VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

BDA015 Stavební mechanika 1
10. přednáška

- Základní pojmy teorie pružnosti
- Napětí, posunutí, deformace
- Prostý tah

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

NAPĚTÍ

úměrné vnitřním silám – intenzita vnitřních sil

DEFORMACE

změna rozměru a tvaru tělesa vlivem působících sil

STABILITA

stabilita tvaru, pružné těleso se po odtížení vrátí do původního tvaru

PRUŽNOST

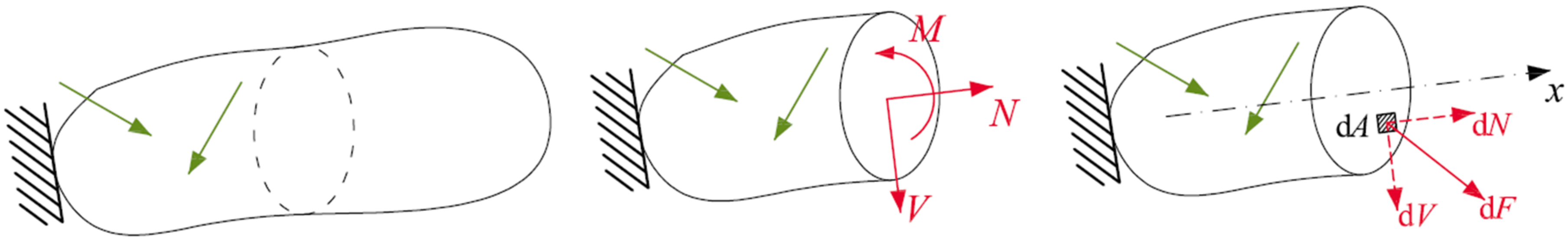
studuje vztahy mezi deformacemi těles a vnějšími silami

PEVNOST

schopnost odolávat zatížení do porušení

NAPĚTÍ

míra intenzity vnitřních sil; síla vztažená na jednotku plochy řezu



NORMÁLOVÉ NAPĚTÍ

napětí ve směru normály k danému řezu (kolmo na rovinu řezu)

$$\sigma_x \doteq \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}A}; \sigma_x = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}A}$$

SMYKOVÉ NAPĚTÍ

napětí v rovině daného řezu, lze rozložit do dvou kolmých složek

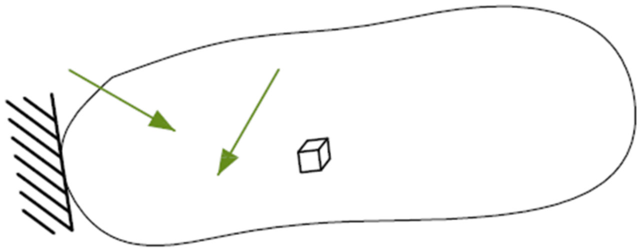
$$\tau \doteq \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}A}; \tau = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}A}$$

NAPJATOST TĚLESA V BODĚ

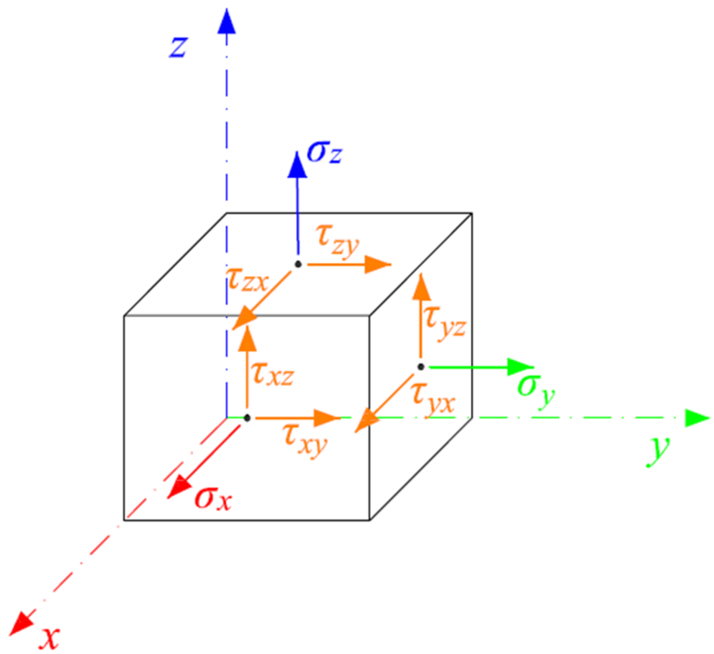
lze charakterizovat napětím ve třech kolmých rovinách

lze popsat tenzorem definovaným v pravoúhlé soustavě

tzv. **TENZOR NAPĚTÍ**



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



VZÁJEMNOST SMYKOVÝCH NAPĚTÍ

$$\sum M_{i,x} = 0:\ \sigma_y \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{2} - \ \sigma_y \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{2} + \sigma_z \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$-\sigma_z \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{2} + \tau_{yz} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y - \tau_{zy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0$$

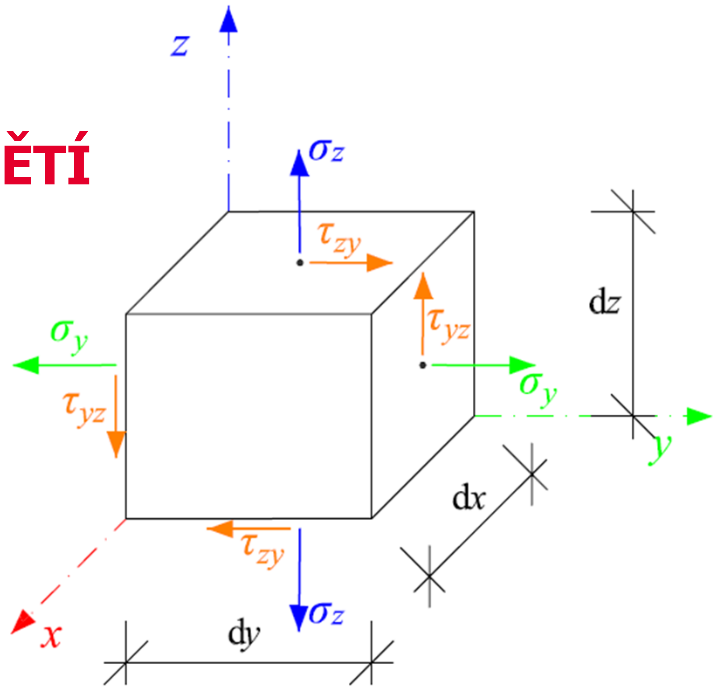
$$\tau_{yz} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y - \tau_{zy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0$$

$$\tau_{yz} - \tau_{zy} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

VĚTA O VZÁJEMNOSTI SMYKOVÝCH NAPĚTÍ

$\boldsymbol{\tau_{ij} = \tau_{ji}} \Rightarrow$ tenzor σ je symetrický

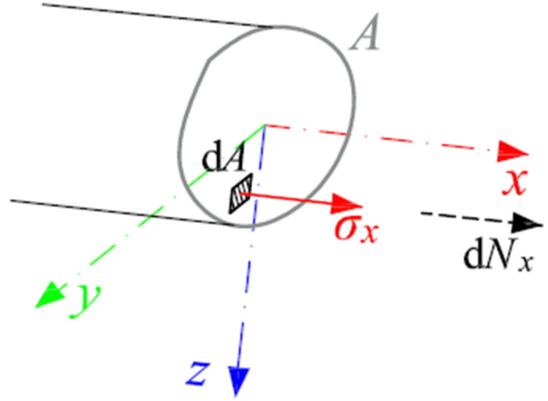
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym. & & \sigma_z \end{bmatrix}$$



NORMÁLOVÁ SÍLA N_x

$$N_x \doteq \sum_A \mathrm{d}N_x = \int_A \mathrm{d}N_x\,;\ \mathrm{d}N_x = \sigma_x \cdot \mathrm{d}A$$

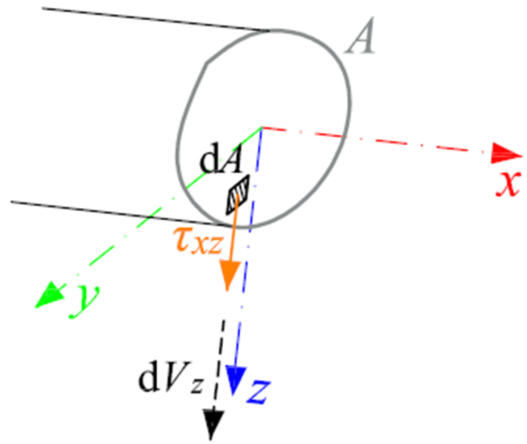
$$\boldsymbol{N_x = \int_A \sigma_x\, \mathrm{d}A}$$



POSOUVAJÍCÍ SÍLA V_z

$$V_z \doteq \sum_A \mathrm{d}V_z = \int_A \mathrm{d}V_z\,;\ \mathrm{d}V_z = \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A$$

$$\boldsymbol{V_z = \int_A \tau_{xz}\, \mathrm{d}A}$$

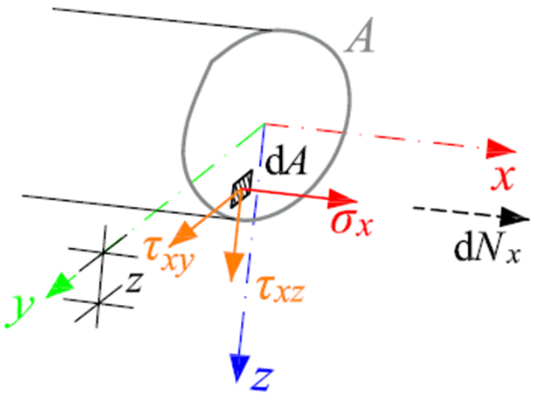


OHYBOVÝ MOMENT M_Y

$$\mathrm{d}M_y = \mathrm{d}N_x \cdot z$$

$$M_y \doteq \sum_A \mathrm{d}M_y = \int_A \mathrm{d}M_y = \int_A \mathrm{d}N_x \cdot z \; ; \; \mathrm{d}N_x = \sigma_x \cdot \mathrm{d}A$$

$$\boldsymbol{M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, \mathrm{d}A}$$

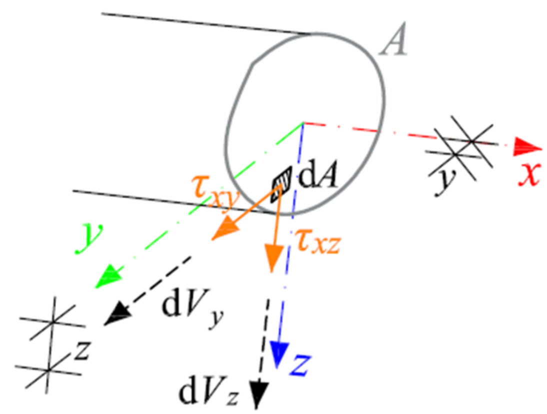


KROUTÍCÍ MOMENT M_X

$$\mathrm{d}V_z = \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A; \mathrm{d}V_y = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}M_x = \mathrm{d}V_z \cdot y - \mathrm{d}V_y \cdot z = \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A \cdot y - \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A \cdot z$$

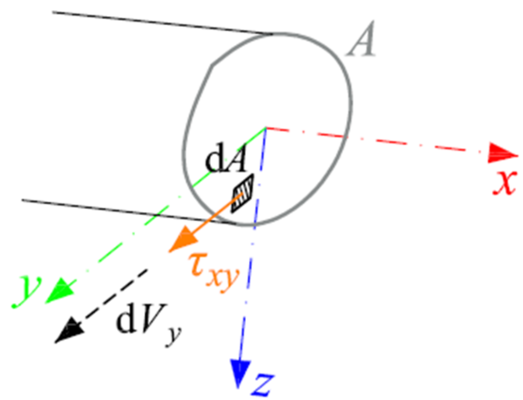
$$\boldsymbol{M_x} = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \, \mathbf{d}\boldsymbol{A}$$



POSOUVAJÍCÍ SÍLA V_y

$$V_y \doteq \sum_A \mathrm{d}V_y = \int_A \mathrm{d}V_y \; ; \; \mathrm{d}V_y = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A$$

$$\boldsymbol{V_y = \int_A \tau_{xy}\, \mathrm{d}A}$$

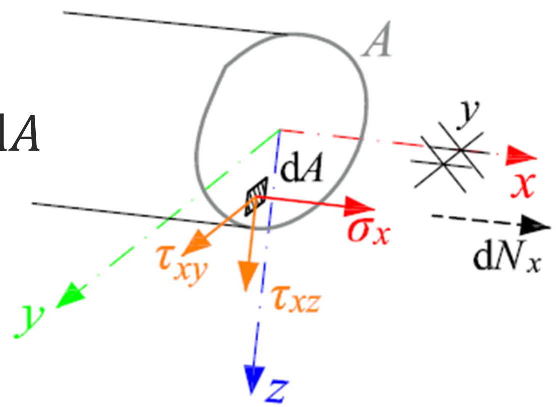


OHYBOVÝ MOMENT M_z

$$\mathrm{d}M_z = -\mathrm{d}N_x \cdot y$$

$$M_z \doteq \sum_A \mathrm{d}M_z = \int_A \mathrm{d}M_z = \int_A -\mathrm{d}N_x \cdot y \; ; \; \mathrm{d}N_x = -\sigma_x \cdot \mathrm{d}A$$

$$\boldsymbol{M_z = \int_A -\sigma_x \cdot y\, \mathrm{d}A}$$



DEFORMACE

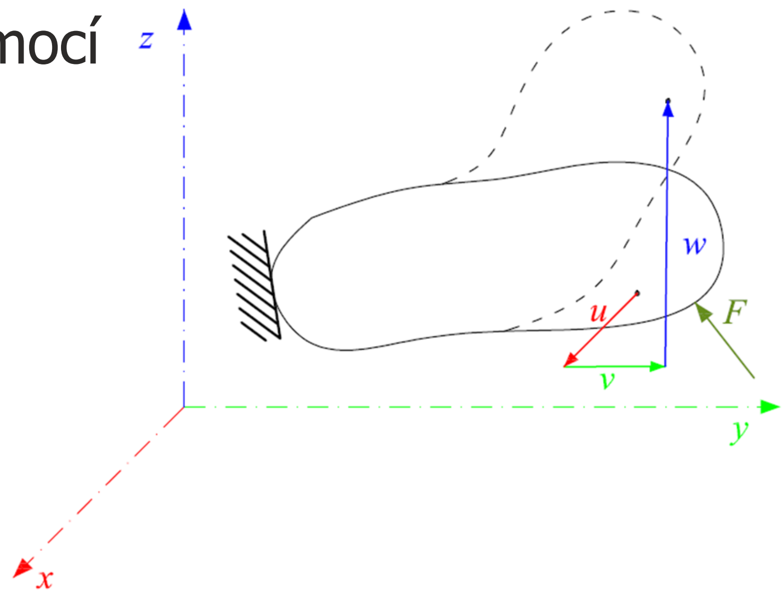
změna rozměru a tvaru tělesa vlivem působícího zatížení (silové, deformační, změna teploty) – přetvoření

podle **délky trvání**

- pružné – těleso se po odtížení vrátí do původního tvaru a polohy
- plastické – zůstávají trvale i po odtížení

změnu geometrie tělesa lze popsat pomocí

- posunů (přemístění) konkrétních bodů zkoumaného tělesa – *u*, *v*, *w*
- poměrných deformací (přetvoření) – lokální míra deformace

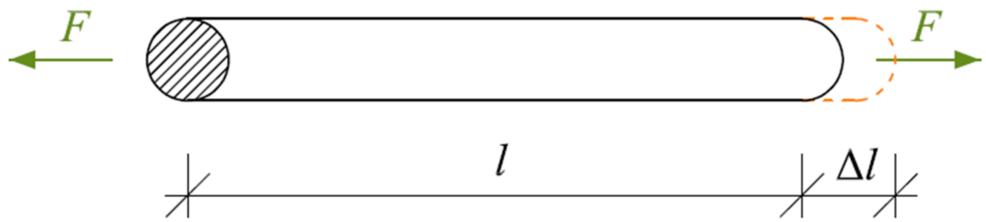


POMĚRNÉ PŘETVOŘENÍ

NORMÁLOVÉ ε

- délkové – poměrné protažení nebo zkrácení

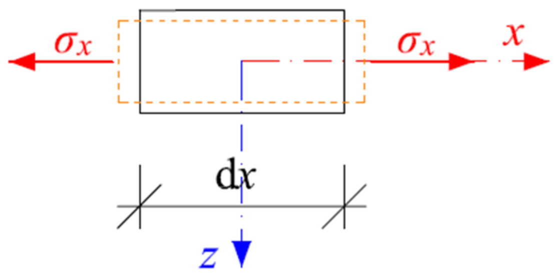
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

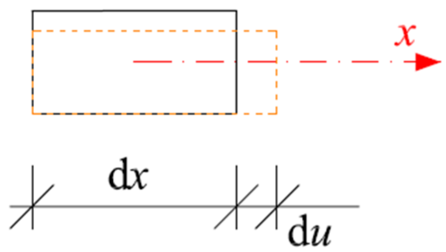


$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

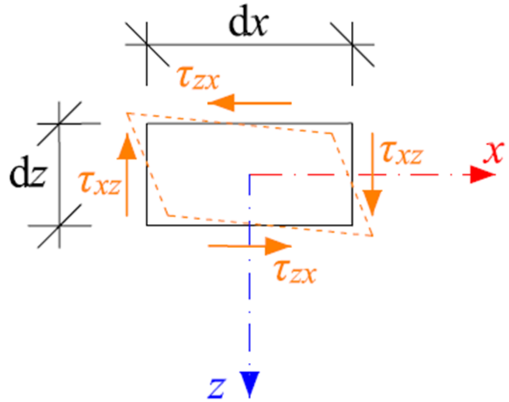
$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$





POMĚRNÉ PŘETVOŘENÍ



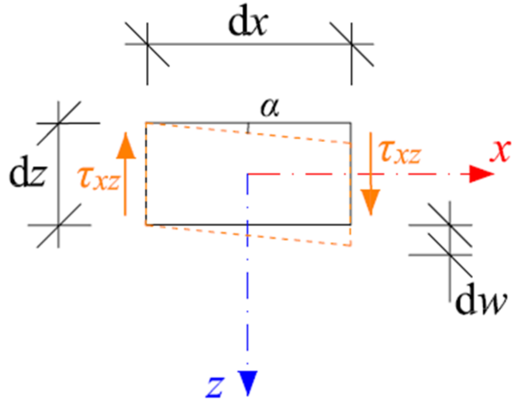
SMYKOVÉ γ

- úhlové – zkosení, změna úhlu mezi dvěma původně pravoúhlými hranami

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x};\ \beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

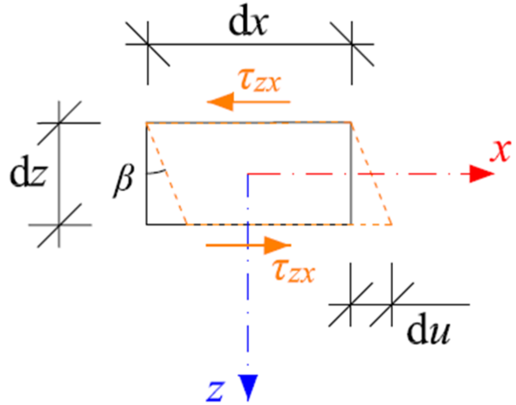
$$\gamma_{zx} = \alpha + \beta = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x};\ \gamma_{yz} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}$$



TENZOR POMĚRNÝCH PŘETVOŘENÍ

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

SPOJITOST

- těleso je kontinuum (celý objem bez mezer)
- napětí i deformace spojité funkce

HOMOGENITA

- ve všech místech stejné fyzikální vlastnosti

IZOTROPIE

- ve všech směrech stejné fyzikální a mechanické vlastnosti

PRUŽNOST

- schopnost vracet se po odstranění příčin změn do původního stavu
- přímá úměrnost mezi napětím a deformací – fyzikální linearita

MALÉ DEFROMACE

- změny tvaru jsou malé ve srovnání s rozměry

  → matematická zjednodušení při řešení úloh → lineární závislosti

  – geometrická linearita
- vliv zatížení lze vyšetřovat na nedeformovatelném tělese

STATICKÉ ZATĚŽOVÁNÍ

- postupné narůstání vnějších účinků, v důsledku toho napětí i deformací

POČATEČNÍ NENAPJATOST

- pokud nepůsobí žádné vnější vlivy, nevznikají vnitřní síly a napětí

→ lze využít PRINCIP SUPERPOZICE (skládání účinků), který je založen na linearitě všech matematických závislostí

ZÁKLADNÍ TYPY NAMÁHÁNÍ PRUTU

OSOVÉ NAMÁHÁNÍ

- v průřezu působí pouze normálová síla N
- prostý (dostředný) tah nebo tlak

SMYK

- v průřezu působí pouze posouvající síla V_y nebo V_z
- zpravidla ve spojích prvků namáhaných tahem

OHYB

- vyvolaný pouze ohybovým momentem M_y nebo M_z
- technický ohyb – příčné zatížení → ohybový moment + posouvající síla

KROUCENÍ

- na průřez působí pouze kroutící moment M_x (kolem podélné osy)

PROSTOROVÝ (OBECNÝ) OHYB

- rovinné ohyby ve dvou hlavních zatěžovacích rovinách (V_y s M_z a V_z s M_y)
- šikmý ohyb – rovinný ohyb v rovině, která není hlavní

MIMOSTŘEDNÝ TAH A TLAK

- prostorový ohyb s osovým namáháním

KROUCENÍ S TAHEM NEBO TLAKEM A S OHYBEM

→ PRINCIP SUPERPOZICE

rozklad na základní typy namáhání a jejich účinky složit

VZTAH MEZI NAPĚTÍM A DEFORMACÍ

HOOKŮV ZÁKON (prostý tah)

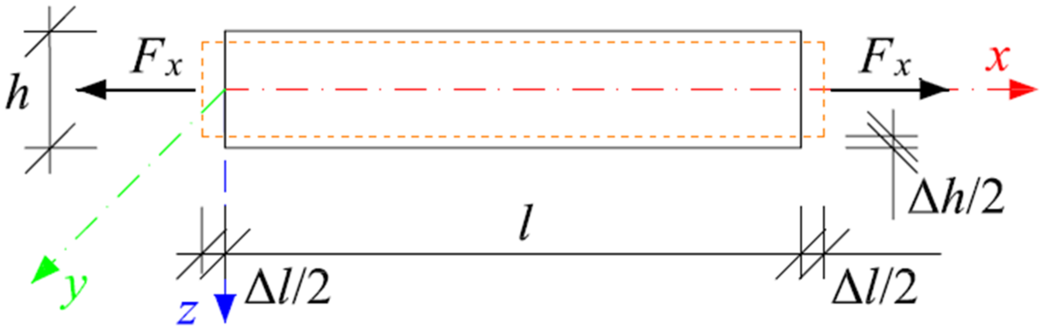
- přímá úměrnost velikosti deformace a napětí

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \;\rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

- *E* – modul pružnosti v tahu a tlaku (Youngův modul pružnosti)
  - ocel – *E* = 210 GPa
  - beton – *E* = 27–44 GPa
  - cihla – *E* = 5 GPa
  - dřevo – *E* = 8–15 GPa (rovnoběžně s vlákny)

VZTAH MEZI NAPĚTÍM A DEFORMACÍ

PŘÍČNÁ KONTRAKCE (prostý tah)



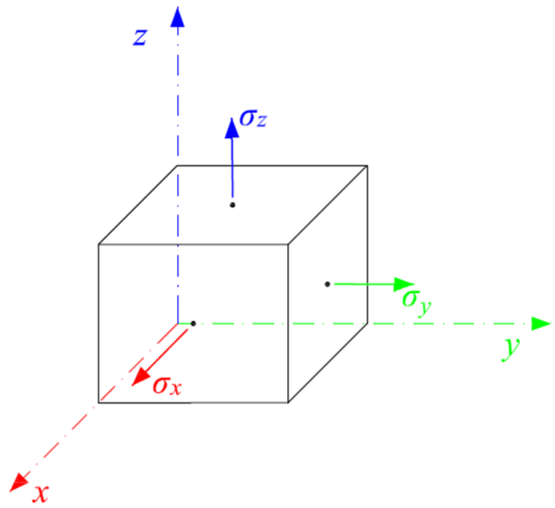
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l};\ \varepsilon_z = \frac{-\Delta h}{h};\ \varepsilon_{z,\sigma_x} = -\nu\varepsilon_x \rightarrow \nu = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$\nu \leq 0{,}5$ – konstanta příčné kontrakce (Poissonův součinitel)

$$\sigma_x > 0;\ \sigma_y = \sigma_z = 0;\ \varepsilon_x > 0;\ \varepsilon_z = \varepsilon_y < 0$$

- ocel – ν = 0.27–0.30
- beton – ν = 0.10–0.20
- pryž – ν = 0.50
- korek – ν = 0.00

PŘÍČNÁ KONTRAKCE



$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,\sigma_x} + \varepsilon_{x,\sigma_y} + \varepsilon_{x,\sigma_z}$$

$$\varepsilon_{x,\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_{x,\sigma_y} = -\,\nu \cdot \varepsilon_{y,\sigma_y} = -\,\nu \frac{\sigma_y}{E};\ \varepsilon_{x,\sigma_z} = -\,\nu \cdot \varepsilon_{z,\sigma_z} = -\,\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

HOOKŮV ZÁKON (smyk)

- přímá úměrnost velikosti deformace a napětí

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

- G – modul pružnosti ve smyku
  - ocel – G = 81 GPa
  - beton – G = 0,42 E GPa
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

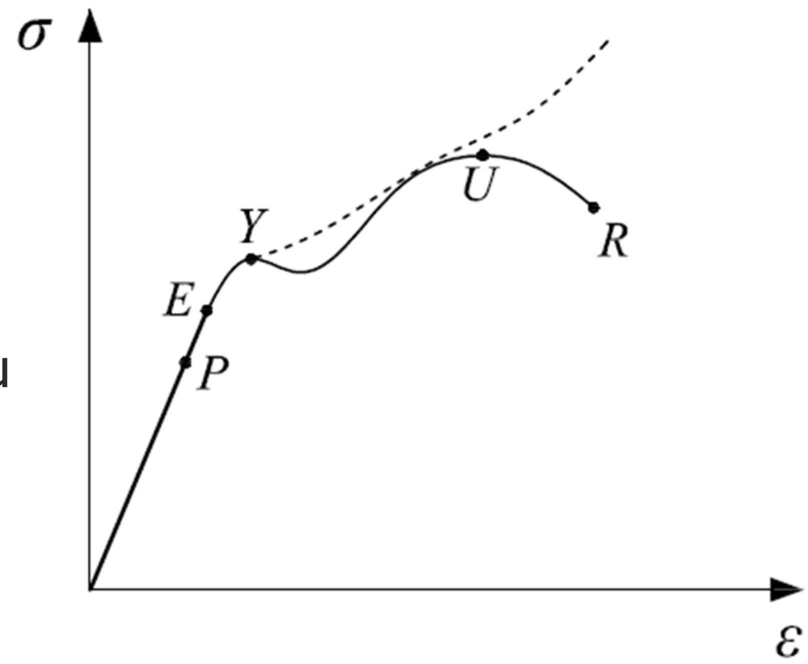
PRACOVNÍ DIAGRAM OCELI

P – mez úměrnosti

platí přímá úměra mezi silou a prodloužením, platí Hookův zákon

E – mez pružnosti

materiál se chová pružně
po odtížení se vrací do původního tvaru



Y – mez kluzu

po dosažení meze kluzu dochází ke vzniku plastické (nevratné) deformace materiálu

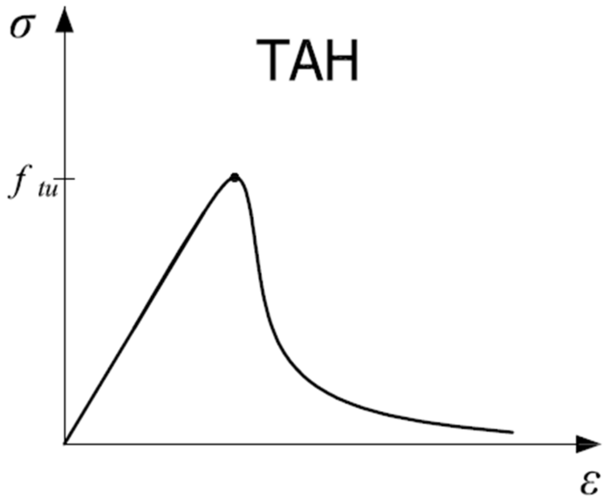
U – mez pevnosti

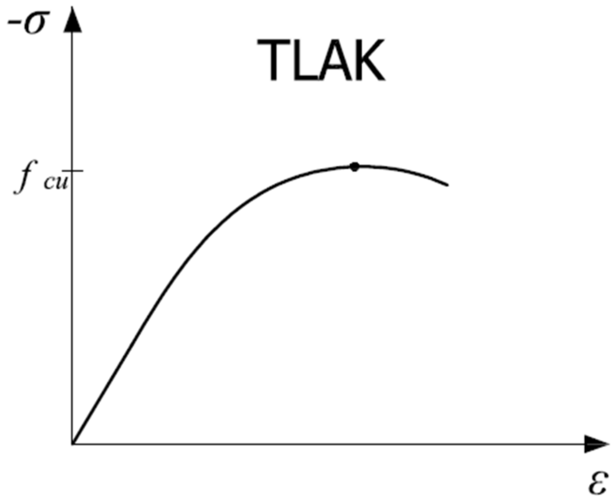
největší napětí, které materiál přenese

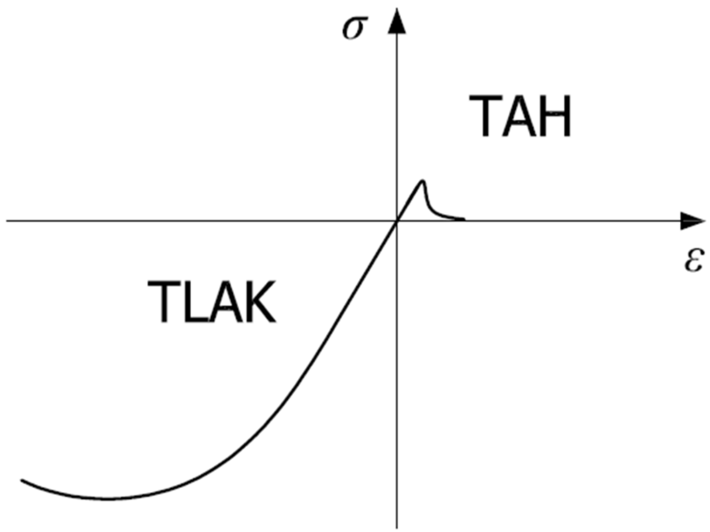
R – porušení

přetržení zkušebního vzorku

PRACOVNÍ DIAGRAM BETONU



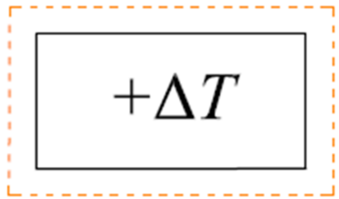




DEFORMACE OD ZMĚNY TEPLOTY

- pokud není bráněno objemovým změnám, vlivem změny teploty se geometrie tělesa mění rovnoměrně ve všech třech směrech

$\rightarrow$ délková změna



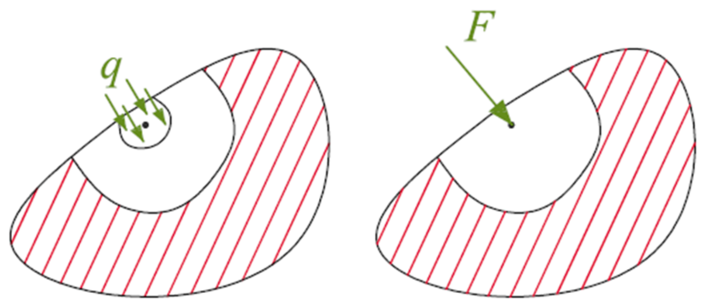
$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha_T \cdot \Delta T$$

α_T – koeficient teplotní roztažnosti

- ocel – α_T = 1·10^{-5} °C^{-1}
- beton – α_T = 1,2·10^{-5} °C^{-1}

SAINT-VENANTŮV PRINCIP LOKÁLNOSTI

- rovnovážná soustava sil ovlivní stav napjatosti jen v blízkém okolí
- ve vzdálenějších bodech má zanedbatelné účinky
- působí-li na omezenou a relativně malou část pružného tělesa dvě různé, ale staticky ekvivalentní silové soustavy, pak stav deformace a napjatosti vně této oblasti je přibližně stejný
  → zjednodušení zatížení – spojité zatížení lze nahradit – idealizovat osamělým břemenem



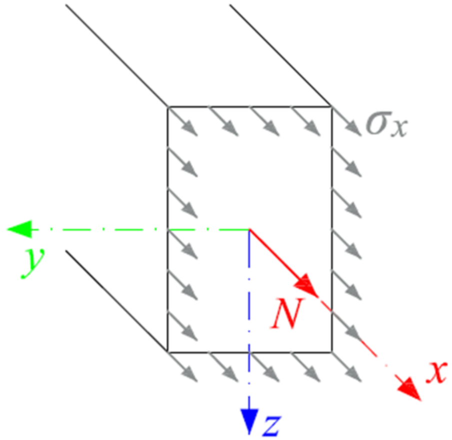
→ idealizace skutečných rozměrů a působiště zatížení do střednice prvku

ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY

- průřezy zůstávají rovinnými a kolmými k ose i po deformaci (Bernoulliho hypotéza) – $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$
- podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí – $\sigma_y = \sigma_z = 0$

$$N_x = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A; \; \sigma_x \cdots konst$$

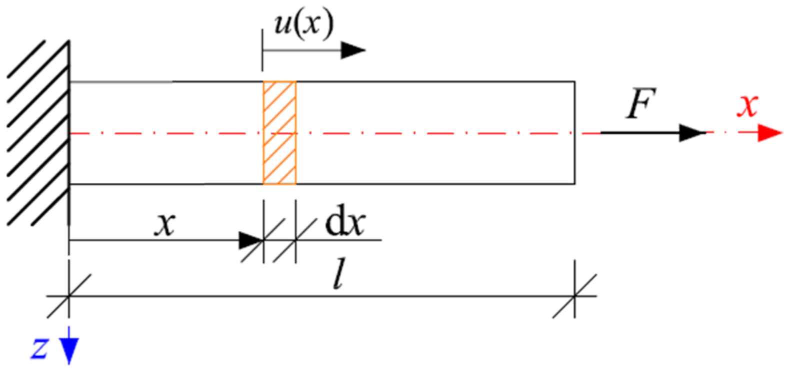
$$N_x = \sigma_x \int_A \mathrm{d}A = \sigma_x \cdot A \rightarrow \boldsymbol{\sigma_x} = \frac{\boldsymbol{N_x}}{\boldsymbol{A}} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}\right]$$

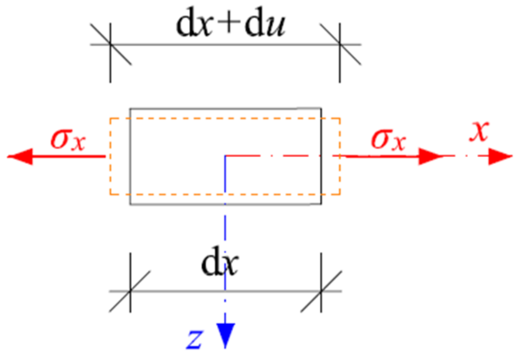


- napětí je po celé ploše průřezu konstantní

PROSTÝ TAH/TLAK

PŘETVOŘENÍ





$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \rightarrow \mathrm{d}u = \varepsilon_x \mathrm{d}x;\ \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \ \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E};\ \boldsymbol{\sigma_x} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{A}}$$

$$u(x) \approx \sum_0^x \mathrm{d}u = \int_0^x \mathrm{d}u = \int_0^x \varepsilon_x \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{\sigma_x}{E} \mathrm{d}x = \frac{\sigma_x}{E} \int_0^x \mathrm{d}x = \frac{F}{EA} \int_0^x \mathrm{d}x = \frac{F \cdot x}{EA}$$

FUNKCE POSUNUTÍ

$\boldsymbol{u(x)} = \frac{\boldsymbol{N_x \cdot x}}{\boldsymbol{EA}} \rightarrow \Delta \boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{N \cdot l}}{\boldsymbol{EA}} \rightarrow N = \frac{EA}{l} \Delta l;\ \frac{EA}{l}$ – tuhost prutu v tahu

ZÁKLADNÍ VELIČINY A ROVNICE

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta l} \arrow[rr, "F = \frac{EA}{l}\Delta l"] \arrow[d, "\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}"'] & & \boxed{F} \\
\boxed{\varepsilon} \arrow[rr, "\sigma = E\varepsilon"] & & \boxed{\sigma} \arrow[u, "F = A\sigma"']
\end{tikzcd}
$$

PŘÍČNÁ DEFROMACE

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x; \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{N}{EA}; \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\Delta h = -\nu \frac{Nh}{EA}}$$

VLIV TEPLOTY

$$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$$

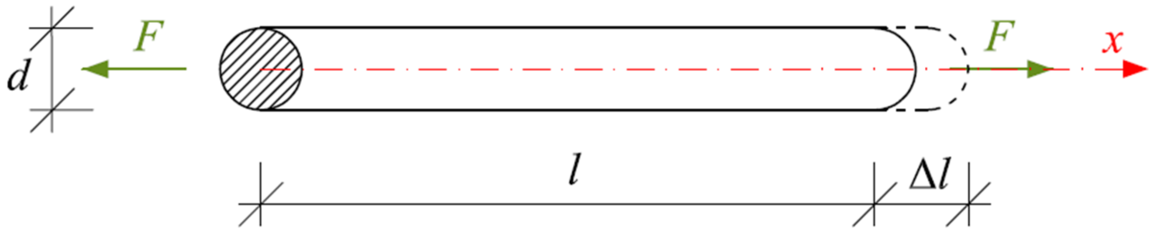
$$\Delta l = \int_0^l \mathrm{d}u_T = \int_0^l \varepsilon_T \mathrm{d}x = \int_0^l \alpha_T \cdot \Delta T \, \mathrm{d}x = \alpha_T \cdot \Delta T \int_0^l \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l}$$

PROSTÝ TAH

Ocelový prut kruhového průřezu *d* = 10 mm a délky *l* = 12 m se účinkem zatížení prodlouží o *Δl*.

Určete sílu, která způsobí prodloužení *Δl* = 15 mm a napětí v prutu, modul pružnosti oceli *E* = 210 GPa



$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA} \rightarrow N = \frac{\Delta l \cdot EA}{l}; A = \pi r^2 \rightarrow N = \frac{0{,}015 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0{,}005^2}{12}$$

$$\boldsymbol{N} = 20\,617\ \mathrm{N} = \mathbf{20{,}617\ kN}$$

$$\boldsymbol{\sigma_x} = \frac{N_x}{A} = \frac{20\,617}{\pi \cdot 0{,}005^2} = 262\,503\,797\ \mathrm{Pa} = \mathbf{262{,}5\ MPa}$$

NÁVRH A POSOUZENÍ PRVKŮ

VÝPOČTOVÁ PEVNOST

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}$$

- f_k – charakteristická pevnost (mez kluzu oceli)
- γ_M – součinitel spolehlivosti (ocel 1,1)

NÁVRH

$$f_d \geq \sigma = \frac{N}{A};\ f_d = \frac{N}{A} \rightarrow A_0 = \frac{N}{f_d}$$

$A_N \geq A_0;\ A_N$ – navržená plocha průřezu

POSUDEK

$$\boldsymbol{f_d} \geq \boldsymbol{\sigma} = \frac{N}{A};\ N_d = f_d \cdot A_N;\ \boldsymbol{N_d} \geq \boldsymbol{N}$$