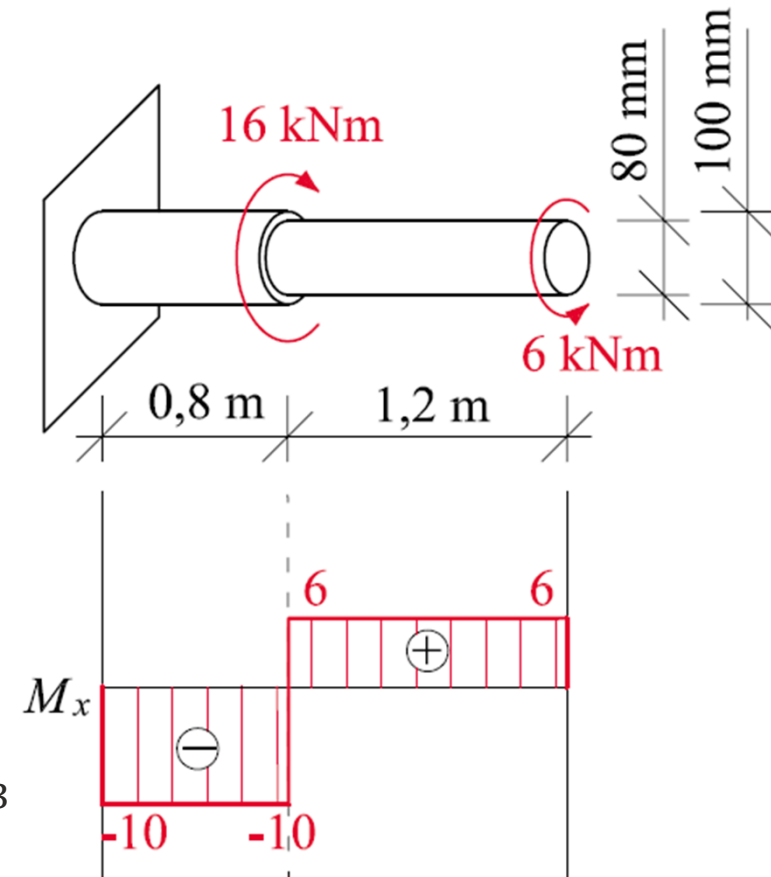
$$\rightarrow \varphi_1 = 22,382 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{x2} \cdot l_2}{G \cdot I_{t2}} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{80 \cdot 10^9 \cdot 9,817 \cdot 10^{-6}}$$

$$\rightarrow \varphi_2 = -10,186 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 22,382 \cdot 10^{-3} - 10,186 \cdot 10^{-3}$$

$$\rightarrow \varphi = 12,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



# **T** **FAST** KROUCENÍ OBECNÉHO PRŮŘEZU

- neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů  
→ dochází k **DEPLANACI** (porušení rovinnosti, prohnutí)

## **VOLNÉ KROUCENÍ**

- deplanaci není bráněno (např. vnějšími vazbami) → může proběhnout
- normálová napětí v průřezu jsou nulová

## **VÁZANÉ KROUCENÍ**

- deplanaci je bráněno
- kromě smykových napětí vznikají v průřezu i normálová napětí

- moment tuhosti v kroucení určen pomocí numerických metod/experimentu

### **MEMBRÁNOVÁ ANALOGIE**

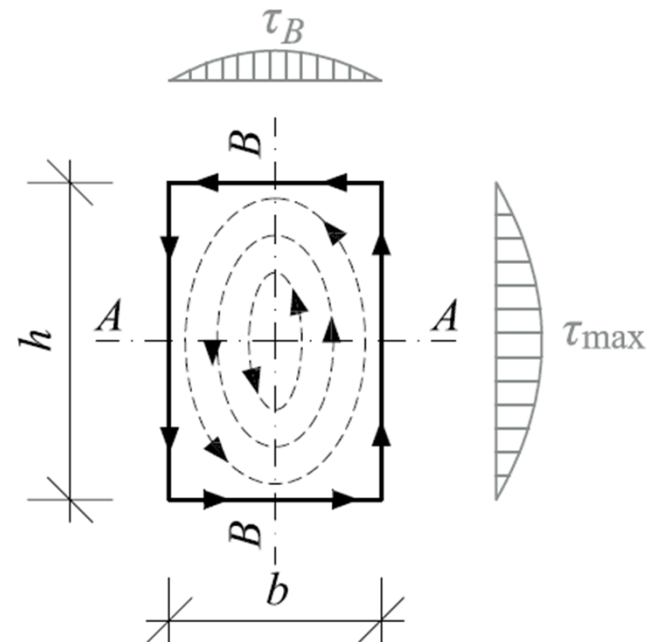
- průřez se při kroucení chová jako membrána natažená přes průřez namáhaná vnitřním přetlakem
- tok smykových napětí sleduje vrstevnice membránové plochy
- smykové napětí je úměrné sklonu tečné roviny k membránové ploše
- tuhost v kroucení je úměrná objemu vrchlíku
- největší smyková napětí na okraji průřezu – tečná rovina svírá největší úhel
- nulová smyková napětí místě vrcholu membrány
- podél jedné vrstevnice je smykové napětí konstantní

## OBDÉLNÍKOVÝ PRŮŘEZ

- z membránové analogie  
→ extrém smykového napětí uprostřed delší strany obdélníka

## PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY

- $W_t = \alpha \cdot b^2 \cdot h$
- $W_{Bt} = \beta \cdot b \cdot h^2$
- $I_t = \gamma \cdot b^3 \cdot h$



## OTEVŘENÉ TENKOSTĚNNÉ PRŮŘEZY

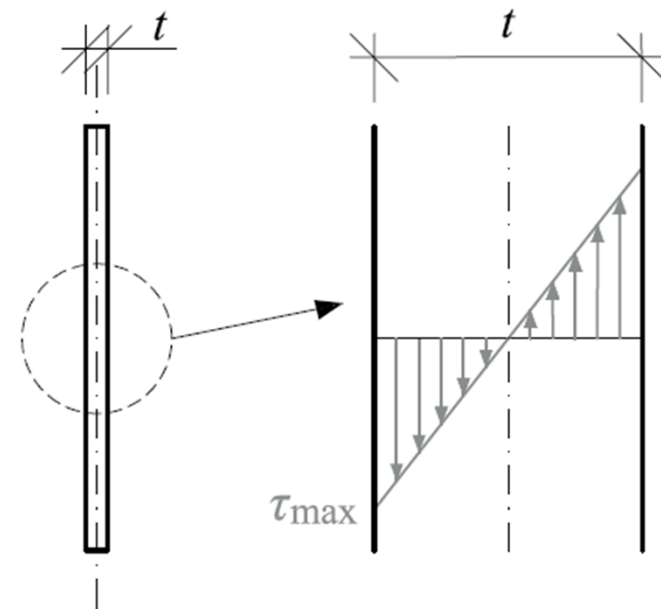
- složené z dílčích stěn obvykle obdélníkového průřezu
- tloušťka stěn je mnohem menší než výška (šířka)

## PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY

- $I_t = \frac{1}{3} t^3 \cdot h$  – obdélník
- $I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 \cdot h_i$  – složený z více stěn
- $W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$

## NAPĚTÍ

- $\tau_{max} = \frac{M_x}{I_t} \cdot t_{max} \rightarrow$  maximální napětí ve stěně s největší tloušťkou





## UZAVŘENÉ TENKOSTĚNNÉ PRŮŘEZY

- průřezové charakteristiky úměrné ploše vymezené střednicí průřezu
- smyková napětí napříč tloušťkou stěny jsou přibližně konstantní → vytvářejí smykový tok obíhající kolem průřezu po uzavřené střednici

$$Q = \tau \cdot t \rightarrow \tau_{\max} = \frac{Q}{t_{\min}}$$

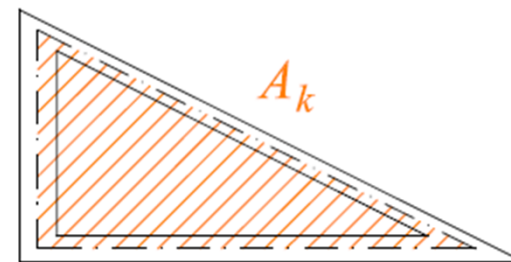
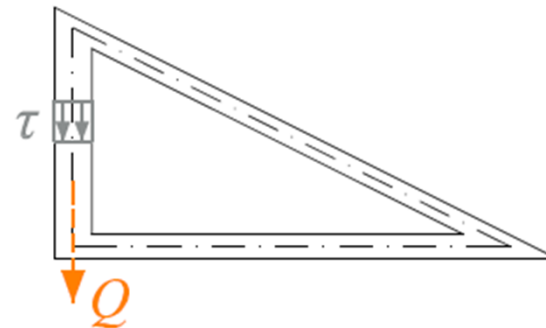
## PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY

- $W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{\min}$  – Bredtův vzorec

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}; \oint \frac{ds}{t(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}$$

## NAPĚTÍ

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t} = \frac{M_x}{2 \cdot A_k \cdot t_{\min}}$$



**STABILITA**

- schopnost konstrukce se po odtížení vrátit do původního stavu
- štíhlé pruty namáhané tlakem  
→ k porušením může dojít vlivem vybočení (ztráta stability) – VZPĚR

**VZPĚRNÝ TLAK**

- složitý jev ovlivněn řadou faktorů
  - zatížení, podepření, variabilita materiálových a geometrických charakteristik, vnitřní pnutí materiálu, výrobní a montážní nepřesnosti (imperfekce)
- výchozí předpoklad řešení = ideálně pružný přímý prut zatížený centricky → EULEROVO analytické řešení

- při předpokladu vzniku malých deformací vychází z diferenciální rovnice ohybové čáry

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI} \rightarrow M_y(x) = -EI \cdot w''(x)$$

- podmínka rovnováhy na deformovaném prutu – teorie II. řádu

$$\sum M_{i,x} = 0: F \cdot w(x) - M_y(x) = 0$$

## DIFRENCIÁLNÍ ROVNICE VZPĚRU

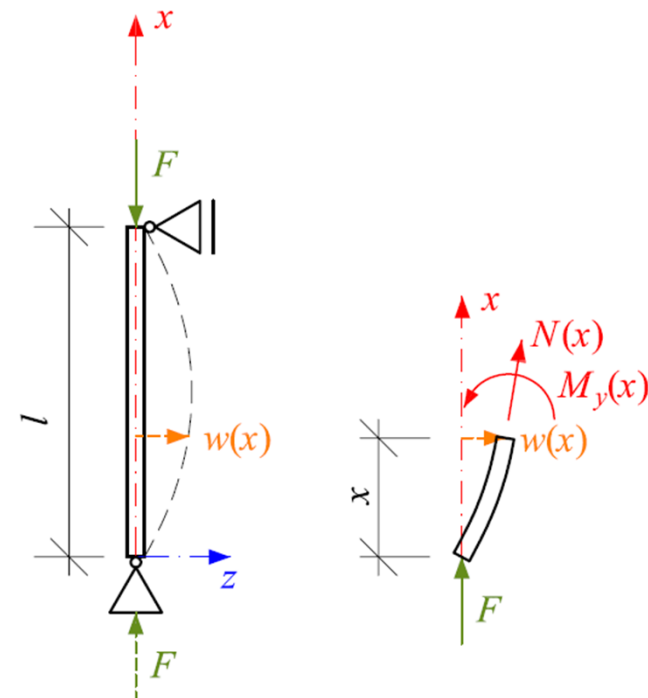
$$F \cdot w(x) + EI \cdot w''(x) = 0$$

$$w''(x) + \frac{F}{EI} w(x) = 0; \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0$$

obecné řešení

$$w(x) = C_1 \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cos(\alpha \cdot x)$$



## OKRAJOVÉ PODMÍNKY

- $w(0) = 0$

$$w(0) = C_1 \sin(\alpha \cdot 0) + C_2 \cos(\alpha \cdot 0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

0
1

- $w(l) = 0$

$$w(l) = C_1 \sin(\alpha \cdot l) + C_2 \cos(\alpha \cdot l) = 0$$

$$\rightarrow w(l) = C_1 \sin(\alpha \cdot l) = 0$$

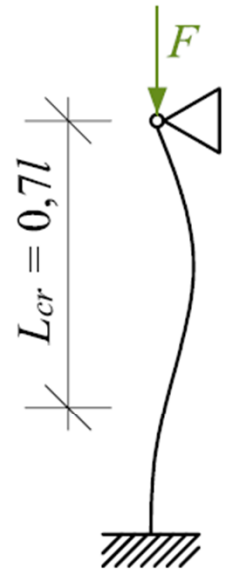
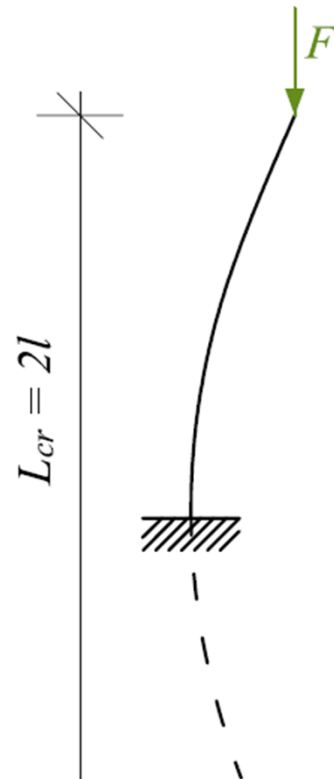
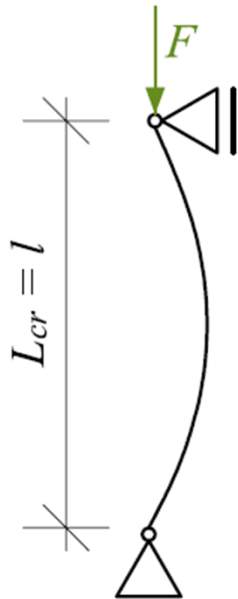
$C_1 = 0$ ; vybočení je 0 a prut se nachází ve stabilním stavu

$$\sin(\alpha \cdot l) = 0; \alpha \cdot l = n \cdot \pi \rightarrow \alpha = \frac{n \cdot \pi}{l}; n = 1, 2, \dots$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}; \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{n \cdot \pi}{l}; \frac{F}{EI} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \rightarrow F_{cr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2} \text{ kritická síla}$$

# FAST VZPĚRNÁ DÉLKA

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_{cr}^2}; L_{cr} = \beta \cdot l - \text{vzpěrná délka}$$



**ŠTÍHLOST**

- $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}; i = \sqrt{\frac{I}{A}}$  – poloměr setrvačnosti  $\Rightarrow A = \frac{I}{i^2}$

**NAPĚTÍ**

- $\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{A \cdot L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_{cr}^2} \cdot \frac{i^2}{I}$
- $\sigma_{cr} = E \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2}$  – Eulerova hyperbola

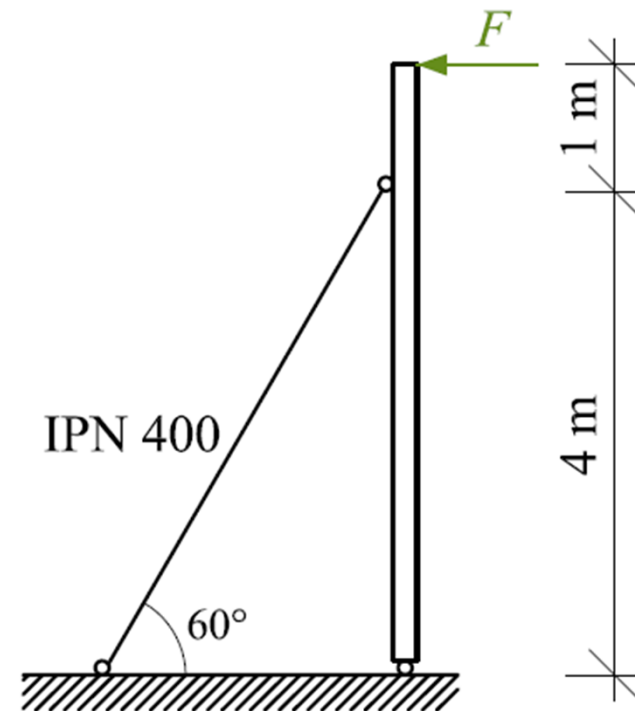
**POSUDEK**

- $f_d \geq \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{F}{\varphi \cdot A}; \varphi$  – součinitel vzpěrnosti z tabulek (podle štíhlosti)


# FAST PRVKY NAMÁHANÉ VZPĚREM

Sloup je podepřen kyvným prutem z profilu IPN 400, který je prostorově kloubově uložen na obou koncích. Určete:

- kritickou velikost zatížení, kdy dojde k vybočení vzpěry
- kritické napětí
- ocel S235
  - $E = 210 \text{ GPa}$
  - $f_d = 235 \text{ MPa}$
- IPN 400
  - $A = 0,0118 \text{ m}^2$
  - $I_z = 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$



## Výpočet síly v kyvném prutu (vzpěře)

- $\sum M_i = 0$  

$$F \cdot 5 - N_{1,x} \cdot 4 = 0$$

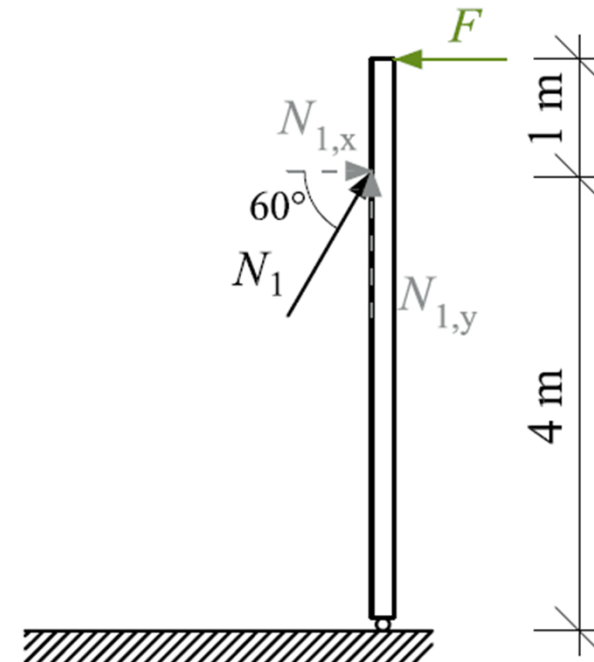
$$F \cdot 5 - N_1 \cdot \cos 60 \cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow N_1 = 2,5 \cdot F$$

## Výpočet kritické síly

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 1,14 \cdot 10^{-5}}{4,6188^2} = 11\,07,55 \text{ KN}$$

$$L_{cr} = \beta \cdot l = 1 \cdot l = 1 \cdot \frac{4}{\sin 60} = 4,6188 \text{ m}$$





## Výpočet kritického zatížení

$$N_1 = F_{cr}$$

$$F_{\max} = \frac{N_1}{2,5} = \frac{11\,07,55 \cdot 10^3}{2,5} = 443 \text{ kN}$$

## Výpočet kritického napětí

$$\sigma_{cr} = \frac{N_1}{A} = \frac{11\,07,55 \cdot 10^3}{0,0118} = 93,86 \text{ MPa}$$

## Posudek

$$\sigma_{cr} \leq f_d$$

$$93,86 \text{ MPa} \leq 235 \text{ MPa}$$

→ dojde k vybočení prutu  
vlivem ztráty stability

