BDA015 Stavební mechanika 1
1. přednáška

- Úkoly stavební mechaniky
- Základní pojmy, principy a axiomy
- Rovinné soustavy sil

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (Hana.Simonova@vut.cz)

studuje mechanický pohyb hmotných těles

podle **skupenství vyšetřovaných těles**

- mechanika pevných těles, kapalin a plynů

podle **pohybu těles**

- statika – studuje rovnováhu zatížených těles (prostor, síla)
- dynamika – studuje pohyb těles, zkoumá účinky sil, působících na pohybující se tělesa
    - kinematika – pouze geometrický popis (prostor, čas)
    - kinetika – příčiny (prostor, čas, hmotnost, síla)

podle **zpracování látky**

- teoretická – všeobecné zákony bez ohledu na praktické využití
- aplikovaná – problémy jednotlivých oborů, využití závěrů teoretické mechaniky a výsledků experimentálních výzkumů

teoretická mechanika aplikovaná na stavební konstrukce

Statika stavebních konstrukcí

- vyšetřuje stavební konstrukce v klidu, podmínky rovnováhy

Stavební **dynamika**

- dynamické účinky vnějších sil působících na konstrukce

Teorie **pružnosti a plasticity**

- výpočet deformací a napětí konstrukce

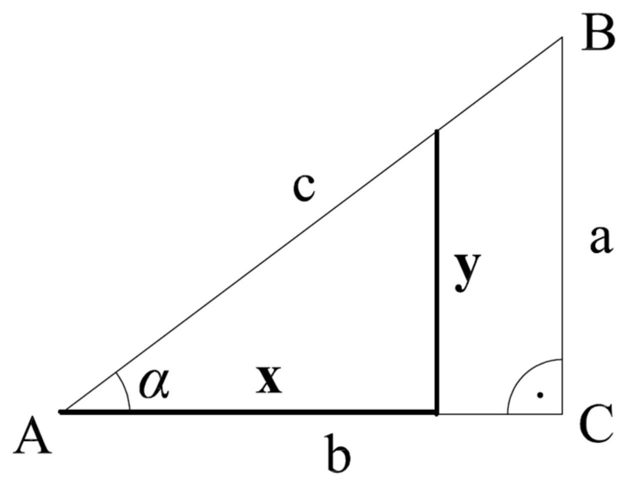
Úkoly stavební mechaniky

- výpočet stavebních konstrukcí
- optimální návrh stavební konstrukce
    - přenos statického i dynamického zatížení
    - přípustné deformace
    - kritéria hospodárnosti

ZÁKLADY Z TRIGONOMETRIE

PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

- $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ protilehlá odvěsna ku přeponě
- $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ přilehlá odvěsna ku přeponě
- $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}$ protilehlá ku přilehlé odvěsně
- $c^2 = a^2 + b^2$ Pythagorova věta
- $\frac{b}{a} = \frac{x}{y}$ podobnost trojúhelníků



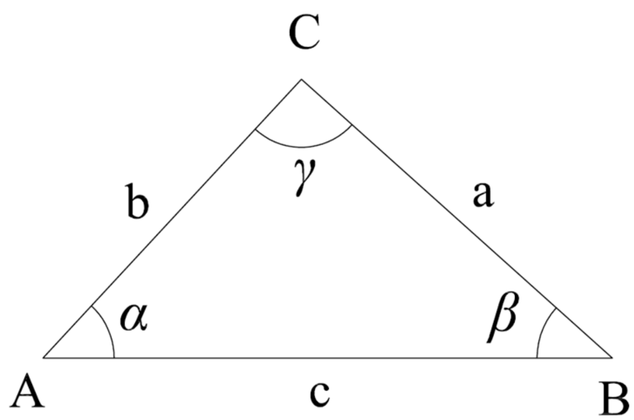
OBECNÝ TROJÚHLENÍK

- sinová věta

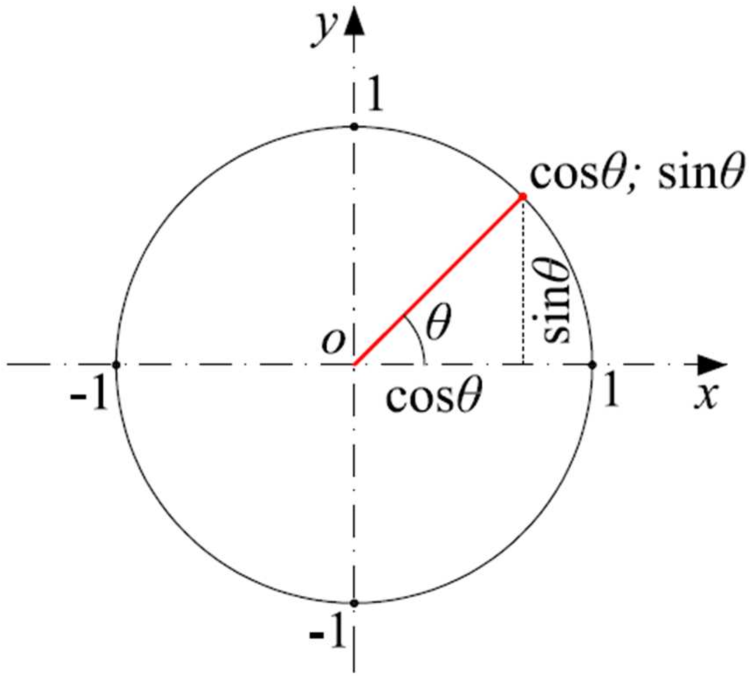
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

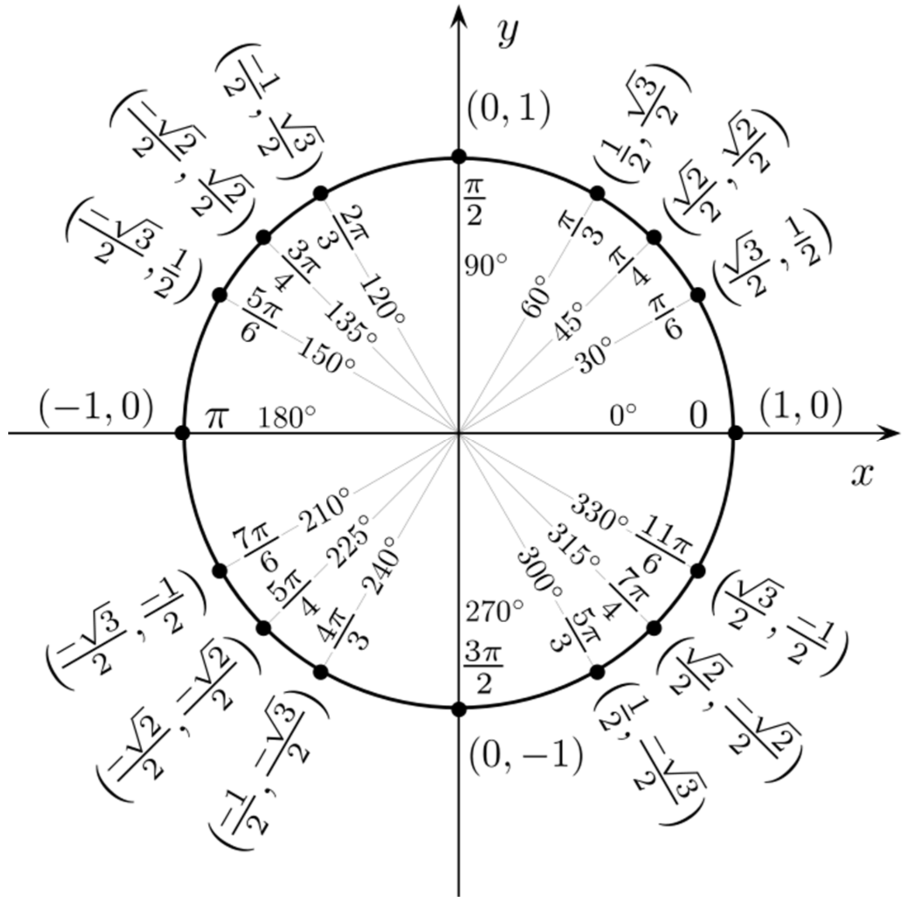
- kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



JEDNOTKOVÁ KRUŽNICE





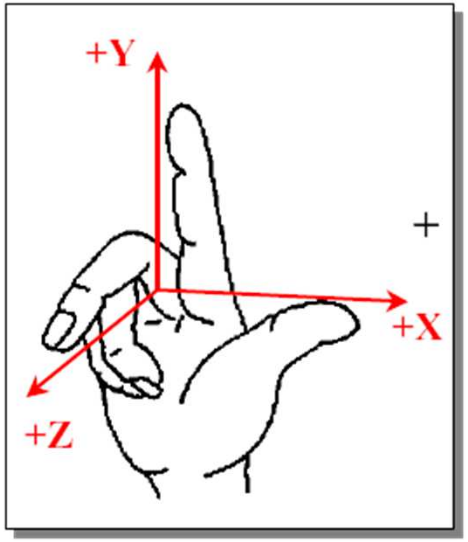
zdroj: maths.cz/clanky/140-jednotkova-kruznice

KARTÉZSKÝ SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM

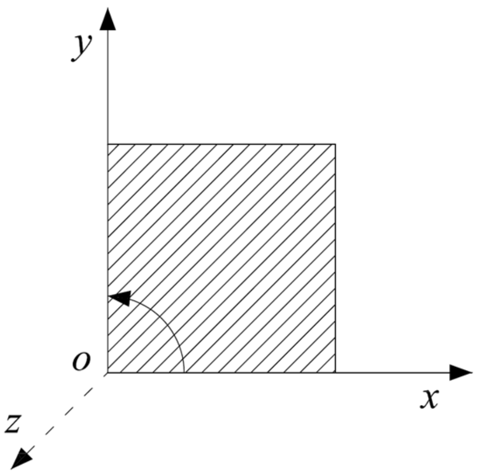
- pravoúhlý a pravotočivý

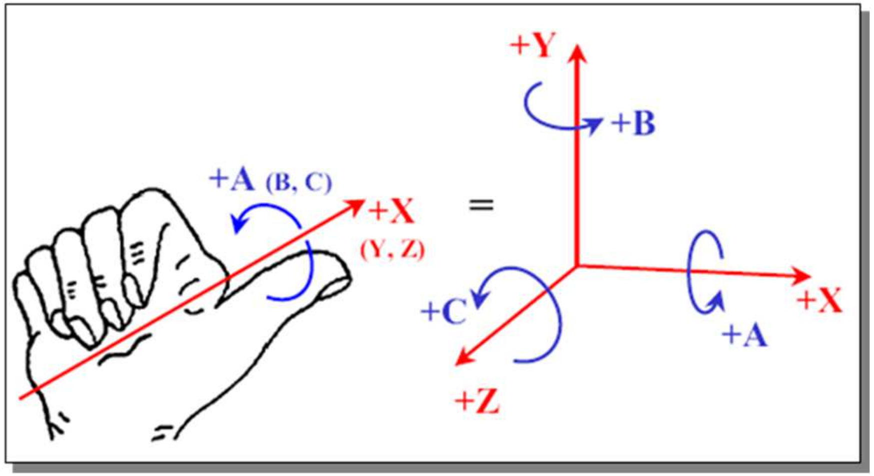
PROSTOR (3D)

- pravidlo pravé ruky
  - osa x – palec
  - osa y – ukazováček
  - osa z – prostředníček



ROVINA (2D)





zdroj: sst.opava.cz/pernikar/nove_www/CNC_soubory/souradnice.htm

ZÁKLADNÍ POJMY

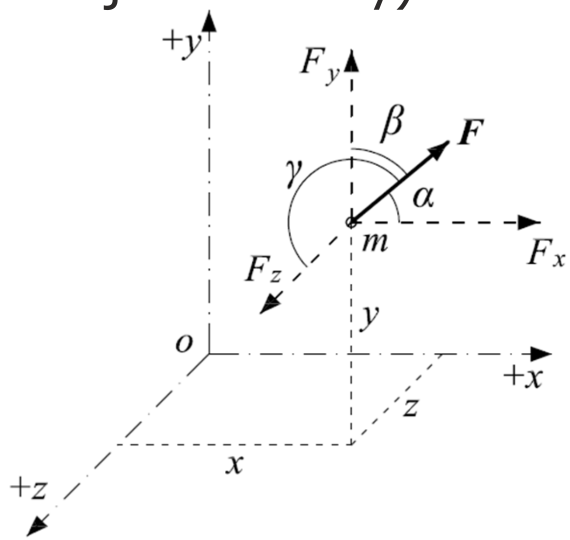
DOKONALE TUHÉ TĚLĚSO
nemění svůj tvar při působení libovolné soustavy sil

HMOTNÝ BOD
nahrazuje reálné tuhé těleso za předpokladu, že trajektorie všech bodů při pohybu tělesa jsou stejné (hmota soustředěná v těžišti)

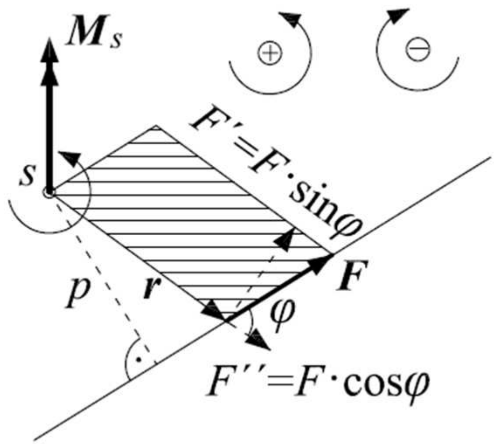
TUHÁ DESKA V ROVINNĚ
jeden rozměr výrazně menší (hmotnost rozložena do jedné roviny)

PRUT (NOSNÍK)
dva rozměry výrazně menší
(hmotnost rozložena v ose prutu)

OSAMĚLÁ SÍLA
vektor (velikost, směr a smysl, působiště)
- vnější
- vnitřní



STATICKÝ MOMENT SÍLY K BODU (VÁZANÝ MOMENT)



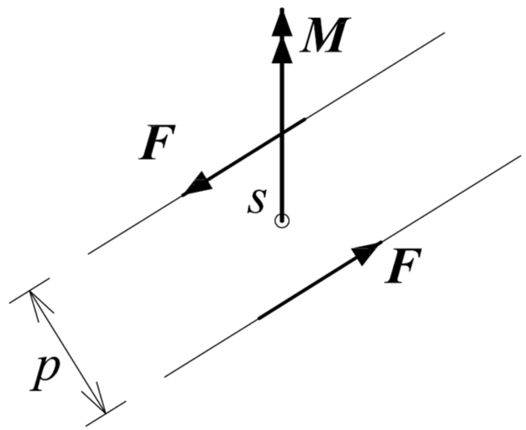
- s – momentový střed
- $M_s = Fp = F'r = Fr\sin\varphi$
- vektor vázaný na bod s
  $\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
  (velikost, směr a smysl, působiště)
- statický moment M_s má stálou velikost ke kterémukoliv bodu přímky rovnoběžné se silou F
- statický moment výslednice rovinné soustavy sil k libovolnému bodu ležícímu v rovině sil, je roven vektorovému součtu statických momentů jednotlivých sil soustavy ke stejnému bodu

  $\boldsymbol{M}_s = \boldsymbol{M}_{s,R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_{s,i} \rightarrow M_s = M_{s,R} = \sum_{i=1}^{n} M_{s,i}$

  (Varignonova věta)

ZÁKLADNÍ POJMY

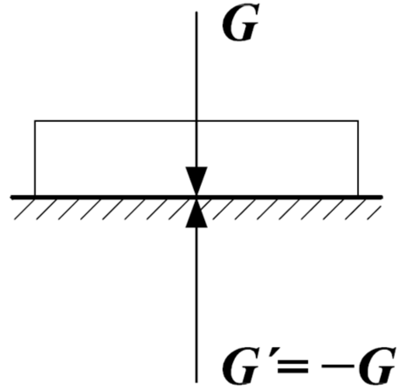
DVOJICE SIL (VOLNÝ MOMENT)



- soustava dvou rovnoběžných sil stejně velkých, opačného smyslu, neležících v jednom paprsku
- výsledný účinek je moment $M = F \cdot p$ stejný ke všem bodům roviny
- s – libovolný bod roviny dvojice sil
- dvojici sil lze v její rovině libovolně posouvat a otáčet
- dvojici sil o momentu $\boldsymbol{M}$ lze nahradit libovolnou jinou dvojicí sil v té samé rovině, která má s původní dvojicí sil moment stejné velikosti a smyslu

NEWTONOVY POHYBOVÉ ZÁKONY (1687)

- **zákon setrvačnosti**
  jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu
- **zákon síly**
  jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa ($\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$)
- **zákon akce a reakce**
  (základní zákon statiky)
  každá akce vyvolá reakci stejně velkou, ale opačného smyslu

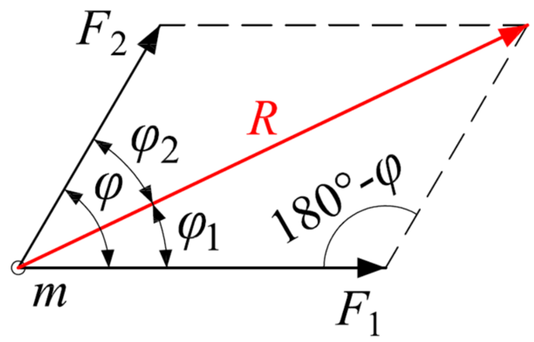


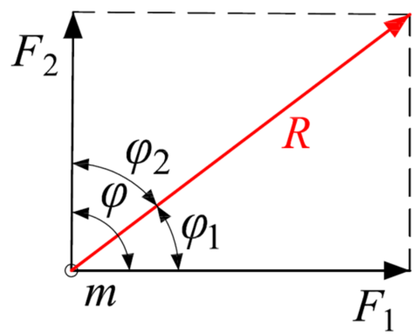
platí pro soustavu sil působící na dokonale tuhé těleso

Axiom 1

vektor výslednice $\boldsymbol{R}$ dvou různoběžných sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ působících v jednom bodě je úhlopříčka rovnoběžníku o stranách $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_1$$





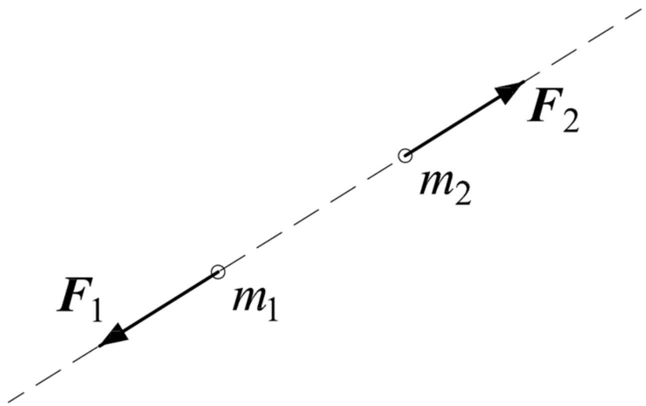
$$R = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \varphi)}$$
$$= \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$$

$$R = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2}$$

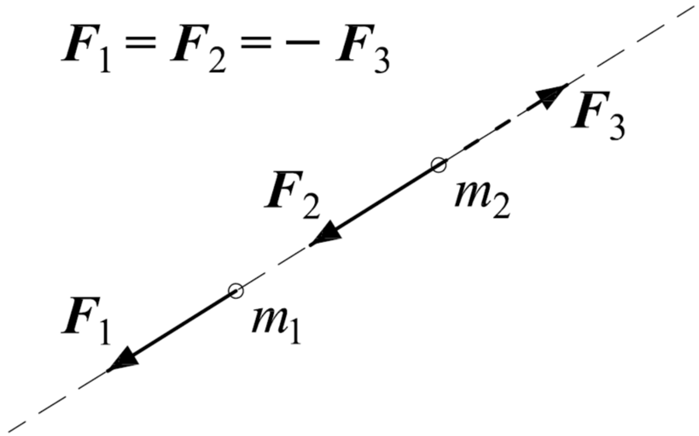
AXIOMY STATIKY

Axiom 2

dvě síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou v rovnováze jen tehdy, když jsou stejně velké, opačného smyslu a působí v jednom paprsku



$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = -\,\boldsymbol{F}_3$$



Axiom 3

k tělesu lze přidat (či z něj odebrat) rovnovážnou soustavu sil, aniž by se tím změnil jeho pohybový stav

Pozn. z 2 a 3 plyne poučka o působišti síly – působiště síly lze libovolně posouvat podél jejího paprsku, aniž by se změnil pohybový stav tělesa

PRINCIP SUPERPOZICE ÚČINKŮ

rozdělíme-li obecnou soustavu sil působící na tuhé těleso do dílčích soustav a od každé stanovíme samostatné účinky, pak výsledný účinek je vektorovým součtem účinků jednotlivých soustav

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 + \cdots + \boldsymbol{R}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i$$

PRINCIP ÚMĚRNOSTI

působí-li na těleso soustava sil $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ a momentů $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \ldots, \boldsymbol{M}_m$ s výsledným účinkem $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{M}_o$,
pak soustava sil $k\boldsymbol{F}_1, k\boldsymbol{F}_2, \ldots, k\boldsymbol{F}_n$ a momentů $k\boldsymbol{M}_1, k\boldsymbol{M}_2, \ldots, k\boldsymbol{M}_m$ vyvolá účinek $k\boldsymbol{R}$ a $k\boldsymbol{M}_o$

SILOVÉ SOUSTAVY

podle **polohy jednotlivých sil**

- přímkové
- rovinné
- prostorové

podle **působišť sil**

- svazek sil – společné působiště
- soustava rovnoběžných sil
- obecná soustava sil

SILOVÉ SOUSTAVY

výslednice soustavy sil – rezultanta $\boldsymbol{R}$

- soustavu sil $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$ nahrazujeme výsledným účinkem, tj. výslednicí $\boldsymbol{R}$ (síla nebo dvojice sil – moment, příp. silou a momentem), tzv. **skládání sil**

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

podmínky ekvivalence

- vztahy mezi silovou soustavou a její výslednicí
- výslednice $\boldsymbol{R}$ má stejný účinek jako původní soustava sil

základní úlohy s využitím podmínek ekvivalence

- nahrazení (rozklad) dané síly soustavou sil zadaných paprsky
- nahrazení dané soustavy sil jinou soustavou sil se zadanými paprsky

SILOVÉ A MOMENTOVÉ SOUSTAVY

aby silová a momentová soustava sil byla v rovnováze, musí splňovat **podmínky rovnováhy**

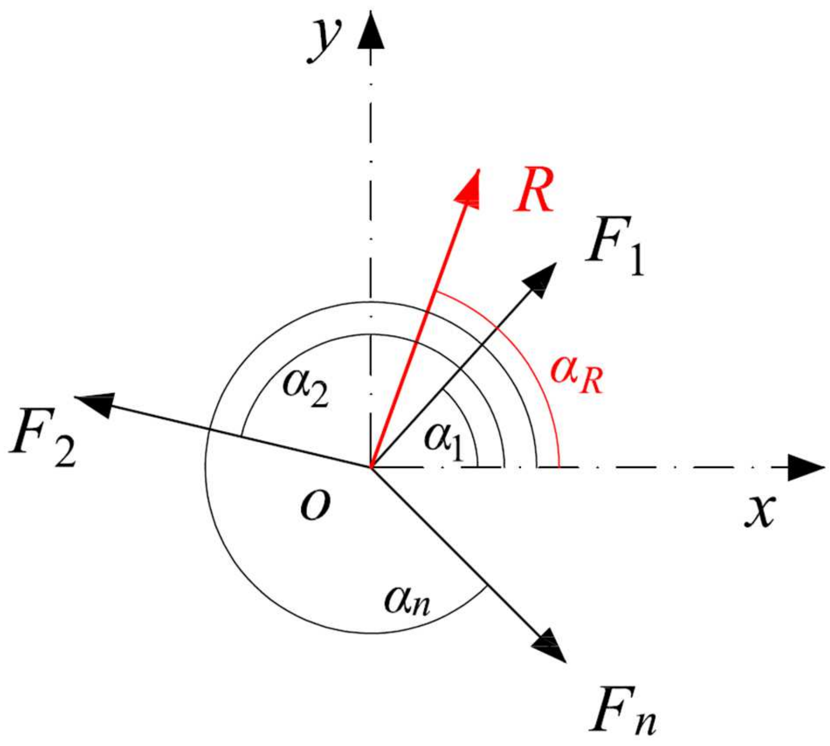
$\sum \boldsymbol{F} = 0$ **silové podmínky**	$\sum \boldsymbol{M} = 0$ **momentové podmínky**	**Celkem podmínek rovnováhy**
1 na přímce	0 na přímce	1 na přímce (1D)
2 v rovině	1 v rovině	3 v rovině (2D)
3 v prostoru	3 v prostoru	6 v prostoru (3D)

základní úlohy s využitím podmínek rovnováhy

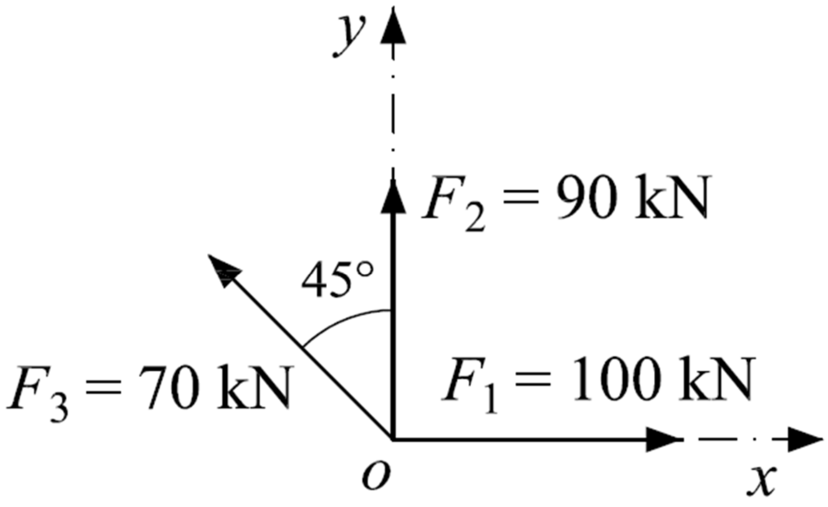
- zrušení dané soustavy sil rovnovážnou silou $\boldsymbol{F}_e = -\boldsymbol{R}$
- zrušení dané síly soustavou sil zadaných paprsky (a momentem)
- zrušení dané soustavy sil jinou soustavou sil se zadanými paprsky

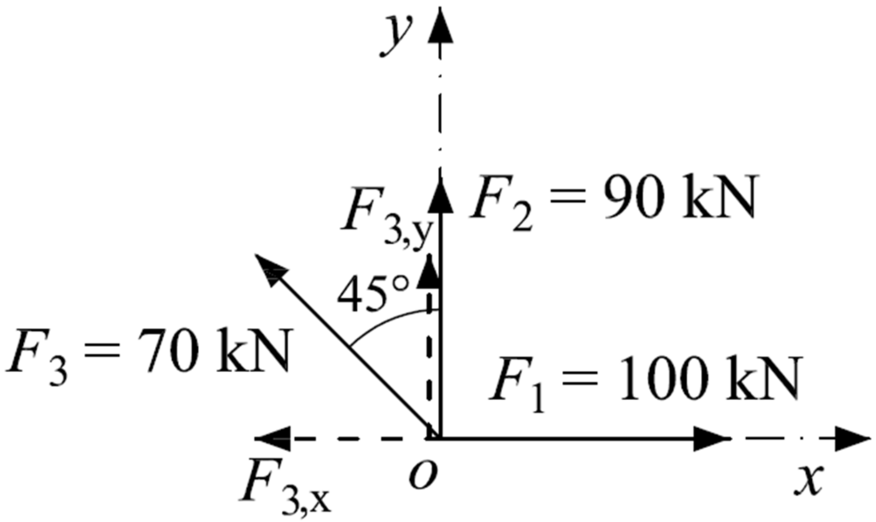
SVAZEK SIL V ROVINĚ

- rovinná soustava různosměrných sil $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \dots, \boldsymbol{F}_n$ se společným působištěm
- $F_{i,x} = F_i \cdot \cos \alpha_i$
- $F_{i,y} = F_i \cdot \sin \alpha_i$
- $R_x = \sum F_{i,x}$
- $R_y = \sum F_{i,y}$
- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$
- $\text{tg}\, \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$



Určete výslednici dané soustavy sil



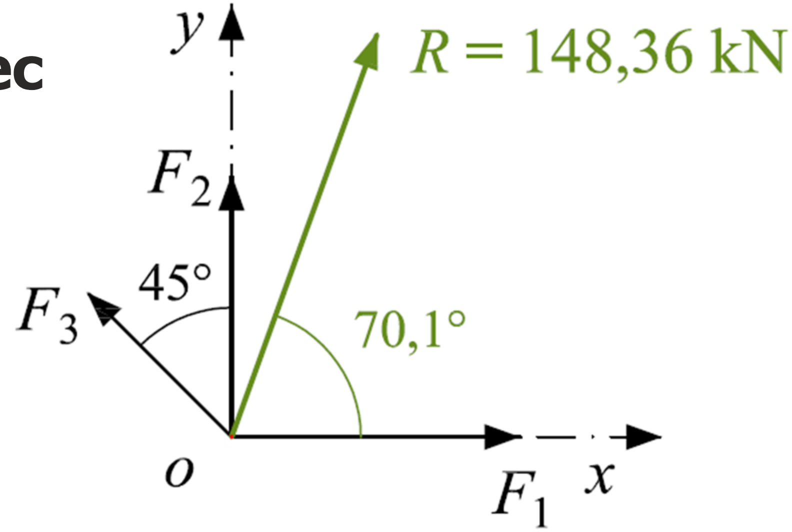


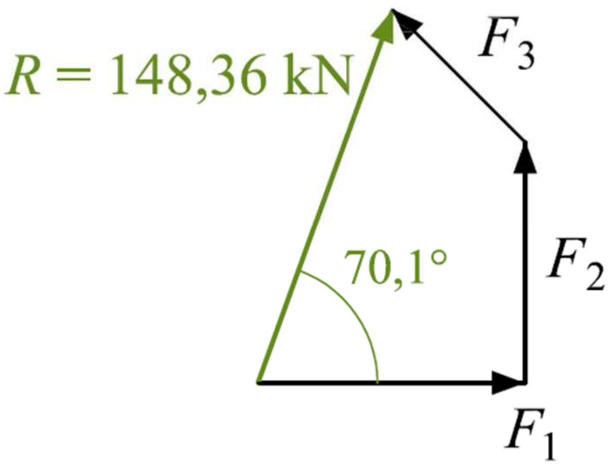
$$R_x = \sum F_{i,x} = 100 - 70 \cdot \sin 45 \;= 50{,}503 \text{ kN} \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 148{,}36 \text{ kN}$$

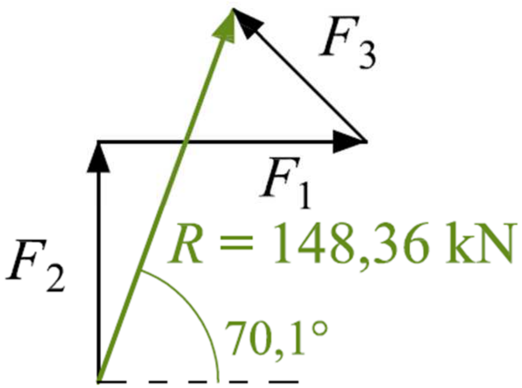
$$R_y = \sum F_{i,y} = 90 + 70 \cdot \cos 45 \;= 139{,}497 \text{ kN} \qquad \alpha_R = \mathrm{tg}^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 70{,}1°$$

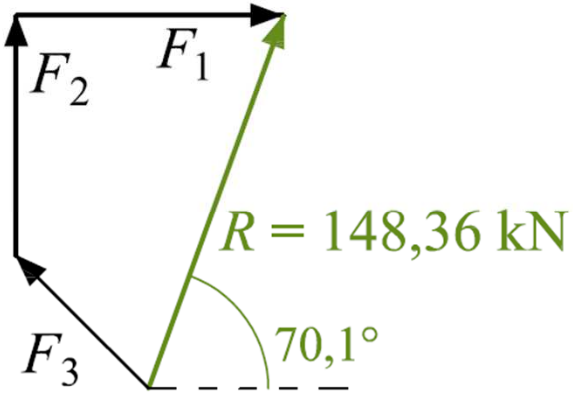
SVAZEK SIL V ROVINĚ

Grafické řešení – složkový obrazec



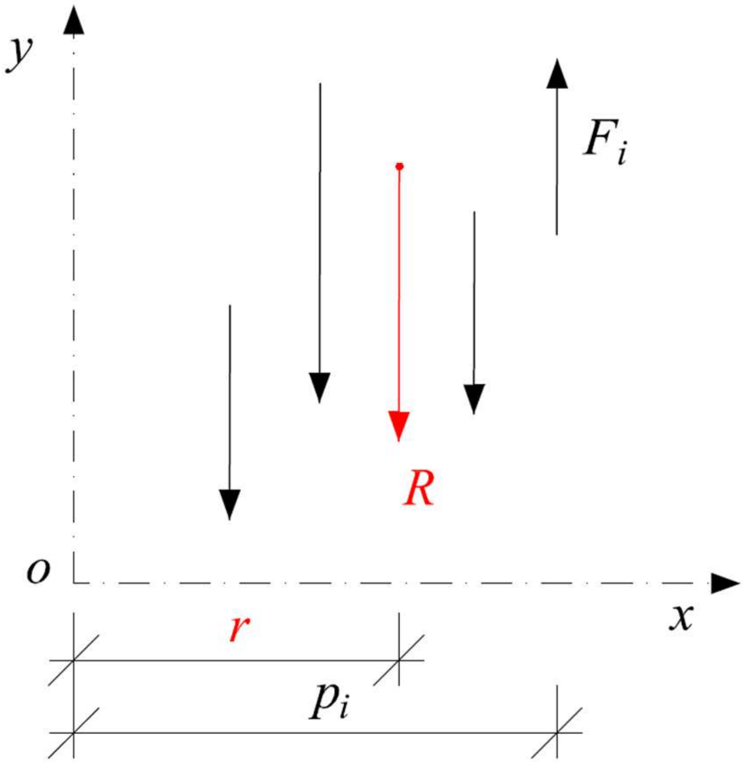






SOUSTAVA ROVNOBĚŽNÝCH SIL

- zvláštní případ obecné soustavy sil
- zvláštní případ soustavy působící na bod (v nekonečnu)
- výslednice $R = \sum F_i$
- poloha výslednice
  podle momentové ekvivalence
  (Varignonova věta)
- $M_o = R \cdot r = \sum F_i \cdot p_i$
- $r = \frac{\sum F_i \cdot p_i}{R}$

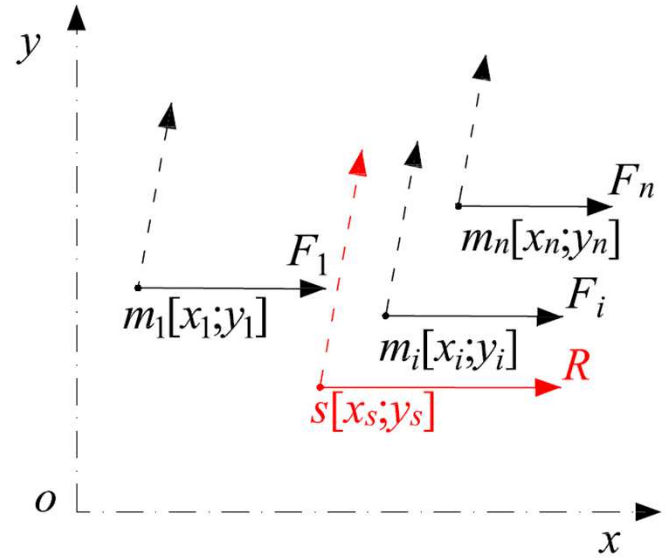


STATICKÝ STŘED SOUSTAVY ROVNOBĚŽNÝCH SIL

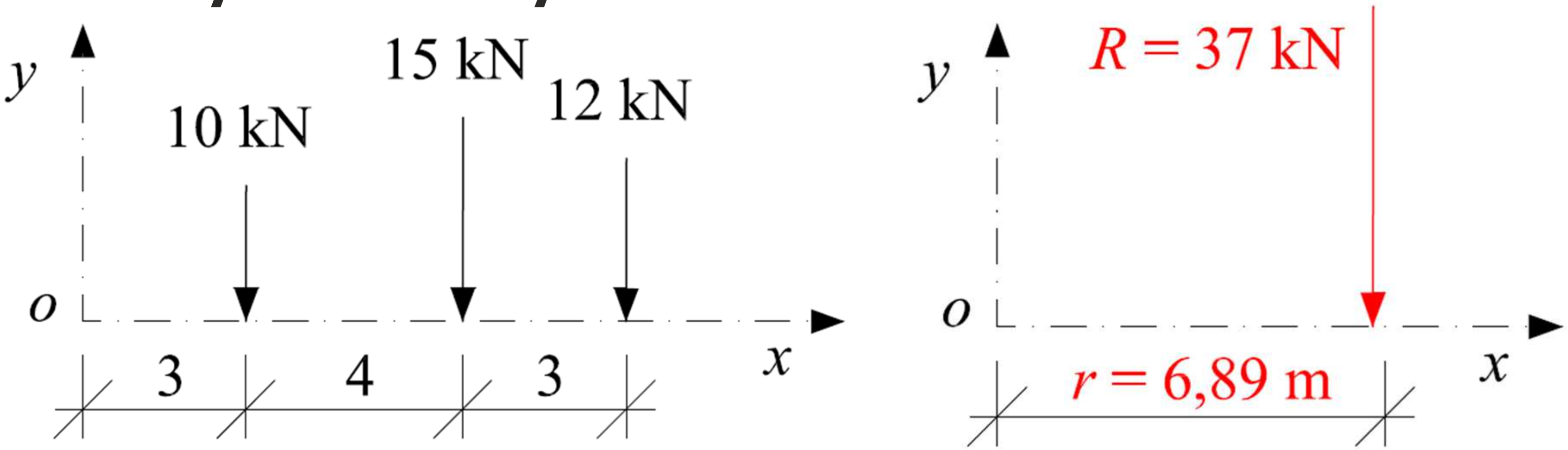
- soustava rovnoběžných sil vztažená k souřadnicovým osám
- budou-li se současně pootáčet všechny síly kolem svých působišť tak, že budou stále rovnoběžné, bude se výslednice pootáčet kolem bodu s, který nazýváme statický střed

$$x_s = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}$$

$$y_s = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i}$$



Určete velikost a polohu výslednice dané soustavy rovnoběžných sil

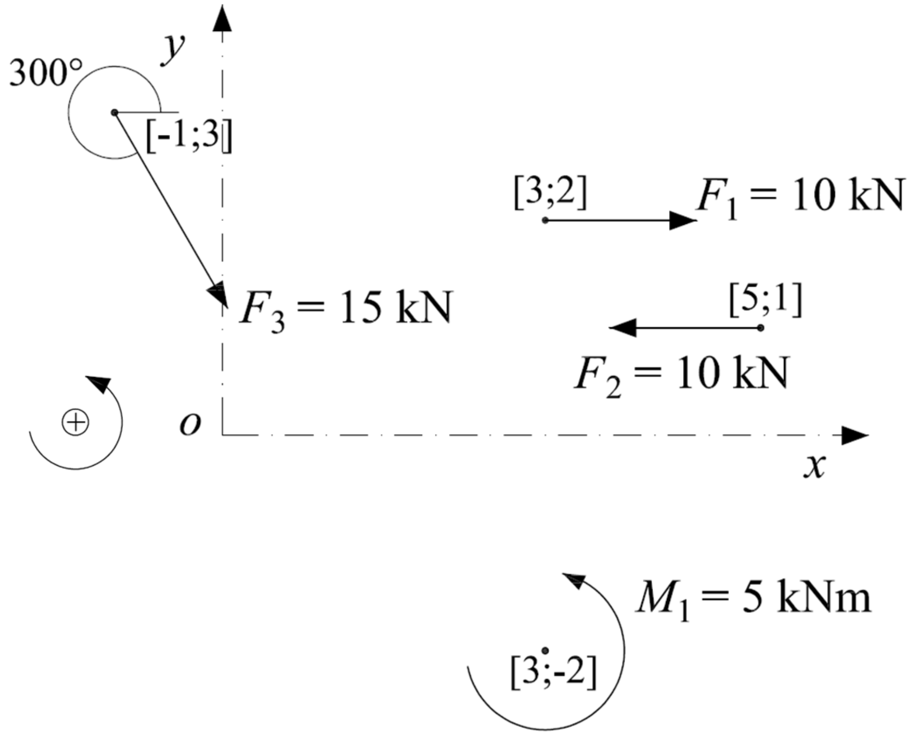


$$R = \sum F_i = -10 - 15 - 12 = -37 \text{ kN}$$

$$M_o = R \cdot r = \sum F_i \cdot p_i = -10 \cdot 3 - 15 \cdot 7 - 12 \cdot 10 = -255 \text{ kNm}$$

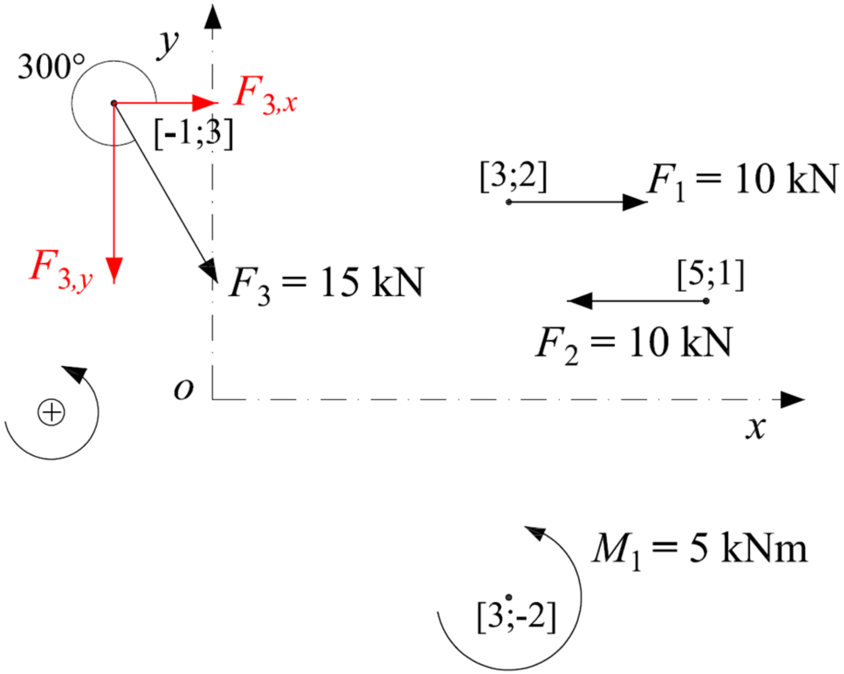
$$r = \frac{\sum F_i \cdot p_i}{R} = \frac{-255}{-37} = 6{,}892 \text{ m}$$

Nahraďte zadanou silovou a momentovou soustavu výslednicí R a momentem M_o, působících v počátku souřadnicového systému



	F_i [kN]	α_i [°]	x_i [m]	y_i [m]	M [kNm]
F_1	10	0	3	2	–
F_2	10	180	5	1	–
F_3	15	300	-1	3	–
M_1	–	–	3	-2	5

SILOVÉ A MOMENTOVÉ SOUSTAVY



$$F_{i,x} = F_i \cdot \cos\alpha_i$$

$$F_{i,y} = F_i \cdot \sin\alpha_i$$

$$M_{o,i} = -F_{i,x} \cdot y_i + F_{i,y} \cdot x_i$$

$$R_x = \sum F_{i,x} = 7{,}5 \text{ kN}$$

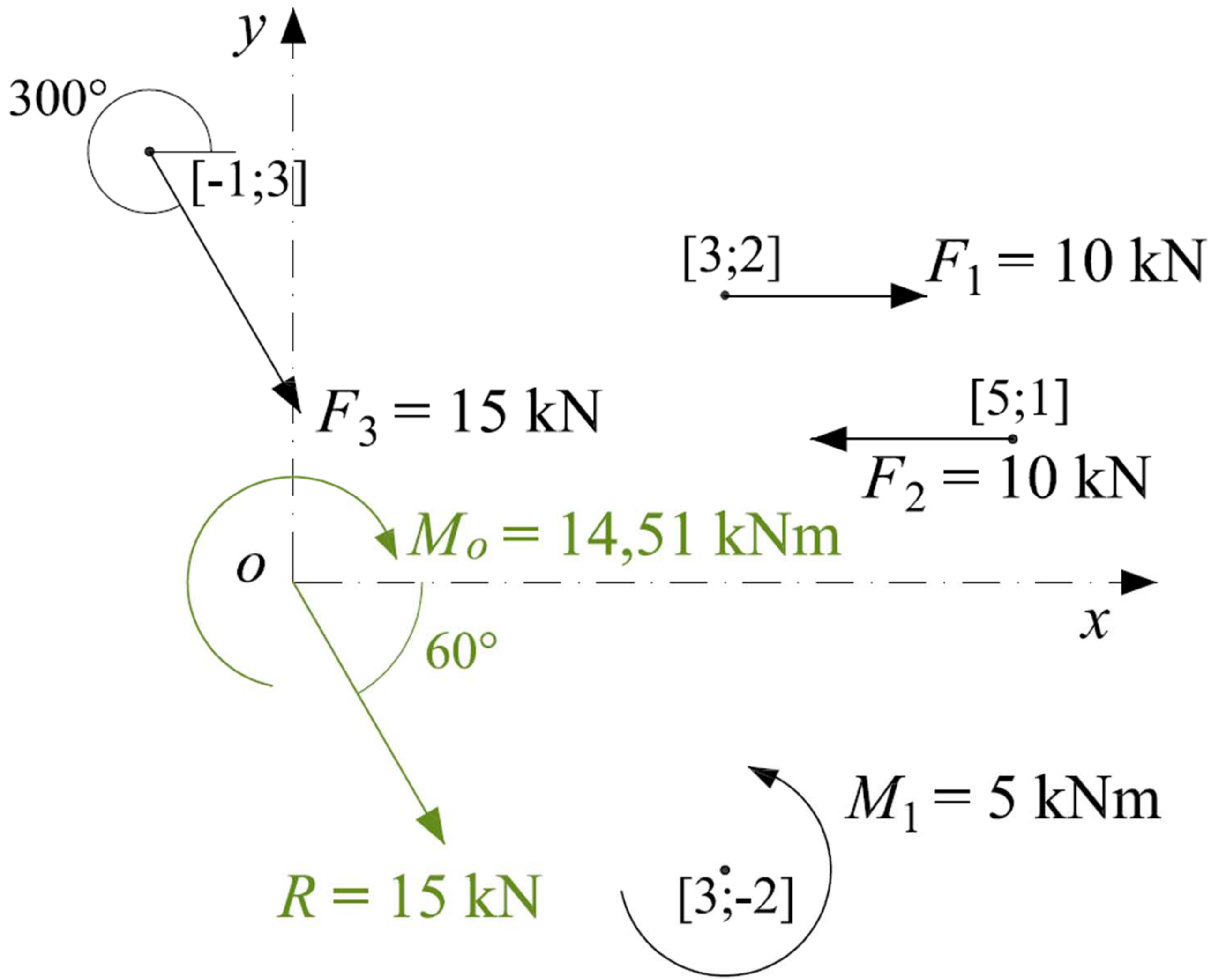
$$R_y = \sum F_{i,y} = -12{,}99 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 15 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = \mathrm{tg}^{-1}\frac{R_y}{R_x} = -60°$$

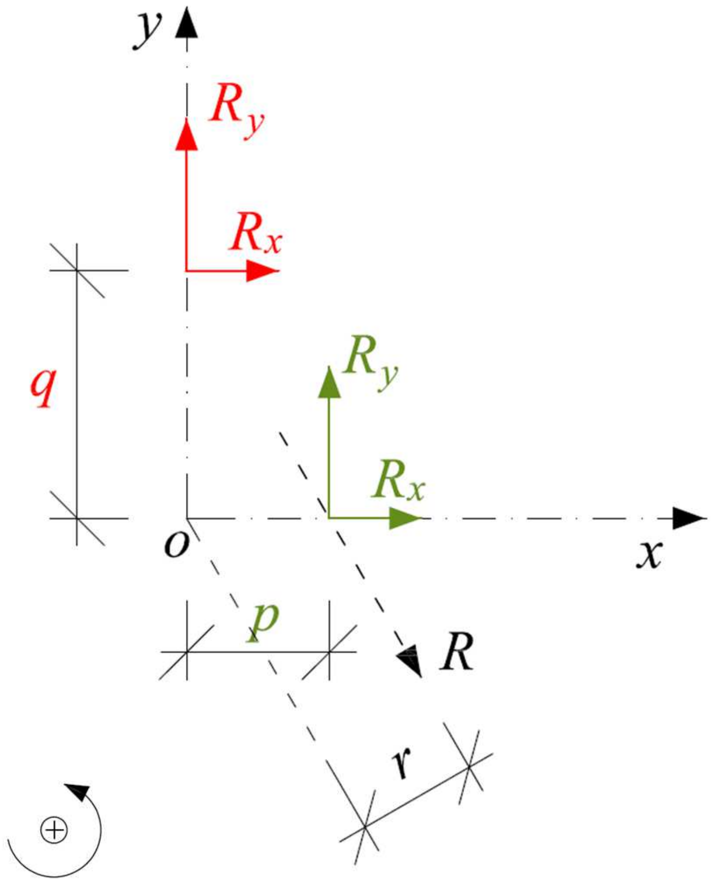
$$M_o = -14{,}51 \text{ kNm}$$

	F_i [kN]	α_i [°]	x_i [m]	y_i [m]	$F_{i,x}$ [kN]	$F_{i,y}$ [kN]	$M_{o,i}$ [kNm]
F_1	10	0	3	2	10	0	-20
F_2	10	180	5	1	-10	0	10
F_3	15	300	-1	3	7,5	-12,99	-9,51
M_1	–	–	3	-2	–	–	5



y
300°
[-1;3]
[3;2]
$F_1 = 10$ kN
$F_3 = 15$ kN
[5;1]
$F_2 = 10$ kN
$M_o = 14{,}51$ kNm
o
x
60°
$M_1 = 5$ kNm
$R = 15$ kN
[3;-2]

Náhrada momentu posunem výslednice



$$M_o = R \cdot r$$

$$\rightarrow r = \frac{M_o}{R} = \frac{-14{,}51}{15} = -0{,}967 \text{ m}$$

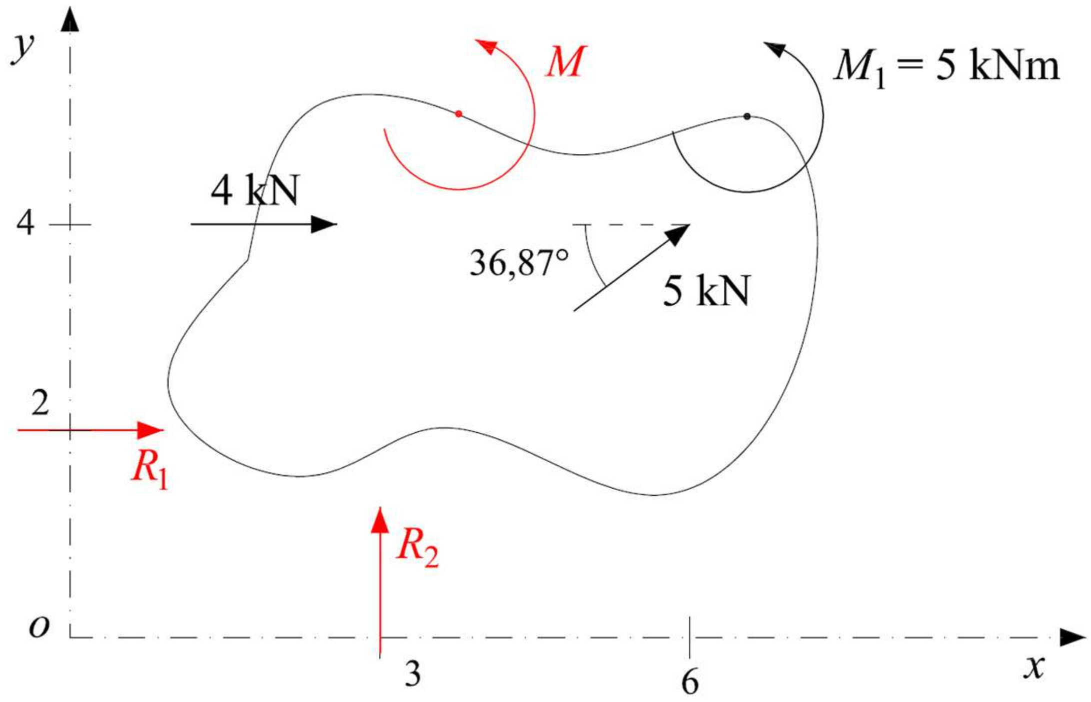
$$M_o = R_y \cdot p$$

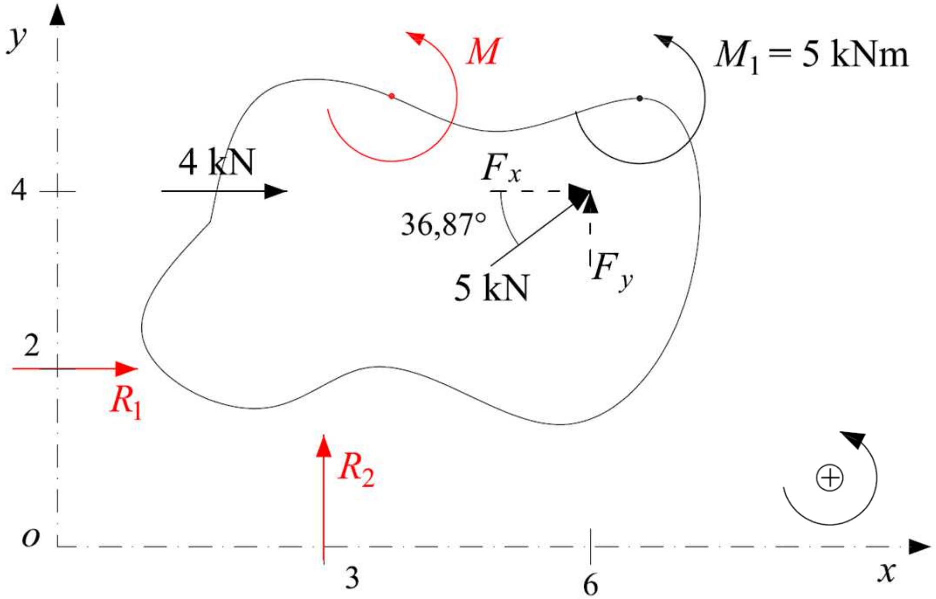
$$\rightarrow p = \frac{M_o}{R_y} = \frac{-14{,}51}{-12{,}99} = 1{,}117 \text{ m}$$

$$M_o = -R_x \cdot q$$

$$\rightarrow q = -\frac{M_o}{R_x} = -\frac{-14{,}51}{7{,}5} = 1{,}935 \text{ m}$$

Uveďte danou silovou a momentovou soustavu silami R_1 a R_2 a momentem M do rovnováhy





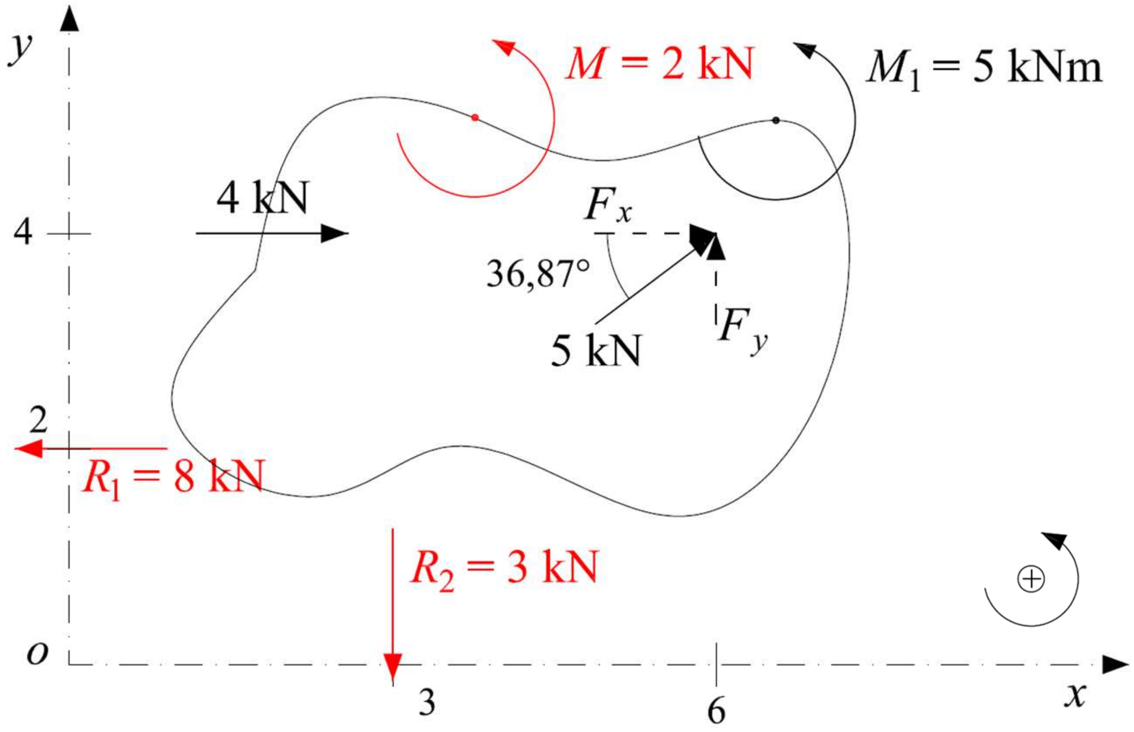
$$\sum F_x = 0: \quad 4 + R_1 + 5 \cdot \cos 36{,}87 = 0; \quad R_1 = -8 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: \quad R_2 + 5 \cdot \sin 36{,}87 = 0; \quad R_2 = -3 \text{ kN}$$

$$\sum M_o = 0: \quad -4 \cdot 4 - 5 \cdot \cos 36{,}87 \cdot 4 + 5 \cdot \sin 36{,}87 \cdot 6 + 5 + M - R_1 \cdot 2 + R_2 \cdot 3 = 0$$

$$M = 2 \text{ kNm}$$

kontrola



$$\sum M_{[6;4]} = 0: \quad M + 5 - R_1 \cdot 2 + R_2 \cdot 3 = 0$$ PLATÍ