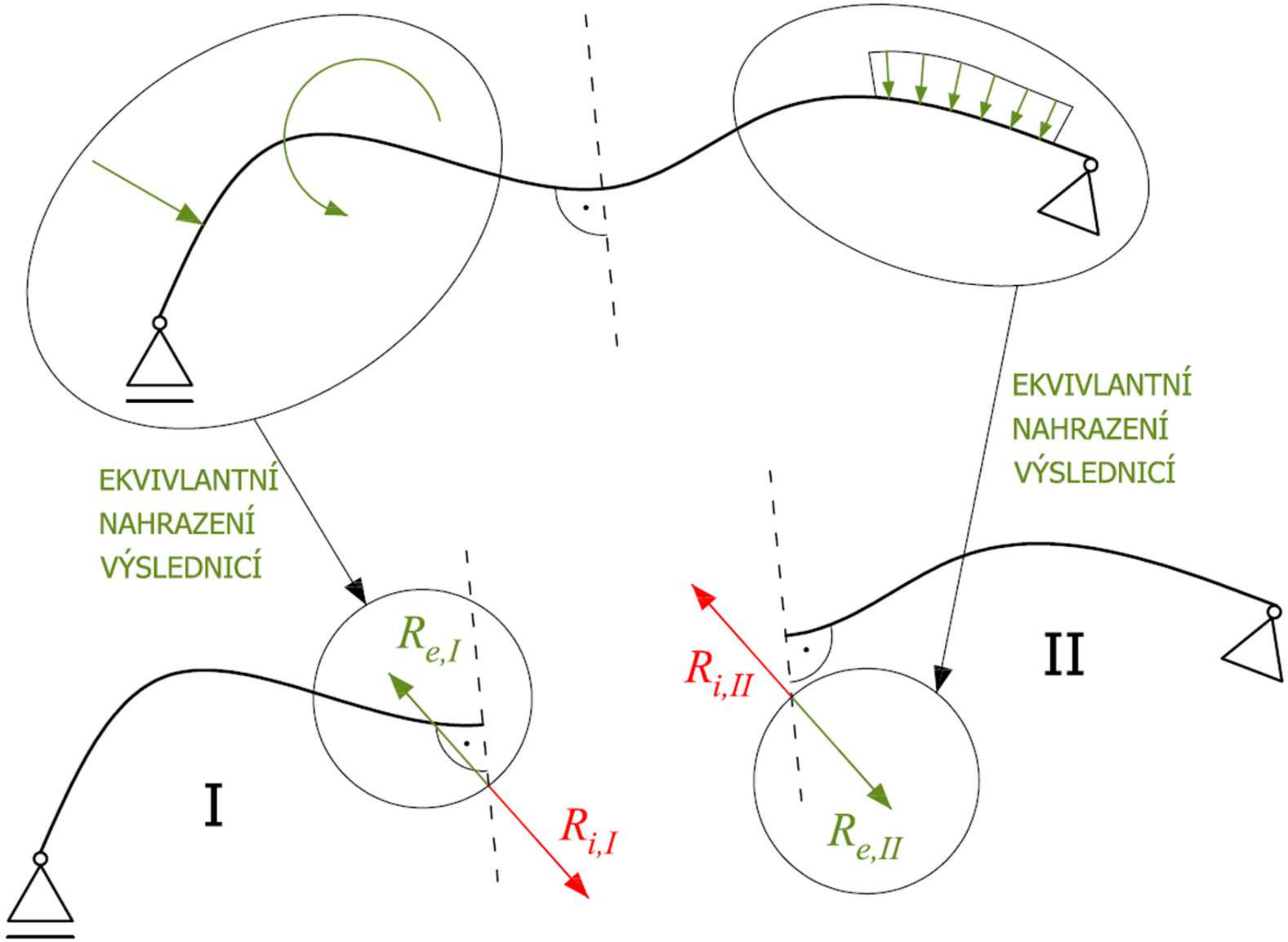
BDA015 Stavební mechanika 1
4. přednáška

- Vnitřní síly
- Diferenciální podmínky rovnováhy
- Průběhy vnitřních sil

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

VÝSLEDNICE VNITŘNÍCH SIL



VÝSLEDNICE VNITŘNÍCH SIL

- nosník je v rovnováze → složky reakcí vnějších vazeb stanovíme ze statických podmínek rovnováhy
- libovolným bodem střednice nosníku vedeme rovinu kolmou ke střednici nosníku → rozdělení nosníku na část I a část II
- vzájemné účinky nahradíme výslednicí vnitřních sil

PODMÍNKY ROVNOVÁHY NA KAŽDÉ ČÁSTI

$$R_{i,I} + R_{e,I} = 0$$

$$R_{i,II} + R_{e,II} = 0$$

ZÁKON AKCE A REAKCE

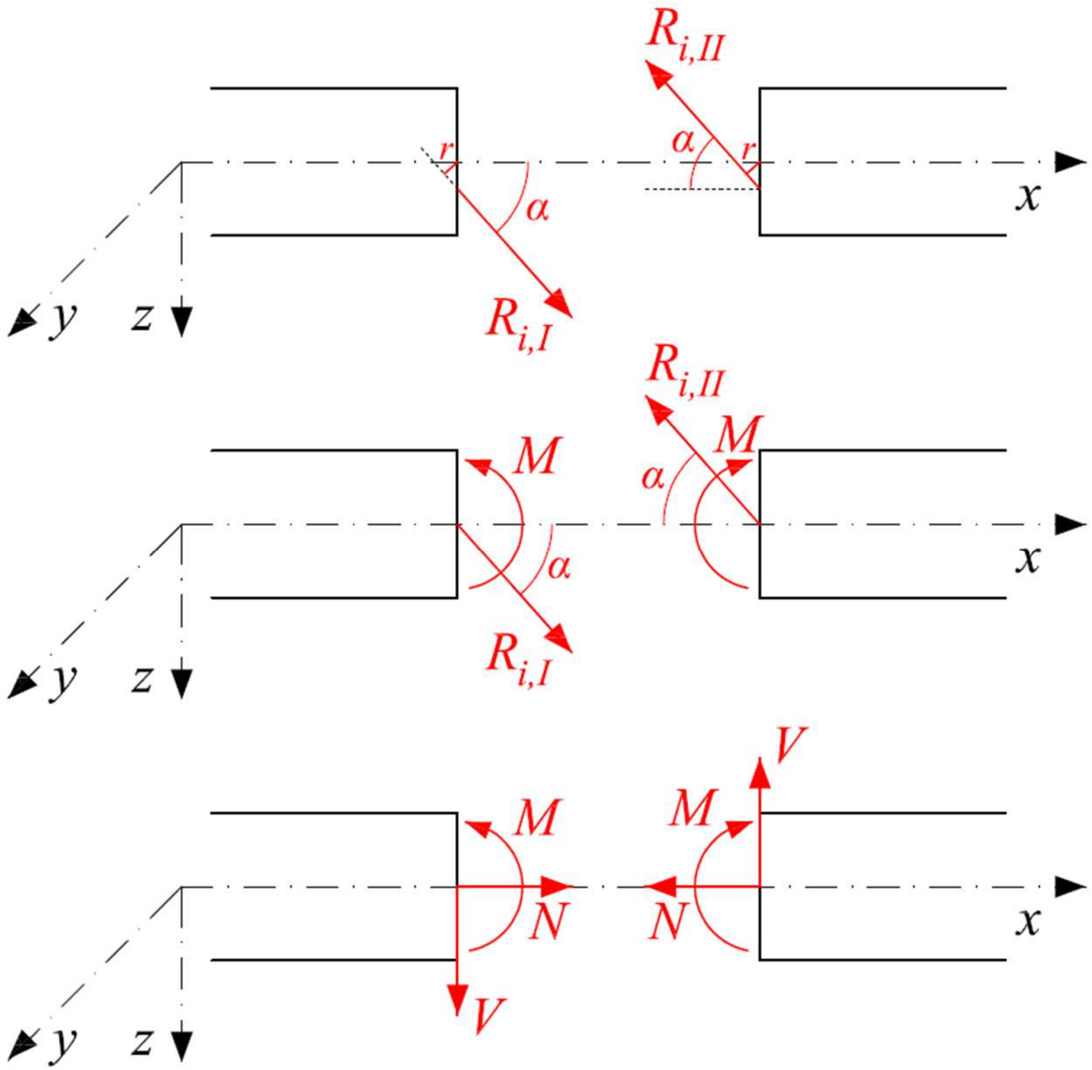
$$R_{i,I} = -R_{i,II}$$

PODMÍNKY EKVIVALENCE ÚČINKŮ VÝSLEDNIC VNĚJŠÍCH A VNITŘNÍCH SIL

$$R_{i,I} = R_{e,II}$$

$$R_{i,II} = R_{e,I}$$

SLOŽKY VÝSLEDNICE VNITŘNÍCH SIL



$M = R_i \cdot r$

$N = R_i \cdot \cos\alpha$

$V = R_i \cdot \sin\alpha$

SLOŽKY VÝSLEDNICE VNITŘNÍCH SIL

NORMÁLOVÁ SÍLA N

- algebraický součet průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku, do směru osy nosníku
- kladná normálová síla N vyvozuje tah a působí z průřezu

POSOUVAJÍCÍ SÍLA V

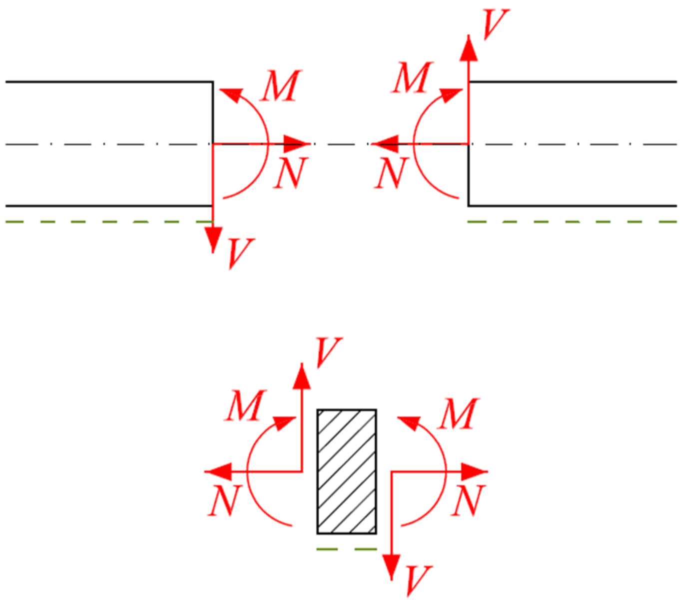
- algebraický součet průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku, do směru kolmého na osu nosníku
- kladná posouvající síla V vyvolává otáčení elementu nosníku po směru chodu hodinových ručiček

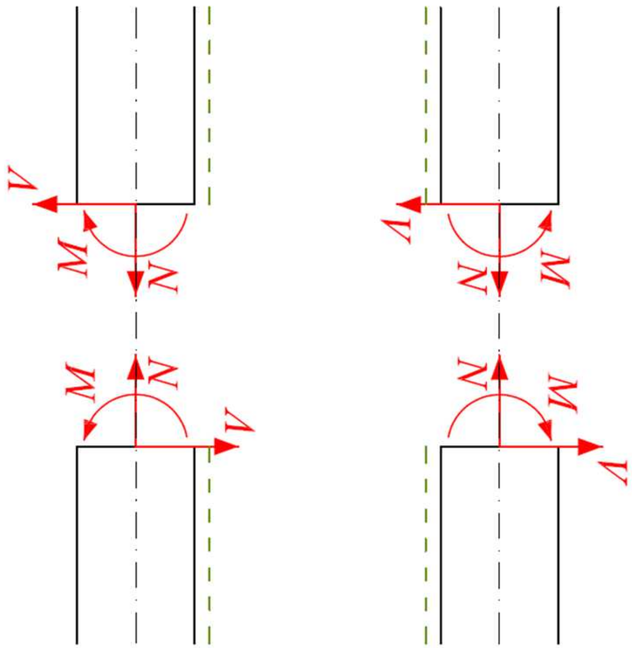
OHYBOVÝ MOMENT M

- algebraický součet statických momentů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část nosníku, k těžišti průřezu
- kladný ohybový moment M vyvolá tah v dolních vláknech a tlak v horních vláknech

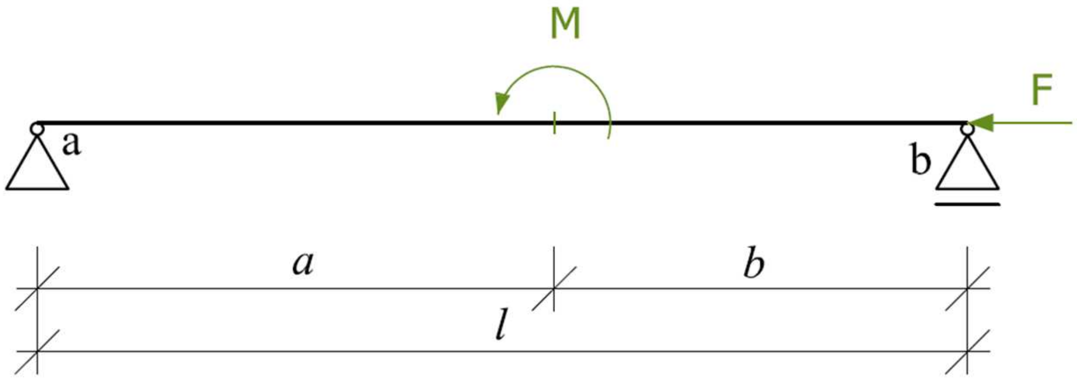
DIAGRAMY VNITŘNÍCH SIL

- N, V, M vynášíme v každém bodě střednice nosníku
- kladné N a V vynášíme nad a záporné pod základní stranu, která je totožná s osou nosníku
- kladné M vynášíme vždy na stranu tažených vláken!!!
  (ke spodním vláknům)

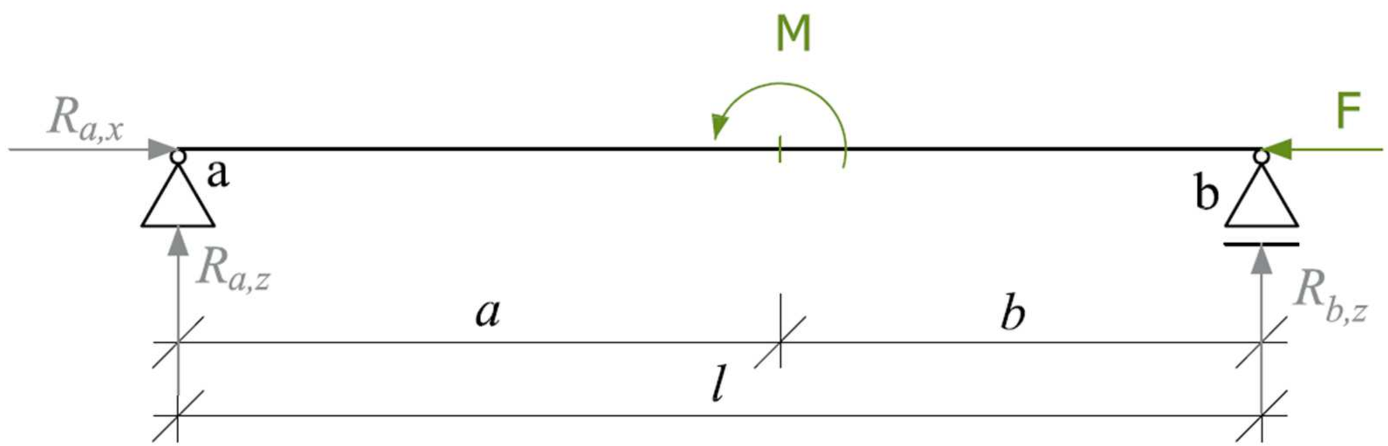




NA ZADANÉM NOSNÍKU VYKRESLETE PRŮBĚHY VNITŘNÍCH SIL

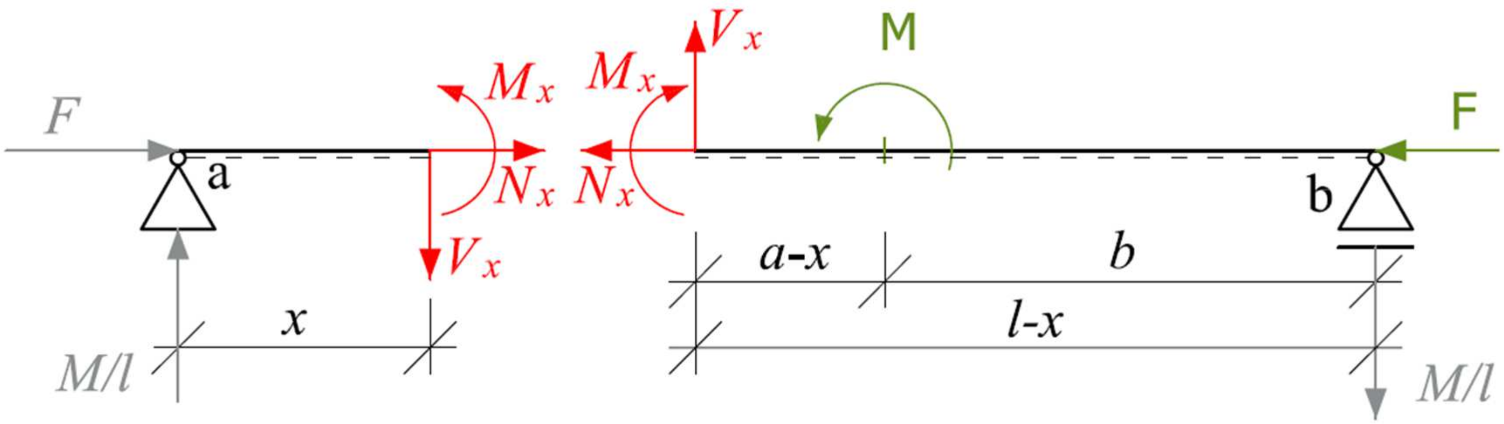


1) Výpočet reakcí



- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = F$ $\oplus \rightarrow$
- $\sum M_{i,a} = 0; \quad M + R_{b,z} \cdot l = 0 \rightarrow R_{b,z} = -\frac{M}{l}$ $\oplus$
- $\sum M_{i,b} = 0; \quad M - R_{a,z} \cdot l = 0 \rightarrow R_{a,z} = \frac{M}{l}$

2) diagramy vnitřních sil *x* < *a*

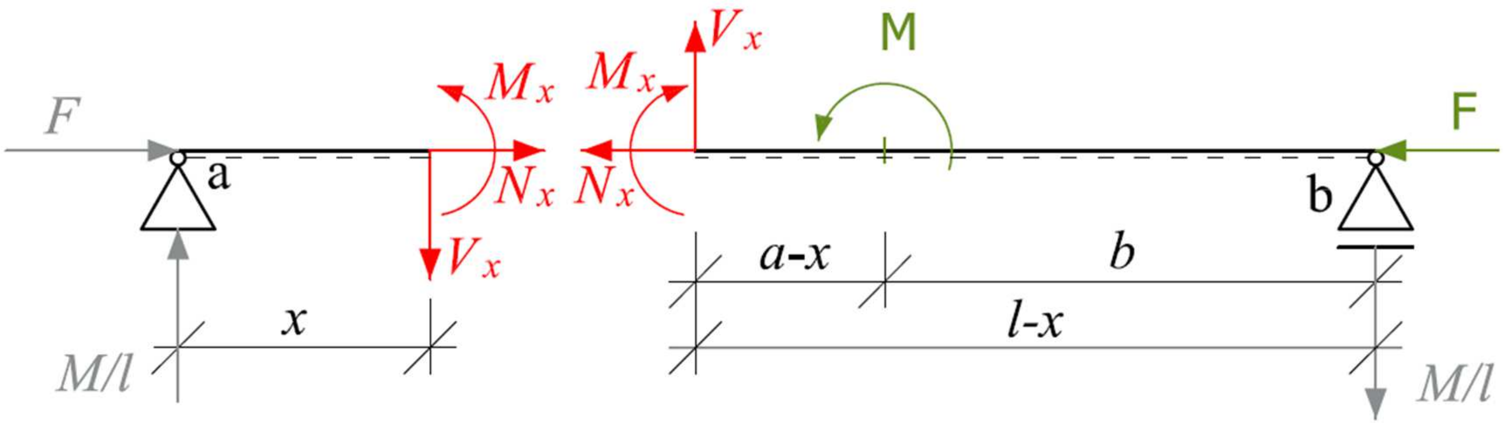


2a) rovnice rovnováhy na levé části

- $\sum F_{i,x}^{L} = 0{:}\ F + N_x = 0 \ \rightarrow N_x = -F$
- $\sum F_{i,z}^{L} = 0{:} -M/l + V_x = 0 \ \rightarrow V_x = M/l$
- $\sum M_{i,x}^{L} = 0{:} -M/l \cdot x + M_x = 0 \ \rightarrow M_x = \frac{M \cdot x}{l}$

DIAGRAMY VNITŘNÍCH SIL

2) diagramy vnitřních sil *x* < *a*

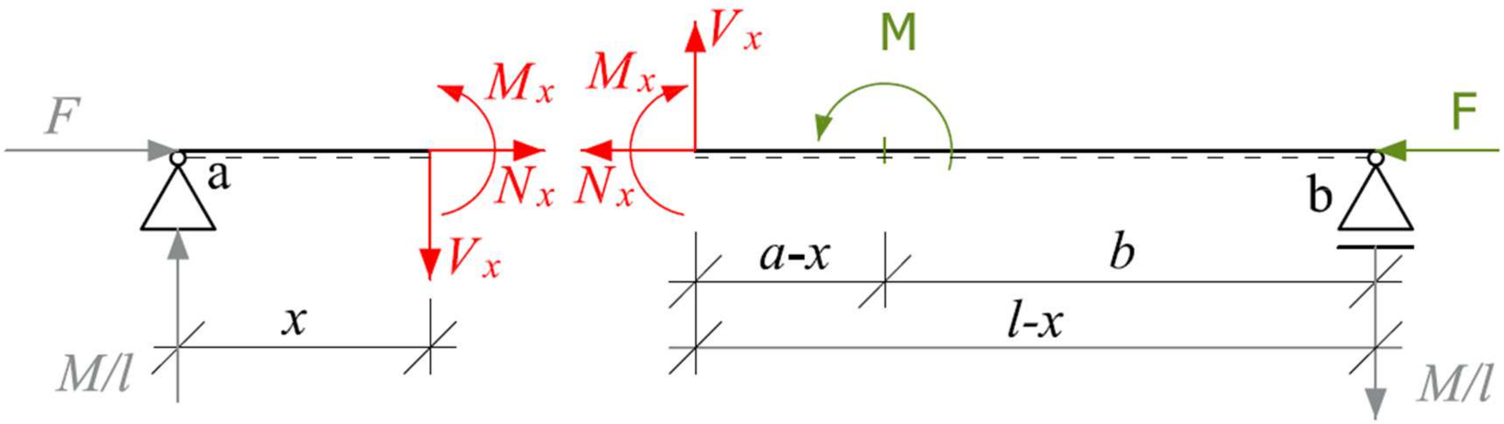


2b) rovnice rovnováhy na pravé části

- $\sum F_{i,x}^{P} = 0\!: -N_x - F = 0 \;\rightarrow N_x = -F$
- $\sum F_{i,z}^{P} = 0\!: -V_x + M/l = 0 \;\rightarrow V_x = M/l$
- $\sum M_{i,x}^{P} = 0\!: -M_x + M - M/l \cdot (l - x) = 0$

$\rightarrow M_x = M - (M/l) \cdot l + \frac{M \cdot x}{l} = \frac{M \cdot x}{l}$

2) diagramy vnitřních sil *x* < *a*

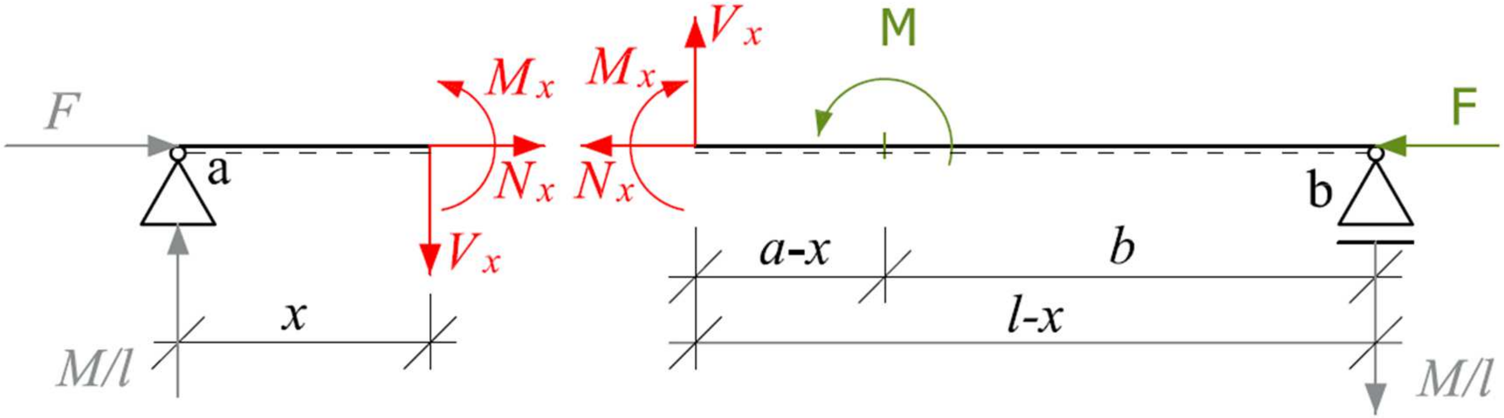


2c) rovnice ekvivalence na levé části

- $N_x^L = \sum F_{x,e}^P \rightarrow N_x^L = -F$ $\oplus$
- $V_x^L = \sum F_{z,e}^P \rightarrow V_x^L = M/l$ $\oplus$
- $M_x^L = \sum M_e^P \rightarrow M_x^L = M - M/l \cdot (l - x) = \frac{M \cdot x}{l}$ $\oplus$

DIAGRAMY VNITŘNÍCH SIL

2) diagramy vnitřních sil *x* < *a*

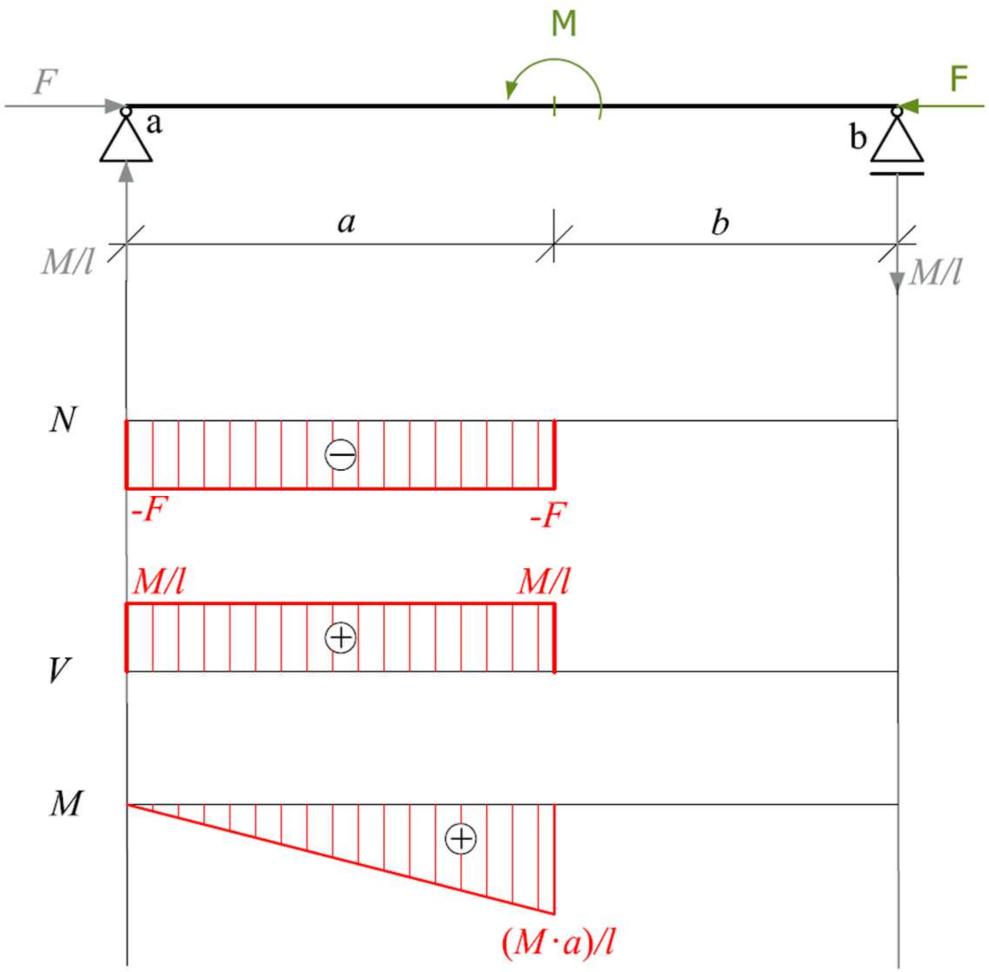


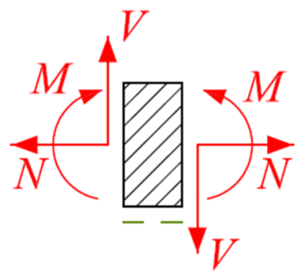
2d) rovnice ekvivalence na pravé části

- $N_x^P = \sum F_{x,e}^L \rightarrow -N_x^P = F \rightarrow N_x^P = -F$
- $V_x^P = \sum F_{z,e}^L \rightarrow -V_x^P = -M/l \rightarrow V_x^P = M/l$
- $M_x^P = \sum M_e^L \rightarrow -M_x^P = -M/l \cdot x \rightarrow M_x^P = \frac{M \cdot x}{l}$

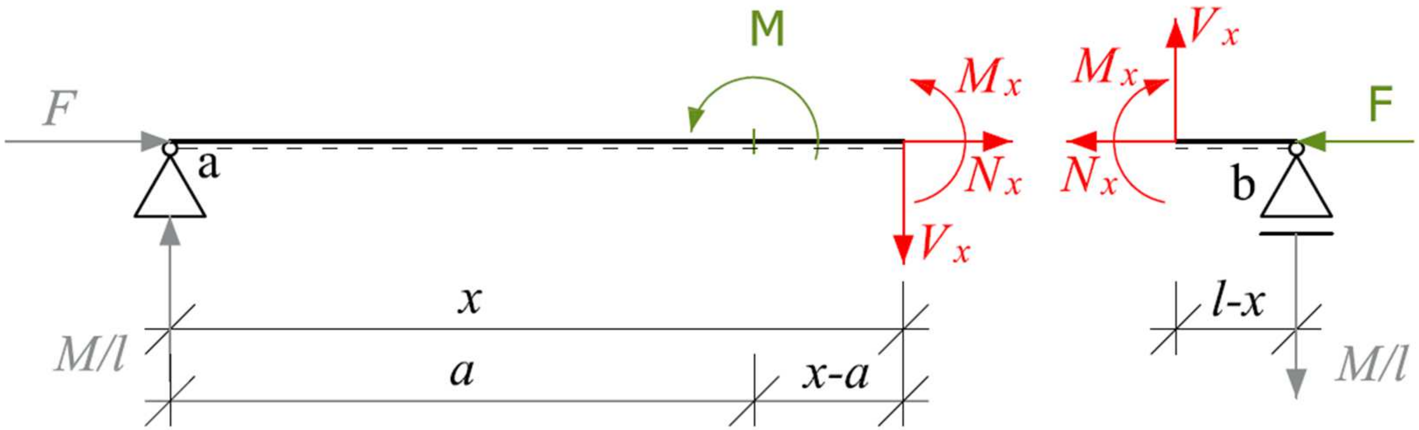
DIAGRAMY VNITŘNÍCH SIL

2) diagramy vnitřních sil *x* < *a*





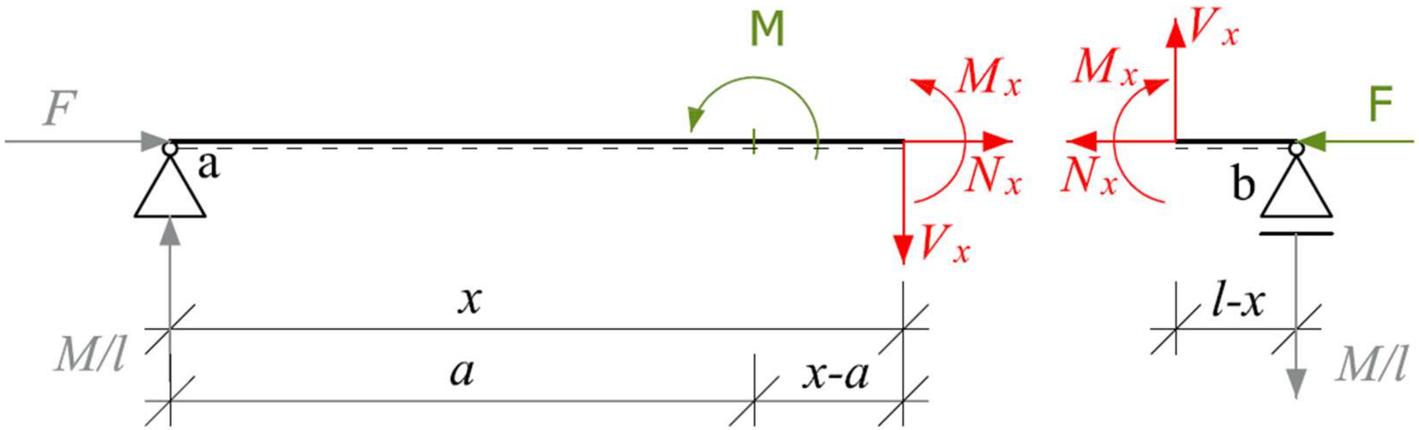
3) diagramy vnitřních sil *x* > *a*



3a) rovnice rovnováhy na levé části

- $\sum F_{i,x}^{L} = 0\text{:}\ F + N_x = 0 \ \rightarrow N_x = -F$
- $\sum F_{i,z}^{L} = 0\text{:} -M/l + V_x = 0 \ \rightarrow V_x = M/l$
- $\sum M_{i,x}^{L} = 0\text{:} -\frac{M}{l} \cdot x + M + M_x = 0 \ \rightarrow M_x = \frac{M \cdot x}{l} - M = \frac{M}{l}(x - l)$

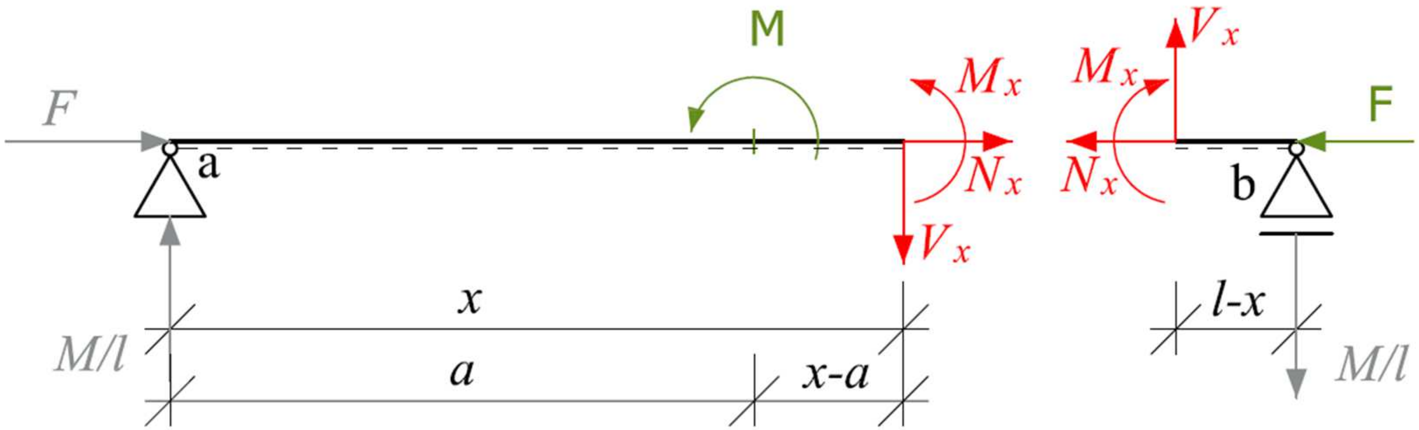
3) diagramy vnitřních sil *x* > *a*



3b) rovnice rovnováhy na pravé části

- $\sum F_{i,x}^{P} = 0\colon -N_x - F = 0 \;\rightarrow N_x = -F$
- $\sum F_{i,z}^{P} = 0\colon -V_x + M/l = 0 \;\rightarrow V_x = M/l$
- $\sum M_{i,x}^{P} = 0\colon -M_x - M/l \cdot (l - x) = 0 \;\rightarrow M_x = -\frac{M}{l}(l - x) = \frac{M \cdot x}{l} - M$

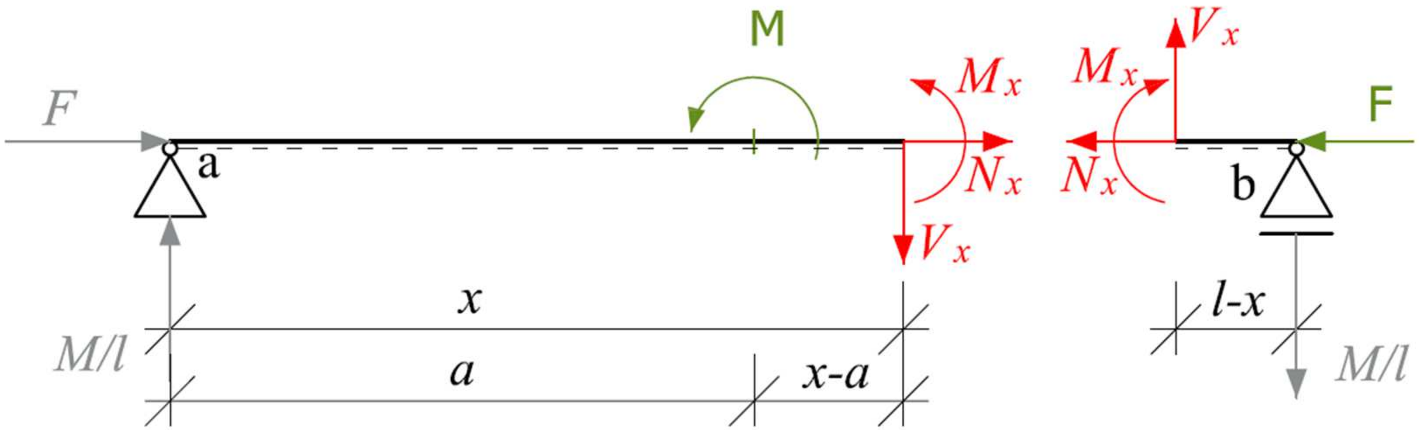
3) diagramy vnitřních sil *x* > *a*



3c) rovnice ekvivalence na levé části

- $N_x^L = \sum F_{x,e}^P \rightarrow N_x^L = -F$ $\oplus$
- $V_x^L = \sum F_{z,e}^P \rightarrow V_x^L = M/l$ $\oplus$
- $M_x^L = \sum M_e^P \rightarrow M_x^L = -M/l \cdot (l-x) = \frac{M \cdot x}{l} - M$ $\oplus$

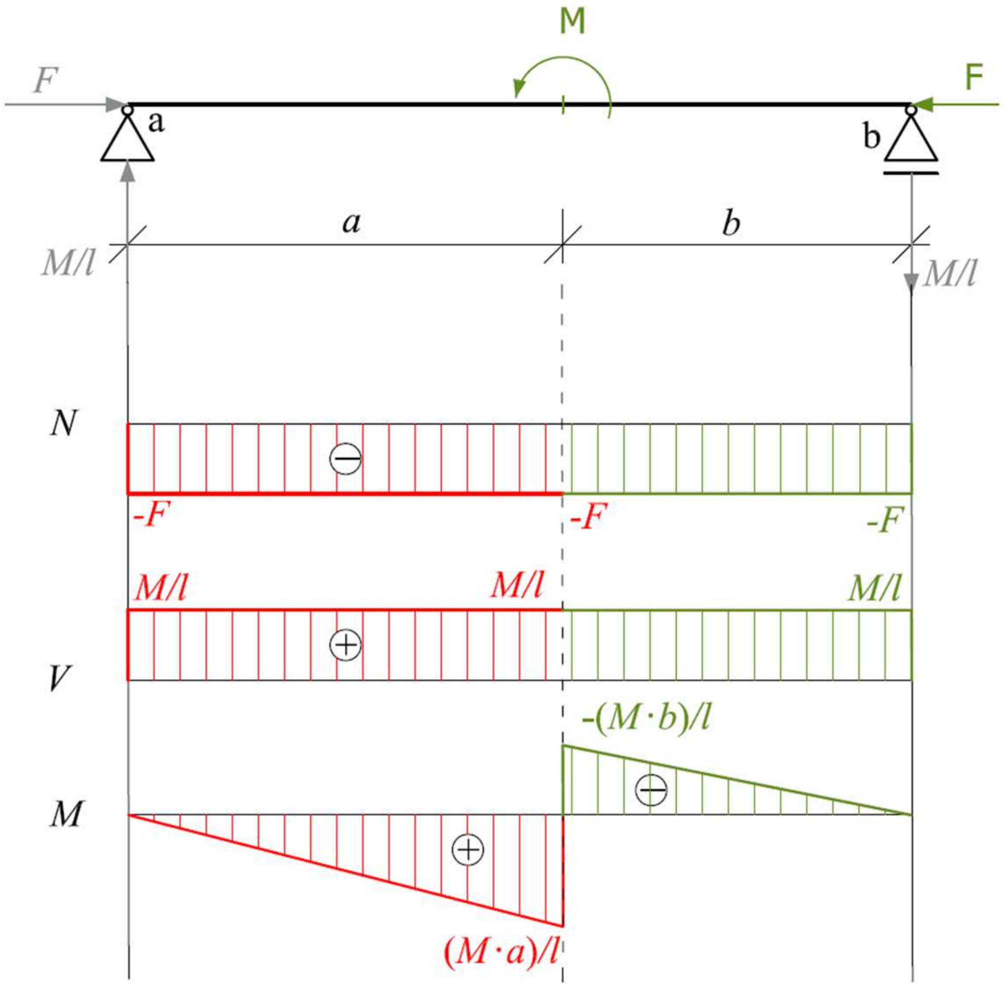
3) diagramy vnitřních sil *x* > *a*

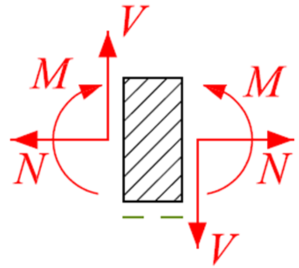


3d) rovnice ekvivalence na pravé části

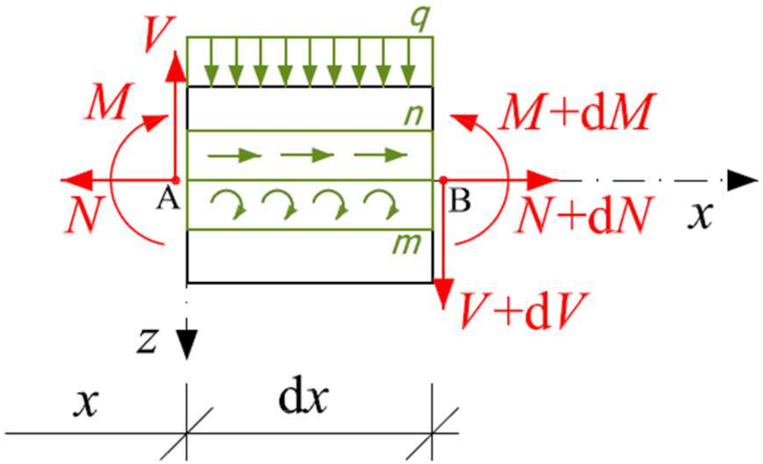
- $N_x^P = \sum F_{x,e}^L \rightarrow -N_x^P = F \rightarrow N_x^P = -F$ $\oplus$
- $V_x^P = \sum F_{z,e}^L \rightarrow -V_x^P = -M/l \rightarrow V_x^P = M/l$ $\oplus$
- $M_x^P = \sum M_e^L \rightarrow -M_x^P = -\frac{M}{l} \cdot x + M \rightarrow M_x^P = \frac{M \cdot x}{l} - M$ $\oplus$

3) diagramy vnitřních sil *x* > *a*





DIFRENCIÁLNÍ PODMÍNKY ROVNOVÁHY



- $\sum F_{i,x} = 0 \rightarrow -N + (N + \mathrm{d}N) + n \cdot \mathrm{d}x = 0 \rightarrow \dfrac{\mathrm{d}N}{dx} = -n$ $\oplus$
- $\sum F_{i,z} = 0 \rightarrow -V + (V + \mathrm{d}V) + q \cdot \mathrm{d}x = 0 \rightarrow \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q$ $\oplus$
- $\sum M_{i,B} = 0 \rightarrow -M + (M + \mathrm{d}M) - V \cdot \mathrm{d}x + q \cdot \mathrm{d}x \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{2} - m \cdot \mathrm{d}x = 0$ $\oplus$

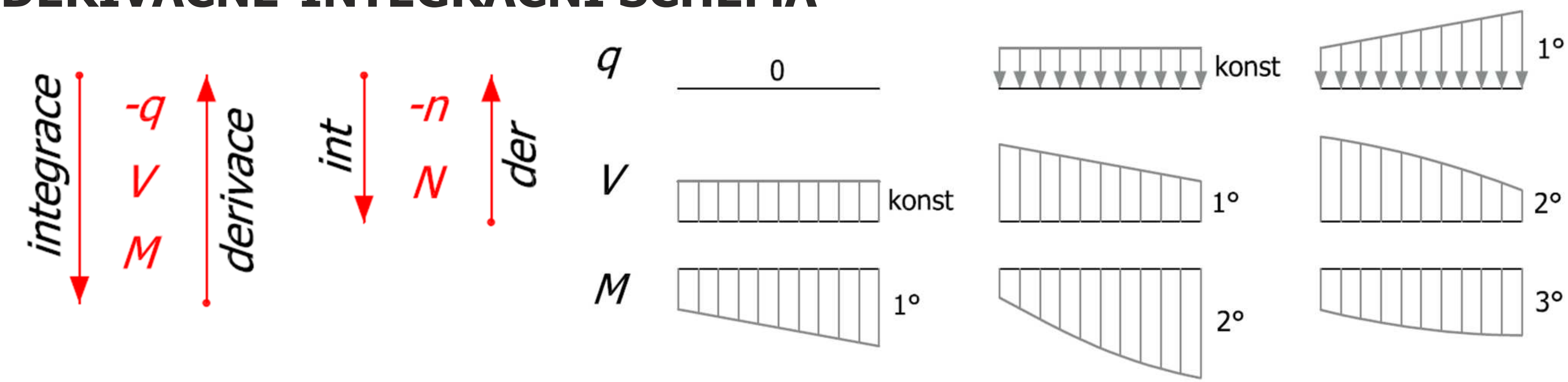
  $\rightarrow \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V + m$; pokud $m = 0 \rightarrow \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V$ „Schwedlerova věta"

INTEGRACE DIF. PODM. ROVNOVÁHY

integrací diferenciálních podmínek rovnováhy lze získat složky výslednice vnitřních sil v průřezu *x*

- $\frac{\mathrm{d}N}{dx} = -n \qquad\qquad N = -\int n\,\mathrm{d}x + C_1$
- $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -q \qquad\qquad V = -\int q\,\mathrm{d}x + C_2$
- $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = V \qquad\qquad M = \int V\,\mathrm{d}x + C_3;\ \text{pokud}\ m = 0$

DERIVAČNĚ-INTEGRAČNÍ SCHÉMA



EXTRÉMY VNITŘNÍCH SIL

PRVNÍ DERIVACE FUNKCE PODLE PROMĚNNÉ JE ROVNA 0 → EXTRÉM FUNKCE

- $\max f(x) \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0;\ \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}^2 x} < 0 \rightarrow$ funkce je konkávní
- $\min f(x) \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0;\ \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}^2 x} > 0 \rightarrow$ funkce je konvexní

EXTRÉMY SLOŽEK VÝSLEDNICE VNITŘNÍCH SIL

- max, min N → tam, kde n = 0
- max, min V → tam, kde q = 0
- max, min M → tam, kde V = 0 nebo když mění znaménko