

Cvičení z MKP

Jan Eliáš

verze 2, únor 2018

Obsah

1	Teoretický úvod do energetických principů	2
2	Energetické principy I	14
3	Energetické principy II	19
4	Energetické principy III - nelineární materiál	26
5	Energetické principy IV - rovinná konstrukce	30
6	MKP v jedné dimenzi	35
7	Stěnová konstrukce I	40
8	Stěnová konstrukce II	43
9	Numerická integrace	48
10	Izoparametrické prvky I	55
11	Izoparametrické prvky II	61

1 Teoretický úvod do energetických principů

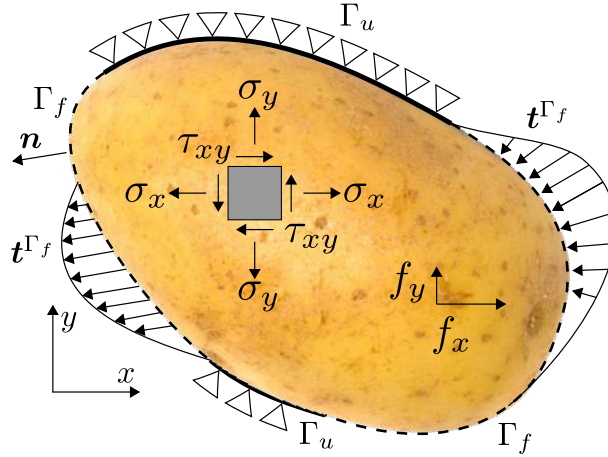
Silná formulace

Tento text pojednává o řešení *okrajové úlohy* pomocí *metody konečných prvků* v jedné či dvou dimenzích. Tří-dimenzionální úloze se záměrně vyhýbáme, neboť je zcela analogická s jedno a dvou-dimenzionálními, avšak komplikovanější v zápisu a počtu neznámých. V lineární statice (pro klasické Boltzmannovo kontinuum) má okrajová úloha následující proměnné: vektor posunu \mathbf{u} , tenzor deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$, tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$, vektor zatížení uvnitř tělesa \mathbf{f} a vektor zatížení na povrchu, zde nazývaný povrchová síla, \mathbf{t} , anglicky *traction*. Tyto proměnné, v inženýrské notaci reprezentované vektory, mají následující složky

1D	2D	jednotky	
$\mathbf{u} = u$	$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$	m	(1a)
$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$	[-]	(1b)
$\boldsymbol{\sigma} = \sigma$	$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$	Pa	(1c)
$\mathbf{f} = f$	$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$	N/m ³	(1d)
$\mathbf{t} = t$	$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$	Pa	(1e)

Některé z proměnných jsou zobrazeny na obrázku 1, okraj tělesa je označen Γ . Vztah mezi proměnnými je popsán pomocí tří základních rovnic, zde jsou uvedeny pro jedno-dimenzionální těleso – osově namáhaný prut – s průřezovou plochou $A(x)$ (závislou na souřadnici x) a dvou-dimenzionální těleso – stěnu – s (proměnou) tloušťkou $t(x, y)$.

1D	2D	
$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$	(2a)
$\sigma = E\varepsilon$	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$	(2b)
$\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af = 0$	$\begin{Bmatrix} \frac{\partial t\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial t\tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial t\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial t\tau_{xy}}{\partial x} \end{Bmatrix} + t\mathbf{f} = \mathbf{0}$	(2c)



Obrázek 1: Dvourozměrné těleso, jeho okraj Γ a některé z proměnných okrajové úlohy lineární statiky.

Vztah mezi deformacemi a posuny (rovnice (2a)) se nazývá *geometrická* rovnice. Ve dvou dimenzích se jedná o trojici rovnic. Vztah mezi napětími a deformacemi (rovnice (2b)) se nazývá *fyzikální* rovnice, ve dvou dimenzích se opět jedná o tři provázané rovnice. Poslední z rovnic (2c) se často nazývá rovnice *rovnováhy*, ve dvou dimenzích se jedná o dvě rovnice. Pomocí operátorové matice lze rovnice *rovnováhy* pro dvě dimenze přepsat

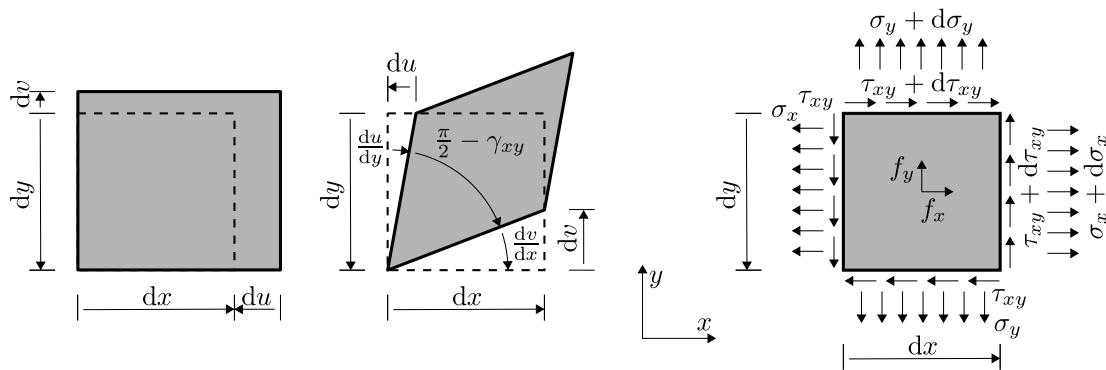
$$\boldsymbol{\partial}^T (t\boldsymbol{\sigma}) + t\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Matice \mathbf{C} sdružuje materiálové parametry. Pro izotropní elastický materiál definovaný pomocí modulu pružnosti E a Poissonova součinitele ν vypadá následovně

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{pro rovinnou napjatost} \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{pro rovinnou deformaci} \quad (5)$$

Geometrické rovnice i rovnice rovnováhy lze velmi snadno získat z jednoduchých obrázků, pro dvě dimenze je to provedeno na obrázku 2. Pro geometrické rovnice stačí zapsat poměrné protažení a celkové zkosení elementu, pro rovnice rovnováhy pak podmínky rovnováhy sil ve směru x a y (momentová podmínka rovnováhy poskytuje symetrii $\tau_{xy} = \tau_{yx}$). V limitním přechodu $dx \rightarrow 0$ a $dy \rightarrow 0$ získáme právě rovnice (2a) a (2c). Podobné rovnice je možné odvodit např. pro ohýbaný prut (příklad 3.2) či desku.



Obrázek 2: K odvození základních rovnic ve dvou dimenzích: vlevo geometrické rovnice, vpravo rovnice rovnováhy. K odvození zkosení je potřeba uvažovat malé úhly, kde $\tan(\gamma_{xy}) \approx \gamma_{xy}$

Známe-li zatížení, modul pružnosti a Poissonův součinitel, máme ve dvou dimenzích celkem 8 neznámých proměnných pro každý materiálový bod a také celkem 8 rovnic, v jedné dimenzi jsou to pak 3 neznámé a 3 základní rovnice. K řešení potřebujeme znát ještě *okrajové podmínky*. Ty jsou definovány na okraji (povrchu) tělesa, Γ , (v 1D tedy pouze ve dvou bodech, ve 2D na uzavřené rovinné křivce) a rozlišujeme zde okrajové podmínky dvojího druhu:

- statické - jsou známy složky vektoru povrchové síly tělesa (vnější zatížení), \mathbf{t}^{Γ_t} , jejichž vztah k tenzorovému napětí uvnitř materiálu u okraje je následující

$$(1D) \quad n\sigma = \mathbf{t}^{\Gamma_t} \quad (2D) \quad \mathcal{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^{\Gamma_t} \quad \text{kde } \mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad \text{na } \Gamma_t \quad (6)$$

kde $\mathbf{n} = \{ n_x \quad n_y \}$, případně $n = \pm 1$ v 1D, je normála směřující ven z tělesa,

- kinematické - jsou známy složky vektoru posunu na povrchu tělesa, \mathbf{u}^{Γ_u}

$$(1D) \quad u = u^{\Gamma_u} \quad (2D) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{\Gamma_u} \quad \text{na } \Gamma_u \quad (7)$$

Ve více než jedné dimenzi je samozřejmě možné definovat v jednom bodě v některém směru kinematickou a v jiném statickou podmínku, tedy zde bychom správně měli rozlišovat okraje Γ_{fx} , Γ_{fy} , Γ_{ux} , Γ_{uy} . Γ_{fx} sjednoceno s Γ_{ux} musí tvořit celý okraj Γ ($\Gamma_{fx} \cup \Gamma_{ux} = \Gamma$) a zároveň tyto dva okraje nemají žádný průnik ($\Gamma_{fx} \cap \Gamma_{ux} = \emptyset$), totéž pak platí pro druhý směr ($\Gamma_{fy} \cup \Gamma_{uy} = \Gamma$ a současně $\Gamma_{fy} \cap \Gamma_{uy} = \emptyset$). Pro jednoduchost zde však zapisujeme pouze symboly Γ_t a Γ_u .

Podmínky kompatibility

Ve dvou dimenzích máme tři složky deformace, které závisí pouze na dvou složkách posunu. Zřejmě tedy nemohou být deformační složky nezávislé. Jejich vzájemná závislost

je popsána pomocí podmínek kompatibility. Uvažujme následující derivace

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Díky nezávislosti derivací na pořadí (Schwarzova věta) musí tedy platit rovnost

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

Právě popsaná formulace okrajové úlohy se nazývá *silná formulace*.

Slabá formulace

Jednorozměrný případ

Začněme nejprve jednorozměrnou variantou. Uvažujme zcela libovolné, tzv. virtuální posuny \bar{u} , které jsou však nulové na okraji, kde je definovaná kinematická okrajová podmínka, tedy na Γ_u . Rovnice rovnováhy je možné těmito virtuálními posuny vynásobit.

$$\bar{u} \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) = 0 \quad (9)$$

a integrovat po délce tělesa l

$$\int_l \bar{u} \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dl = \int_l \bar{u} \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dx = 0 \quad (10)$$

Tato rovnice je zcela ekvivalentní silné formulaci z rovnice (2c), neboť díky libovolnosti funkce \bar{u} musí být výraz v závorce nulový v každém bodě tělesa.

Nyní využijeme složenou derivaci (řetízkové pravidlo)

$$\frac{\partial \bar{u} A\sigma}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} A\sigma + \bar{u} \frac{\partial A\sigma}{\partial x} \quad (11)$$

kterou dosadíme do rovnice (10) a rozdělíme integrál na tři části

$$\int_l \left[\frac{\partial \bar{u} A\sigma}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} A\sigma + \bar{u} Af \right] dx = \int_l \frac{\partial A\bar{u}\sigma}{\partial x} dx - \int_l \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} A\sigma dx + \int_l A\bar{u}f dx = 0$$

Podle základní věty integrálního počtu lze první z integrálů zapsat pomocí okrajových hodnot

$$\int_l \frac{\partial \bar{u} A\sigma}{\partial x} dx = [A\bar{u}\sigma]_0^l = (A\bar{u}\sigma)_{x=l} - (A\bar{u}\sigma)_{x=0} \quad (12)$$

V druhém integrálu vystupuje derivace virtuálních posunů, což je podle geometrické rovnice (2a) virtuální deformace $\bar{\varepsilon}$. Po úpravách získáváme

$$\int_l A\bar{\varepsilon}\sigma dx = \int_l A\bar{u}f dx + (A\bar{u}\sigma)_{x=l} - (A\bar{u}\sigma)_{x=0}$$

Body $x = 0$ a $x = l$ tvoří okraj tělesa, v každém z bodů musí tedy být definovaná buďto kinematická nebo statická okrajová podmínka. Protože jsme uvažovali pouze virtuální funkce nulové na Γ_u , bude tam součin $\bar{u}A\sigma$ nulový. V bodech, kde je definovaná statická okrajová podmínka, pak použijeme rovnici (6). Pro $x = 0$ je normála $n = -1$ a pro $x = l$ pak $n = +1$. Pro oba případy by tedy oba koncové členy byly $+(A\bar{u}t^{\Gamma_t})_{x \in \Gamma_t}$.

Po dosazení získáme slabou formulaci problému pro neznámé posuny u

$$\int_l A\bar{\varepsilon}\sigma dx = \int_l A\bar{u}f dx + (A\bar{u}t^{\Gamma_t})_{x \in \Gamma_t} \quad \text{pro libovolné } \bar{u} \text{ splňující } \bar{u} = 0 \text{ na } \Gamma_u$$

(13)

Ve slabé formulaci jsou přímo zahrnuty statické okrajové podmínky (rovnice (6)) a také základní rovnice (2a) a (2c). Fyzikální rovnici (2b) je možné explicitně vložit záměnou napětí za funkci deformace ($\sigma = E\varepsilon$). Dále s využitím geometrické rovnice záměnou deformace za funkci hledaných posunů ($\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x}$). Není zajištěno pouze splnění kinematických okrajových podmínek. Toho docílíme snadno tak, že hledanou funkci posunu budeme volit pouze takovou, která kinematické okrajové podmínky splňuje.

Obráceným postupem lze odvodit silnou formulaci ze slabé. Slabá a silná formulace jsou tedy zcela ekvivalentní.

Dvourozměrný případ

Obdobně můžeme postupovat ve více dimenzích. Pro dvě dimenze uvažujme zcela libovolné virtuální posuny $\bar{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{matrix} \bar{u} & \bar{v} \end{matrix} \right\}^T$, které jsou opět nulové na okraji, kde je definovaná kinematická okrajová podmínka, tedy na Γ_u . Rovnice rovnováhy těmito virtuálními posuny vynásobíme zleva a integrujeme přes plochu dvourozměrného tělesa S

$$\int_S \bar{\mathbf{u}}^T (\boldsymbol{\partial}^T (t\boldsymbol{\sigma}) + t\mathbf{f}) dS = 0 \quad (14)$$

Libovolnost funkce $\bar{\mathbf{u}}$ opět zajišťuje ekvivalenci s podmínkou rovnováhy.

Zapsat následující operace v inženýrské notaci je poměrně těžkopádné, pečlivému čtenáři doporučuji veškeré maticové součiny rozepsat, aby plně pochopil smysl prováděných operací. Začneme nejprve následující derivací složeného vektoru, tzv. divergence

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\begin{bmatrix} t\sigma_x & t\tau_{xy} \\ t\tau_{xy} & t\sigma_y \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \right) &= \operatorname{div} \left(\begin{bmatrix} \bar{u}t\sigma_x + \bar{v}t\tau_{xy} \\ \bar{u}t\tau_{xy} + \bar{v}t\sigma_y \end{bmatrix} \right) = \frac{\partial (\bar{u}t\sigma_x + \bar{v}t\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}t\sigma_y + \bar{u}t\tau_{xy})}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} t\sigma_x + \bar{u} \frac{\partial t\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} t\tau_{xy} + \bar{v} \frac{\partial t\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} t\sigma_y + \bar{v} \frac{\partial t\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} t\tau_{xy} + \bar{u} \frac{\partial t\tau_{xy}}{\partial y} \\ &= t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\partial}^T (t\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

Využili jsme zde opět geometrických rovnic, které umožňují zaměnit derivace virtuálních posunů za virtuální deformace. Výsledek dosadíme do rovnice (14) a opět rozdělíme integrál na tři části

$$\int_S \operatorname{div} \left(\begin{bmatrix} t\sigma_x & t\tau_{xy} \\ t\tau_{xy} & t\sigma_y \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \right) dS - \int_S t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dS + \int_S t\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dS = 0 \quad (15)$$

Nyní použijeme větu o divergenci (Gaussovu), která je ve dvou dimenzích známa jako Greenova věta (a v jedné dimenzi jako základní věty integrálního počtu).

$$\int_S \operatorname{div} \left(\begin{bmatrix} t\sigma_x & t\tau_{xy} \\ t\tau_{xy} & t\sigma_y \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \right) dS = \int_{\Gamma} \left(\begin{bmatrix} t\sigma_x & t\tau_{xy} \\ t\tau_{xy} & t\sigma_y \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \right)^T \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma} t\bar{\mathbf{u}}^T \mathcal{N}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma$$

kde třetí výraz získáme pouhou reorganizací složek druhého výrazu.

Dále si stačí uvědomit, že $\bar{\mathbf{u}}$ je nulové na Γ_u a s využitím statické okrajové podmínky (rovnice 6) získáme

$$\int_{\Gamma} t\bar{\mathbf{u}}^T \mathcal{N}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = \int_{\Gamma_t} t\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} d\Gamma_f$$

Dosazením do (15) získáme slabou formulaci pro dvourozměrnou úlohu.

$$\int_S t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dS = \int_S t\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} dS + \int_{\Gamma_t} t\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} d\Gamma_f \quad \text{pro libovolné } \bar{\mathbf{u}} \text{ splňující } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u$$

(16)

Opět máme zahrnuty všechny základní rovnice (pokud si pod symbolem $\boldsymbol{\sigma}$ představíme fyzikální rovnice) a také statické okrajové podmínky. Kinematické okrajové podmínky zajistíme hledáním řešení \mathbf{u} pouze v množině funkcí, splňujících tyto kinematické podmínky. Obrácený postup opět vede k silné formulaci a obě formulace jsou tedy ekvivalentní.

Energetické principy

Potenciální energie vnitřních sil je záporná práce, kterou koná napětí v tělese na odpovídajících deformacích (napětí koná zápornou práci, protože deformacím vzdoruje). Hustota deformační energie W vyjadřuje nashromážděnou energii vnitřních sil v každém bodě tělesa. Lze tedy psát (viz. Obr. 3)

$$(1D) \quad \Pi_i = \int_V W dV = \int_l AW dx = \int_l A \left[\int_0^{\varepsilon} \sigma(e) de \right] dx \quad (17a)$$

$$(2D) \quad \Pi_i = \int_V W dV = \int_S tW dS = \int_S t \left[\int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x(e) de + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y(e) de + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}(e) de \right] dS \quad (17b)$$

Tloušťka tělesa je zde označena t , průřezová plocha jednorozměrného tělesa A a plocha dvourozměrného tělesa S . Veličina e je pouze pomocná proměnná při integraci, mající význam postupně narůstající deformace, na které závisí napětí.

Za předpokladu lineární závislosti mezi napětím a deformací lze uvedené integrály vypočítat

$$(1D) \quad \int_0^\varepsilon \sigma(e) de = \int_0^\varepsilon Ee de = \left[\frac{1}{2} Ee^2 \right]_0^\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma$$

$$(2D) \quad \left[\int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x(e) de + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y(e) de + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}(e) de \right] = \sum \int_0^\varepsilon \mathbf{C}e de = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$$

a rovnice (17) tak zapíšeme

$$(1D) \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \int_l A \varepsilon \sigma dx \quad (2D) \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \int_S t [\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}] dS = \frac{1}{2} \int_S t \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dS \quad (18)$$

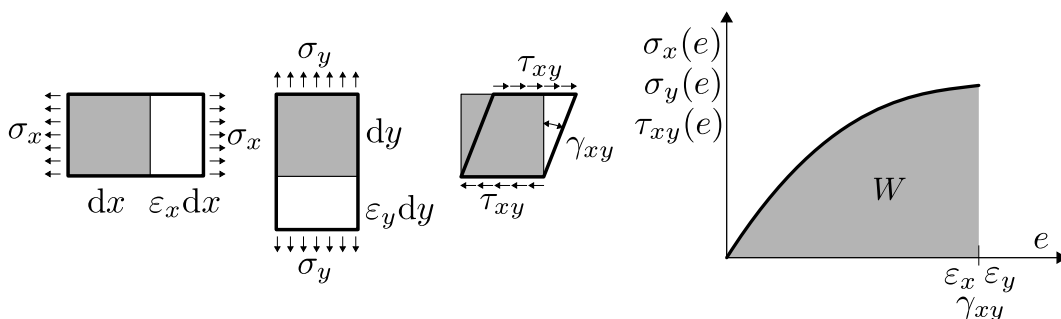
S deformací tělesa koná práci také zatížení na posunech \mathbf{u} . Potenciální energie zatížení klesá, a je to tedy záporně vzatá práce zatížení. Síly uvnitř tělesa (\mathbf{f}) a na jeho povrchu (\mathbf{t}) mají po deformaci potenciální energii

$$(1D) \quad \Pi_e = - \int_l A u f dx - (A u t)_{x \in \Gamma} \quad (2D) \quad \Pi_e = - \int_S t \mathbf{u}^T \mathbf{f} dS - \int_\Gamma t \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (19)$$

Všimněme si, že práci konají nejen napětí na okraji tělesa \mathbf{t}^{Γ_t} předepsané statickou okrajovou podmínkou, ale také napětí na okraji Γ_u na posunech předepsaných kinematickou okrajovou podmínkou.

Tento velmi formální zápis lze osvětlit na příkladu prutu zatíženého silou F , momentem M a spojitým zatížením q . Každá z těchto složek koná práci na odpovídajícím posunu (u) či rotaci (φ)

$$\Pi_e = -F u - M \varphi - \int_a^b q(x) u(x) dx \quad (20)$$



Obrázek 3: Potenciální energie vnitřních sil

Moment a pootočení v klasické teorii pružnosti kontinua nevystupuje, příklad tedy zároveň ukazuje, jak lze potenciální energii vnějších sil vypočítat v teorii prutových konstrukcí.

Nyní jsme již připraveni formulovat základní energetický princip, který říká, že potenciální energie systému, která se skládá z potenciální energie vnitřních i vnějších sil, je vždy minimální.

$$\boxed{\Pi = \Pi_i + \Pi_e \text{ je minimální}} \quad (21)$$

Matematicky je minimum (ale i maximum) vyjádřeno podmínkou, že derivace je nulová. Nemáme ovšem zatím žádné proměnné, podle kterých lze derivovat. Podmínku minima tedy sestavíme tak, že jakákoliv malá změna posunu nesmí vyvolat žádnou změnu potenciální energie. Této změně říkáme variace, z toho pak *variacioní* princip. Také se nejedná o změnu skutečnou, která by se doopravdy realizovala, ale je pouze *virtuální*. Uvažujme tedy skutečný deformovaný stav s posuny \mathbf{u} a dále velmi malou, virtuální změnu posunů, $\delta\mathbf{u}$. Tato změna může být zcela libovolná, ale musí respektovat kinematické okrajové podmínky, tedy $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\Gamma_u}$ na Γ_u . Z toho tedy vyplývá, že $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ na Γ_u . Podívejme se nyní, jak se změní celková potenciální energie tělesa. Protože změna posunu je velmi malá, budeme uvažovat, že napjatost v tělese se nijak nezmění. Začneme variací potenciální energií vnitřních sil podle rovnice (17)

$$(1D) \quad \delta\Pi_i = \int_V \delta W \, dV = \int_l A \left[\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta\varepsilon} e\sigma \, de \right] dx = \int_l A\delta\varepsilon \sigma \, dx \quad (22a)$$

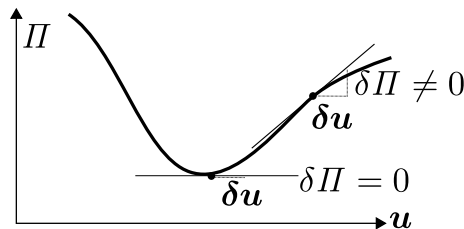
$$(2D) \quad \delta\Pi_i = \int_V \delta W \, dV = \int_S t \left[\int_{\varepsilon_x}^{\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x} e\sigma_x \, de + \int_{\varepsilon_y}^{\varepsilon_y+\delta\varepsilon_y} e\sigma_y \, de + \int_{\gamma_{xy}}^{\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy}} e\tau_{xy} \, de \right] dS$$

$$= \int_S t [\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\varepsilon_y \sigma_y + \delta\gamma_{xy} \tau_{xy}] \, dS = \int_S t\delta\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} \, dS \quad (22b)$$

Stejně tak je možné zapsat změnu (variaci) potenciální energie vnějších sil

$$(1D) \quad \delta\Pi_e = - \int_l A\delta u \, f \, dx - (A\delta u \, t^{\Gamma_t})_{x \in \Gamma_t} \quad (23a)$$

$$(2D) \quad \delta\Pi_e = - \int_S t\delta\mathbf{u}^T \mathbf{f} \, dS - \int_{\Gamma_t} t\delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} \, d\Gamma_f \quad (23b)$$



Obrázek 4: Variace potenciální energie.

Zde je zásadní, že změna energie se na okraji odehrává pouze na místech se statickými okrajovými podmínkami, protože virtuální posuny jsou nulové tam, kde je předepsána kinematická okrajová podmínka.

Nyní stačí variaci celkové energie položit rovnu nule (obrázek 4).

$$\boxed{\delta II = \delta II_i + \delta II_e = 0} \quad (24)$$

což lze rozepsat takto

$$(1D) \quad \int_l A \delta \varepsilon \sigma \, dx = \int_l A \delta u \, f \, dx + (A \delta u \, t^{\Gamma_t})_{x \in \Gamma_t} \quad \forall \delta u \text{ nulové na } \Gamma_u \quad (25a)$$

$$(2D) \quad \int_S t \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dS = \int_S t \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \, dS + \int_{\Gamma_t} t \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} \, d\Gamma_f \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ nulové na } \Gamma_u \quad (25b)$$

Porovnáme-li tyto rovnice s rovnicemi (13) a (16), zjistíme, že jsou zcela shodné zaměníme-li \bar{u} za δu (případně $\bar{\mathbf{u}}$ za $\delta \mathbf{u}$). Získali jsme slabou formulaci okrajové úlohy. Zpětně lze samozřejmě identifikovat jednotlivé členy rovnic jako variace energie a dojít tak k ekvivalenci energetických principů, variačních principů a slabé i silné formulace. Rovnice (25) a tedy i (13) a (16) jsou v literatuře často nazývány *princip virtuálních prací*.

Kterou z formulací zvolíme pro řešení problému je zcela na nás. Všechny poskytují stejné řešení. První část příkladů v tomto textu je řešena energeticky, přímo pomocí rovnice (21). Poté je řešení prováděno pomocí metody konečných prvků, která vychází ze slabé formulace (principu virtuálních prací), tedy rovnic (25).

Variačních principů, a tedy i slabých formulací, je celá řada. Zde se budeme věnovat pouze deformačnímu variačnímu principu, zvanému též Lagrangeův, který zde byl prezentován. Z ostatních zmiňme alespoň Castiglianův silový princip, vedoucí na silovou metodu a na duální MKP formulaci. Místo virtuálních posunů se volí virtuální napětí a sestavuje se doplňková (komplementární) potenciální energie. Pro zajímavost je to provedeno v příkladu 4.2 na straně 28.

Použití uvedených formulací k řešení úloh statiky

Minimum potenciální energie

Uvažujme aproximaci skutečných posunů $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}})$ po délce či ploše tělesa v závislosti na neznámých parametrech deformačního stavu $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \right\}^T$$

Často se pro jednoduchost uvažují polynomy, např.

$$(1D) \quad u(\hat{\mathbf{u}}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2D) \quad \mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + \dots \\ b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + \dots \end{array} \right\} \quad (26)$$

ale můžeme použít téměř jakékoliv funkce. Nutné ovšem je, aby tyto funkce splňovaly kinematické okrajové podmínky pro jakékoliv zvolené parametry.

Máme-li aproximaci posunů, můžeme sestavit potenciální energii systému a hledat její minimum – rovnice (21), tedy položit derivaci potenciální energie podle parametrů deformačního stavu a_i a b_i rovnu nule. Získáme systém tolika rovnic, kolik deformačních parametrů použijeme. Tyto rovnice budou lineární, pokud bude v těchto parametrech lineární i zvolená aproximace posunu a zároveň bude lineární fyzikální rovnice. Popsaný postup se v literatuře nazývá Ritzova metoda.

Získané řešení bude přesné (splňující silnou formulaci) pouze tehdy, obsahuje-li toto řešení námi zvolená aproximace. Ověřit to můžeme právě dosazením do rovnice rovnováhy (2c). Ve všech ostatních případech získáme řešení splňující podmínky rovnováhy pouze ve slabém (integrálním) smyslu, silná formulace nebude splněna přesně. Jak je to možné, když jsme tvrdili, že formulace jsou zcela ekvivalentní? Nenašli jsme totiž skutečné minimum, pouze minimum v námi zvoleném podprostoru popsáném aproximační funkcí posunu.

Tento přístup je důsledně aplikován v kapitolách 2-5. V poslední z těchto kapitol je ukázána těžkopádnost tohoto přístupu na dvourozměrné konstrukci. Od kapitoly 6 je tedy řešení založeno na slabé formulaci. Její výhodou je to, že řada kroků, které musíme provést při formulaci přes potenciální energie, je již provedena předem a vlastně stačí pouze dosadit do rovnic (25).

Princip virtuálních prací – slabá formulace

Opět zvolme libovolnou aproximaci posunu závislou na neznámých parametrech deformačního stavu $\hat{\mathbf{u}}$, která ovšem splňuje kinematické okrajové podmínky. Pro jednoduchost uvažujme pouze funkce lineární v těchto parametrech. Můžeme pak definovat matice \mathbf{B} a \mathbf{H} závislé na poloze (x, y, z) které umožní vypočítat posuny a deformace

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (27)$$

Například pro aproximační funkce (26) vypadají tyto součiny následovně (matice \mathbf{B} vychází z rovnice (2a))

$$(1D) \quad \mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}}) = \underbrace{\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & \dots \end{array} \right\}}_{\mathbf{H}} \left\{ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{array} \right\} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \underbrace{\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2x & \dots \end{array} \right\}}_{\mathbf{B}} \left\{ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$(2D) \quad \hat{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \end{array} \right\}^T$$

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{u}}) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & x & y & xy & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & y & xy & \dots \end{array} \right]}_{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{u}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & y & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & x & \dots \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & 0 & 1 & 0 & y & \dots \end{array} \right]}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}$$

V případě nehomogenních kinematických okrajových podmínek ($\mathbf{u}^{\Gamma_u} \neq \mathbf{0}$) je výhodné rozdělit aproximaci do dvou složek ve stejném tvaru, do parametrizované homogenní složky, která je nulová na Γ_u , a konstantní složky \mathbf{U} , která splňuje kinematické okrajové podmínky. Konstantností se myslí nezávislost na deformačních parametrech, \mathbf{U} je samozřejmě závislé na poloze.

$$\mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}}_{\text{nulové na } \Gamma_u} + \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{konstantní}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\partial}\mathbf{U} \quad (28)$$

Virtuální posuny uvažujeme pomocí stejné aproximace, ovšem uvažujeme parametry deformačního stavu $\delta\hat{\mathbf{u}}$ takové, aby byly virtuální posuny nulové tam, kde jsou zadány kinematické okrajové podmínky. Tedy neuvažujeme již konstantní člen.

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{H}\delta\hat{\mathbf{u}} \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\hat{\mathbf{u}} \quad (29)$$

Dosazením do rovnice (25) získáváme (již pouze pro 2D, neboť rovnice pro 1D je téměř identická)

$$\int_S t\delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\partial}\mathbf{U}) \, dS = \int_S t\delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{f} \, dS + \int_{\Gamma_t} t\delta\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} \, d\Gamma_f$$

Jelikož $\delta\hat{\mathbf{u}}$ i $\hat{\mathbf{u}}$ jsou konstantní vektory parametrů deformačního stavu, je možné je vytknout před integrál

$$\delta\hat{\mathbf{u}}^T \left[\int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dS \right] \hat{\mathbf{u}} + \delta\hat{\mathbf{u}}^T \left\{ \int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}\mathbf{U} \, dS \right\} = \delta\hat{\mathbf{u}}^T \left\{ \int_S t\mathbf{H}^T \mathbf{f} \, dS + \int_{\Gamma_t} t\mathbf{H}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} \, d\Gamma_f \right\} \quad (30)$$

Celou rovnici můžeme „vydělit“ $\delta\hat{\mathbf{u}}^T$ díky tomu, že musí platit pro libovolné $\delta\hat{\mathbf{u}}^T$ a dostáváme

$$\underbrace{\left[\int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dS \right]}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}} = \underbrace{\left\{ \int_S t\mathbf{H}^T \mathbf{f} \, dS + \int_{\Gamma_t} t\mathbf{H}^T \mathbf{t}^{\Gamma_t} \, d\Gamma_f - \int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}\mathbf{U} \, dS \right\}}_{\mathbf{R}} \quad (31)$$

Dostali jsme běžně používanou definici matice tuhosti \mathbf{K} a vektoru pravé strany \mathbf{R} . Pokud by tloušťka či průřez byly konstantní, je samozřejmě možné je umístit před integrály.

Konstantní člen aproximace \mathbf{U} se většinou volí ve stejné formě jako proměnný homogenní člen, získáme tak stejný výraz jen závislý na konstantním vektoru parametrů deformačního stavu $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u}$ a matici \mathbf{H}_{Γ_u} , případně \mathbf{B}_{Γ_u}

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u} \quad \boldsymbol{\partial}\mathbf{U} = \mathbf{B}_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u}$$

Poslední člen rovnice (31) tak přejde na výraz

$$\int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}\mathbf{U} \, dS = \int_S t\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{\Gamma_u} \, dS \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u} = \mathbf{K}_{\Gamma_u} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u}$$

Jelikož vektor $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_u}$ může mít (a většinou i má) jiný počet prvků než vektor $\hat{\mathbf{u}}$, matice \mathbf{K}_{Γ_u} nemusí být čtvercová. V případě, že je čtvercová, nemusí být symetrická, pokud neplatí $\mathbf{B}_{\Gamma_u} = \mathbf{B}$. Prozatím mají všechny připravené příklady homogenní kinematické okrajové podmínky, a tak tento konstantní člen není vůbec potřeba. Příklad s jeho využitím je v přípravě.

Získali jsme lineární systém $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}$, totožný s tím, jaký bychom dostali v případě minimalizace potenciální energie, neboť tyto metody jsou ekvivalentní. Díky volbě stejné parametrizované funkce pro virtuální i skutečné posuny dostáváme symetrii $\mathbf{B}^T\mathbf{C}\mathbf{B}$, symetrická je tak i matice tuhosti \mathbf{K} . Opět máme pouze aproximativní řešení, které nemusí v každém bodě splňovat silnou formulaci, a tedy rovnice rovnováhy. Ty budou splněny pouze v případě, že zvolené aproximační funkce budou obsahovat i přesné řešení.

Omezili jsme se totiž rovnicí (29) pouze na podprostor virtuálních posunů, ačkoliv slabá formulace správně uvažuje všechny možné. Pokud zvolíme virtuální posuny z tohoto podprostoru, slabá formulace bude splněna, ovšem pokud zvolíme virtuální posuny mimo tento podprostor, pak nemusíme splnit ani slabou formulaci, tedy rovnováhu v integrálním smyslu. To je ukázáno v příkladu 3.1.

Popsaný postup se v literatuře nazývá Galerkinova metoda. V metodě konečných prvků budeme využívat Galerkinovu metodu ve spojení se speciálními aproximačními funkcemi definovanými po částech na omezeném objemu. Tím se zbavíme hlavní nevýhody Galerkinovy i Ritzovy metody, kterou je velmi komplikovaná volba aproximačních funkcí pro složitější geometrie. Integrály z rovnice (31) se tak rozpadnou na součet jednodušších integrálů přes omezené objemy, tzv. konečné prvky.

Podmínky kladené na aproximativní řešení a testovací funkce

Aby slabá formulace nebo energetický variační princip měly smysl, musí uvedené integrály existovat. Je tedy požadováno, aby aproximace skutečných posunů i virtuální posuny měly integrovatelné čtverce derivací. Běžně se však používají funkce, které mají po částech spojitě derivace, tedy funkce spojitě, které mohou obsahovat zlomy (takzvané C^0 funkce). To je dokonce silnější podmínka implikující integrovatelnost.

2 Energetické principy I

Příklad 2.1 Určete vodorovný posun u konstrukce na Obr. 5 pomocí minimalizace její potenciální energie. Uvažujte konstantní plochy $A_1 = 0.5 \text{ m}^2$ a $A_2 = 0.25 \text{ m}^2$, modul pružnosti $E = 30 \text{ GPa}$ a délky $l_1 = 5 \text{ m}$ a $l_2 = 10 \text{ m}$. Zatěžovací síla je $F = 3 \text{ MN}$.

Řešení Díky konstantnímu průřezu je na obou prutech posun lineární, zřejmě tedy stačí volit lineární aproximační funkce pro posun.

$$u(x) = \begin{cases} a_1 x + a_0 & x < l_1 \\ b_1 x + b_0 & x \geq l_1 \end{cases}$$

Potřebujeme zajistit splnění kinematických okrajových podmínek

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow a_0 = 0 \\ u(l_1 + l_2) = 0 &\Rightarrow b_0 = -b_1(l_1 + l_2) \\ u(l_1)^+ = u(l_1)^- &\Rightarrow b_1 = -a_1 \frac{l_1}{l_2} \end{aligned}$$

Máme tedy jen jednu neznámou, a_1 . Jeví se rozumné za neznámou zvolit přímo posun pod osamělou silou, v místě napojení prutů. Označme jej tedy a a pak musí platit: $a_1 = a/l_1$. Aproximační funkce je

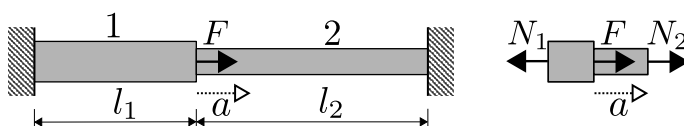
$$u(x) = \begin{cases} \frac{a}{l_1} x & x < l_1 \\ \frac{a}{l_2} (l_1 + l_2 - x) & x \geq l_1 \end{cases}$$

Deformace je derivace posunů

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{a}{l_1} & x < l_1 \\ -\frac{a}{l_2} & x \geq l_1 \end{cases}$$

Označme si deformace na jednotlivých prutech symboly ε_1 a ε_2 . Napětí vzniká pouze normálové, také všude konstantní, závislé na deformaci e

$$\sigma(e) = Ee$$



Obrázek 5: Konstrukce z příkladu 2.1.

Celková potenciální energie vnitřních sil je tak

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \int_{V_1} \int_0^{\varepsilon_1} \sigma(e) de dV_1 + \int_{V_2} \int_0^{\varepsilon_2} \sigma(e) de dV_2 = A_1 l_1 \int_0^{\varepsilon_1} Ee de + A_2 l_2 \int_0^{\varepsilon_2} Ee de \\ &= A_1 l_1 \left[\frac{Ee^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_1} + A_2 l_2 \left[\frac{Ee^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_2} = A_1 l_1 \frac{E\varepsilon_1^2}{2} + A_2 l_2 \frac{E\varepsilon_2^2}{2} = Ea^2 \left(\frac{A_1}{2l_1} + \frac{A_2}{2l_2} \right) \end{aligned}$$

Pro potenciální energii vnějších sil platí

$$\Pi_e = -Fa$$

a celková potenciální energie systému je

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = Ea^2 \left(\frac{A_1}{2l_1} + \frac{A_2}{2l_2} \right) - Fa$$

s jedinou deformační proměnnou a . Podmínka minima potenciální energie dává

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 &\Rightarrow Ea \left(\frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2} \right) - F = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{F}{E \left(\frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2} \right)} = \frac{3 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^9 \left(\frac{0.5}{5} + \frac{0.25}{10} \right)} = 0.8 \text{ mm} \end{aligned}$$

Normálové síly v prutech jsou

$$\begin{aligned} N_1 &= A_1 \sigma_1 = A_1 E \varepsilon_1 = \frac{A_1 E a}{l_1} = \frac{30 \cdot 10^9 \cdot 0.5 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{5} = 2.4 \text{ MN} \\ N_2 &= -\frac{A_2 E a}{l_2} = -\frac{30 \cdot 10^9 \cdot 0.25 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{10} = -0.6 \text{ MN} \end{aligned}$$

Správnost výsledku lze zkontrolovat rovnováhou ve volném styčnicku

$$\sum F_x = -N_1 + N_2 + F = -2.4 - 0.6 + 3 = 0$$

nebo přímo dosazením do silné formulace (2c). ■

Příklad 2.2 *Vykreslete křivku potenciální energie systému v závislosti na parametru a z příkladu 2.1.*

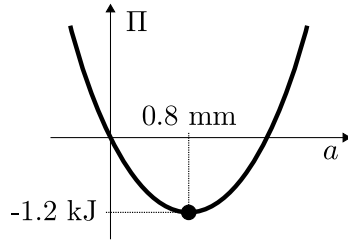
Řešení Celková potenciální energie vnitřních sil je

$$\Pi = Ea^2 \left(\frac{A_1}{2l_1} + \frac{A_2}{2l_2} \right) - Fa = 30 \cdot 10^9 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{80} \right) a^2 - 3 \cdot 10^6 a = (1875a^2 - 3a) \cdot 10^6$$

To lze zapsat také jako

$$\Pi = [1875(a - 8 \cdot 10^{-4})^2 - 1.2 \cdot 10^{-3}] \cdot 10^6$$

Jedná se tedy o parabolu s vrcholem v bodě $[8 \cdot 10^{-4} \text{ m}, -1.2 \text{ kJ}]$. Pro $a = 0$ a stejně tak $a = 1.6 \cdot 10^{-4}$ dostáváme $\Pi(a = 0) = 0 \text{ J}$. Výsledkem je tedy obrázek 6. Uvědomme si také, že poloha minima na ose a se nezmění, budeme-li parabolu posouvat nahoru či dolů, tedy přičítat k potenciální energii vnitřních či vnějších sil libovolnou konstantu, a tedy definovat jinak nulovou hodnotu potenciální energie. ■



Obrázek 6: Potenciální energie konstrukce z příkladu 2.1.

Příklad 2.3 Určete vodorovný a svislý posun konstrukce na Obr. 7 pomocí minimalizace její potenciální energie. Uvažujte konstantní plochu A a modul pružnosti E .

Řešení Označme si posun na konci konzoly a a b . Práce, kterou vykoná síla F je rovna Fb , potenciální energie vnějších sil je tak rovna

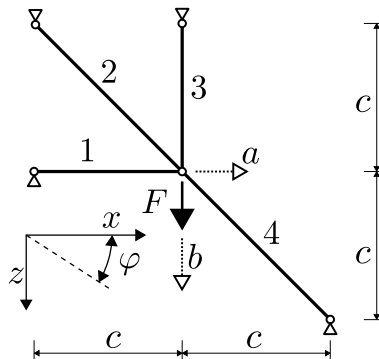
$$\Pi_e = -Fb$$

Jelikož se jedná o příhradovou konstrukci, vnitřní síly v prutech jsou pouze normálové síly N . V prutech vzniká deformace ε pouze v ose prutu, a je konstantní po celé délce i průřezu prutu. Napětí, které vyvolá, je pak $\sigma = E\varepsilon$ a celková potenciální energie

$$\Pi_i = \sum_{i=1}^4 \int_{V_i} \int_0^{\varepsilon_i} \sigma(e) de dV_i = \sum_{i=1}^4 \frac{EA l_i \varepsilon_i^2}{2}$$

Zvolme lineární pole posunů na všech prutech. Nemusíme ho explicitně zapsat, stačí pomocí uzlových posunů (parametrů deformačního stavu) vypočítat jednotlivé derivace (deformace)

$$\varepsilon_i = \frac{a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i}{l_i}$$



Obrázek 7: Konstrukce z příkladu 2.3.

a tedy

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{a \cos 0 + b \sin 0}{c} = \frac{a}{c} \\ \varepsilon_2 &= \frac{a \cos(\pi/4) + b \sin(\pi/4)}{\sqrt{c^2 + c^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)}{c\sqrt{2}} = \frac{a+b}{2c} \\ \varepsilon_3 &= \frac{a \cos(\pi/2) + b \sin(\pi/2)}{c} = \frac{b}{c} \\ \varepsilon_4 &= \frac{a \cos(5\pi/4) + b \sin(5\pi/4)}{\sqrt{c^2 + c^2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)}{c\sqrt{2}} = -\frac{a+b}{2c}\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme vztah pro celkovou potenciální energii vnitřních sil

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \frac{EA}{2} \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 c + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 \sqrt{2}c + \left(\frac{b}{c}\right)^2 c + \left(-\frac{a+b}{2c}\right)^2 \sqrt{2}c \right] \\ &= \frac{EA}{2} \frac{4a^2 + 4b^2 + \sqrt{2}(2a^2 + 2b^2 + 4ab)}{4c} = \frac{EA \left[(2 + \sqrt{2})(a^2 + b^2) + 2\sqrt{2}ab \right]}{4c}\end{aligned}$$

Celková potenciální energie soustavy je tak rovna

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{EA \left[(2 + \sqrt{2})(a^2 + b^2) + 2\sqrt{2}ab \right]}{4c} - Fb$$

Aby byla energie minimální, musí platit

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0$$

což vede na soustavu rovnic

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{EA \left[(2 + \sqrt{2})a + \sqrt{2}b \right]}{2c} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = \frac{EA \left[(2 + \sqrt{2})b + \sqrt{2}a \right]}{2c} - F = 0$$

Soustavu lze také zapsat maticově

$$\underbrace{\frac{EA}{2c} \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

První matice se jmenuje matice tuhosti (\mathbf{K}), vektory jsou nejprve vektor neznámých parametrů deformačního stavu ($\hat{\mathbf{u}}$) a poté zatěžovací vektor \mathbf{R} . Tento postup se často v literatuře označuje jako deformační metoda.

Úprava rovnic je následující

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{2})a + \sqrt{2}b &= 0 & (2 + \sqrt{2})b + \sqrt{2}a - \frac{2cF}{EA} &= 0 \\ b &= -(1 + \sqrt{2})a & -(4 + 2\sqrt{2})a &= \frac{2cF}{EA}\end{aligned}$$

a řešením je

$$a = -\frac{cF}{(2 + \sqrt{2})EA} \qquad b = \frac{(1 + \sqrt{2})cF}{(2 + \sqrt{2})EA} = \frac{cF}{\sqrt{2}EA}$$

Vnitřní síly jsou následující

$$\begin{aligned} N_1 &= EA\varepsilon_1 = -EA\frac{a}{c} = -\frac{F}{2 + \sqrt{2}} = -0.293F \\ N_2 &= EA\varepsilon_2 = EA\frac{a+b}{2c} = \frac{\sqrt{2}F}{2(2 + \sqrt{2})} = \frac{F}{2 + 2\sqrt{2}} = 0.207F \\ N_3 &= EA\varepsilon_3 = EA\frac{b}{c} = \frac{F}{\sqrt{2}} = 0.707F \\ N_4 &= EA\varepsilon_4 = -EA\frac{a+b}{2c} = -\frac{F}{2 + 2\sqrt{2}} = -0.207F \end{aligned}$$

Výsledek je možno zkontrolovat například kontrolou rovnováhy ve středovém uzlu

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -\sum_{i=1}^4 N_i \cos \varphi_i = -N_1 \cdot 1 - (N_2 - N_4)\frac{1}{\sqrt{2}} - N_3 \cdot 0 = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} - \frac{2F}{\sqrt{2}(2 + 2\sqrt{2})} = 0 \\ \sum F_z &= F - \sum_{i=1}^4 N_i \sin \varphi_i = F - N_1 \cdot 0 - (N_2 - N_4)\frac{1}{\sqrt{2}} - N_3 \cdot 1 = F + \frac{F}{2 + \sqrt{2}} - \frac{F}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

■

3 Energetické principy II

Příklad 3.1 Konstrukce s proměnným průřezem na obrázku 8 je zatížena vlastní tíhou. Vypočtete posuny, normálovou sílu a reakce na konstrukci. Uvažujte konstantní tloušťku $t = 0.25 \text{ m}$, modul pružnosti $E = 20 \text{ GPa}$ a měrnou tíhu $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, lineární změnu šířky od $h_a = 0.5 \text{ m}$ po $h_b = 0.2 \text{ m}$ a délku $l = 6 \text{ m}$.

Řešení Opět budeme volit deformační proměnné. V tomto případě již ale evidentně nemáme konstantní deformace a tedy lineární funkci posunů, ale musíme uvažovat komplikovanější polynom, například třetího stupně.

$$u(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Aproximační funkce posunů ale musí splňovat kinematické okrajové podmínky, což tento polynom prozatím nespĺňuje. Kinematické podmínky jsou

$$\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow a_0 = 0 \\ u(l) = 0 &\Rightarrow a_3l^3 + a_2l^2 + a_1l = 0 \Rightarrow a_1 = -a_3l^2 - a_2l \end{aligned}$$

Po dosazení máme finální aproximační funkci

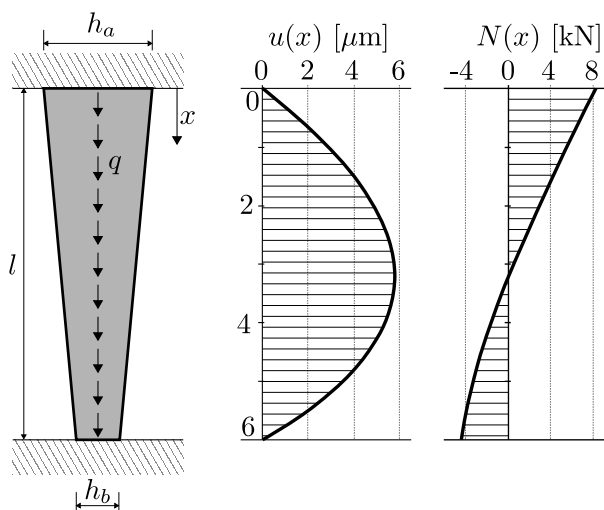
$$u(x) = a_3x^3 + a_2x^2 - a_3xl^2 - a_2xl = a_3(x^3 - xl^2) + a_2(x^2 - xl)$$

Budeme potřebovat její derivace podle a_3 a a_2

$$\frac{\partial u(x)}{\partial a_3} = (x^3 - xl^2) \qquad \frac{\partial u(x)}{\partial a_2} = (x^2 - xl)$$

a také deformace a jejich derivace

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = a_3(3x^2 - l^2) + a_2(2x - l) \qquad \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial a_3} = 3x^2 - l^2 \qquad \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial a_2} = 2x - l$$



Obrázek 8: Konstrukce z příkladu 3.1.

Dále si vypočteme zatížení. Šířka průřezu je lineární funkce

$$h(x) = h_a + x(h_b - h_a)/l$$

Na každý bod střednice působí síla $q(x) = \gamma th(x)$ a tedy

$$q(x) = \gamma th(x) = \gamma t \left(h_a + x \frac{h_b - h_a}{l} \right) = \gamma t (h_a + h'x)$$

kde jsme si označili $h' = (h_b - h_a)/l = -1/20$.

Nyní potřebujeme vypočíst derivaci potenciální energie vnitřních a vnějších sil podle parametrů a_3 a a_2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_3} &= \frac{\partial \left(- \int_0^l q(x) u(x) dx \right)}{\partial a_3} = - \int_0^l q(x) \frac{\partial u(x)}{\partial a_3} dx = -\gamma t \int_0^l (h_a + h'x) (x^3 - xl^2) dx \\ &= \gamma t \int_0^l -x^4 h' - x^3 h_a + x^2 h' l^2 + x h_a l^2 dx = \gamma t \left(\frac{2l^5 h'}{15} + \frac{l^4 h_a}{4} \right) = 6.885 \cdot 10^5 \text{ Jm}^2 \\ \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_2} &= - \int_0^l q(x) \frac{\partial u(x)}{\partial a_2} dx = -\gamma t \int_0^l (h_a + h'x) (x^2 - xl) dx = \gamma t \left(\frac{l^4 h'}{12} + \frac{l^3 h_a}{6} \right) \\ &= 0.7875 \cdot 10^5 \text{ Jm} \end{aligned}$$

Potenciální energii tedy dokonce nemusíme přímo počítat, stačí vypočíst pouze její derivace podle neznámých parametrů deformačního stavu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_3} &= \frac{\partial \frac{1}{2} \int_0^l th(x) \sigma(x) \varepsilon(x) dx}{\partial a_3} = \frac{\partial \frac{1}{2} \int_0^l th(x) E \varepsilon(x)^2 dx}{\partial a_3} = tE \int_0^l h(x) \varepsilon(x) \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial a_3} dx \\ &= tE \int_0^l (h_a + h'x) (a_3(3x^2 - l^2) + a_2(2x - l)) (3x^2 - l^2) dx \\ &= a_3 tE \left(\frac{l^6 h'}{2} + \frac{4l^5 h_a}{5} \right) + a_2 tE \left(\frac{17l^5 h'}{60} + \frac{l^4 h_a}{2} \right) = 9.72 \cdot 10^{12} a_3 + 1.0692 \cdot 10^{12} a_2 \\ \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2} &= tE \int_0^l h(x) \varepsilon(x) \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial a_2} dx = tE \int_0^l (h_a + h'x) (a_3(3x^2 - l^2) + a_2(2x - l)) (2x - l) dx \\ &= a_3 tE \left(\frac{17l^5 h'}{60} + \frac{l^4 h_a}{2} \right) + a_2 tE \left(\frac{l^4 h'}{6} + \frac{l^3 h_a}{3} \right) = 1.0692 \cdot 10^{12} a_3 + 0.126 \cdot 10^{12} a_2 \end{aligned}$$

Získali jsme opět soustavu rovnic pro neznámé parametry deformačního stavu a_3 a a_2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} &= \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_3} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_3} = 9.72 \cdot 10^{12} a_3 + 1.07 \cdot 10^{12} a_2 + 6.885 \cdot 10^5 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_2} = 1.07 \cdot 10^{12} a_3 + 0.126 \cdot 10^{12} a_2 + 0.7875 \cdot 10^5 = 0 \end{aligned}$$

což lze zapsat maticově takto

$$10^{12} \cdot \begin{bmatrix} 9.72 & 1.07 \\ 1.07 & 0.126 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.885 \\ -0.7875 \end{Bmatrix} \cdot 10^5$$

jejímž řešením je $a_3 = -3.1295 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-2}$ a $a_2 = -35.944 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$. Třetí konstanta aproximačního polynomu je $a_1 = -a_3 l^2 - a_2 l = 328.326 \cdot 10^{-8}$. Dosazením získáváme rovnici udávající posun v každém bodě

$$u(x) = (-3.1295x^3 - 35.944x^2 + 328.326x) \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Vnitřní sílu N získáme jednoduše jako

$$\begin{aligned} N(x) &= A(x)\sigma(x) = th(x)E\varepsilon(x) = th(x)E \frac{\partial u(x)}{\partial x} = tE(h_a + h'x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \\ &= 23.47x^3 - 54.99x^2 - 2618.03x + 8208.15 \text{ N} \end{aligned}$$

Reakce v horním bodě je podle rovnice (6) $R_a = n(0)\sigma(0)A(0) = -N(0) = -8.208 \text{ kN}$, ve spodním bodě pak $R_b = n(6)\sigma(6)A(6) = N(6) = -4.410 \text{ kN}$, celkem tedy $R_a + R_b = 12.62 \text{ kN}$. Celková tíha sloupu je však

$$\int_0^l th(x)\gamma \, dx = t\gamma \int_0^l h_a + h'x \, dx = t\gamma \left(h_a l + \frac{h'l^2}{2} \right) = 13.125 \text{ kN}$$

Vypočtené křivky jsou zobrazeny na Obr. 8. Řešení není přesné, chyba je způsobena nedostatečnou volbou aproximačního polynomu. Zpřesnění je možné přidáním vyšších členů do aproximace posunu.

Pro ověření výsledku dosadíme získané řešení do rovnice rovnováhy (2c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af &= \frac{\partial N}{\partial x} + A\gamma = 3 \cdot 23.47x^2 - 2 \cdot 54.99x - 2618.03 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{20} \right) 25 \cdot 10^3 \\ &= 70.41x^2 - 422.5x + 507.0 \neq 0 \end{aligned}$$

Rovnice rovnováhy sice není splněna v každém bodě. Je splněna ve slabém smyslu, ale pouze pro některé virtuální posuny. Mohli bychom to demonstrovat přímo pomocí slabé formulace. Pro názornost však použijeme ekvivalentní zápis (10). Nejprve si ukážeme, že pro některé virtuální posuny z třídy funkcí C^0 , které jsou nulové na Γ_u (zde v bodech $x = 0$ a $x = l$), tato rovnice neplatí. Zvolme například

$$\bar{u} = \begin{cases} x & x < l/2 \\ l - x & x \geq l/2 \end{cases}$$

a dosadíme do pravé části rovnice (10)

$$\begin{aligned} \int_0^l \bar{u} \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dx &= \int_0^{l/2} x \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dx + \int_{l/2}^l (l - x) \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dx \\ &= -95.06 - 855.52 = -950.58 \text{ J} \end{aligned}$$

Nemáme tedy splněnou rovnováhu v integrálním, slabém smyslu. Důvodem je to, že volbou aproximace posunů a konstrukcí potenciální energie jsme se omezili pouze na ty virtuální posuny, které mají stejný funkční tvar jako aproximace skutečného posunu. Zkusme tedy ověřit, že pro polynom

$$\bar{u} = \bar{a}_3(x^3 - xl^2) + \bar{a}_2(x^2 - xl)$$

s libovolnými koeficienty \bar{a}_2 a \bar{a}_3 slabou rovnováhu opravdu získáme.

$$\begin{aligned} \int_0^l \bar{u} \left(\frac{\partial A\sigma}{\partial x} + Af \right) dx &= \int_0^l \left(\bar{a}_3(x^3 - xl^2) + \bar{a}_2(x^2 - xl) \right) (70.41x^2 - 422.5x + 507.0) dx \\ &= 0 \cdot \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_2 = 0 \quad \forall \bar{a}_3, \bar{a}_2 \end{aligned}$$

Pozorného čtenáře, který si uvedený integrál vypočítá sám, upozorňujeme, že z důvodu zaokrouhlování čísel mu přesná nula nevyjde. Bylo by nutné v průběhu výpočtu nikde do vzorců číselně nedosazovat, na konci by se pak všechny členy odečetly. Dále upozorňujeme, že rovnice (10) nám ani pro správnou bázi virtuálních posunů nemusí dát nulu. Ve skutečnosti totiž řešíme až rovnici (13), která předpokládá platnost statických okrajových podmínek (rovnice (6)). V tomto příkladu žádné statické okrajové podmínky nemáme, a tak je rovnice (10) zcela shodná s rovnicí (13).

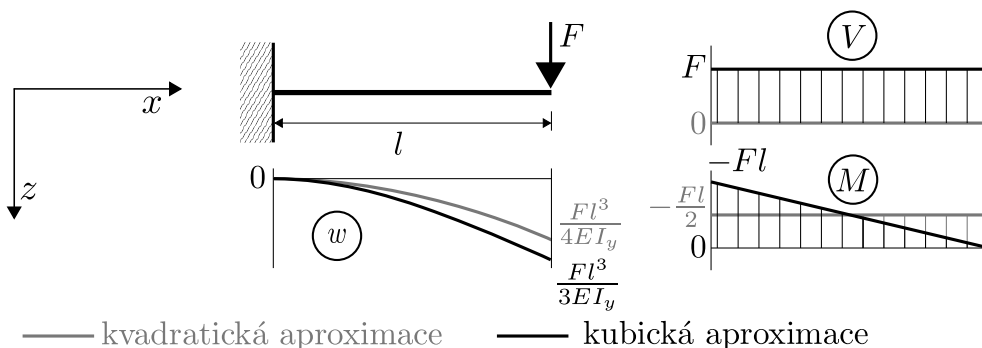
Tento postup, kdy si zvolím parametrizované aproximační funkce posunů či pootočení, výpočtu potenciální energie a najdu parametry tak, aby byla minimální, se nazývá *Ritzova metoda*. ■

Doposud jsme počítali jen příklady, kde pruty přenášely pouze normálovou sílu. Podívejme se, jak sestavit deformační energii pro ohýbaný prut. Pro tento případ nemáme ani odvozenou silnou formulaci.

Příklad 3.2 Na konci konzoly o délce l působí osamělá síla o velikost F (Obr. 9). Konzola má čtvercový průřez o straně a , modul pružnosti materiálu je E . Vypočtete průhyb konzoly za předpokladu kvadratické aproximace ohybové čáry.

Řešení Označme si průhyb konzoly w . Práce, kterou vykoná síla F , je rovna $Fw(l)$ a potenciální energie vnějších sil je tak

$$\Pi_e = -Fw(l)$$



Obrázek 9: Konstrukce z příkladu 3.2.

Práci, kterou vykonají vnitřní síly, je možno rozdělit do složek patřících jednotlivým vnitřním silám, N , V_z , M_y , a případně dalším. Předpokládejme, že práce posouvajících sil je malá a zanedbejme ji. Normálové síly nevznikají, zbývá nám ohybový moment, který způsobuje normálovou deformaci ε

$$\varepsilon = z\kappa = z \frac{M_y}{EI_y}$$

kde $\kappa = M_y/EI_y$ je křivost a $I_y = a^4/12$ je kvadratický moment průřezu k těžištní ose y . Ze základní mechaniky také známe vztah mezi momentem a průhybem

$$M_y = -EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

a tedy

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Potenciální energie vnitřních sil (uvažujeme pouze normálovou deformaci, smykovou zanedbáme) je tak

$$\begin{aligned} \Pi_i &= t \int_0^l \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^\varepsilon \sigma(e) \, de \, dz \, dx = t \int_0^l \int_{-a/2}^{a/2} \frac{E}{2} \varepsilon^2 \, dz \, dx = t \int_{-a/2}^{a/2} z^2 \, dz \underbrace{\frac{E}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \, dx}_{I_y} \\ &= \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \, dx \end{aligned}$$

Nyní již musíme zvolit aproximační polynom $w(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Musíme ovšem dodržet kinematické okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w(0) = 0 &\Rightarrow a_0 = 0 \\ \varphi(0) = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 &\Rightarrow a_1 = 0 \end{aligned}$$

a tedy zbývá jediný parametr $w(x) = a_2 x^2$. Průhyb má na konci hodnotu $w(l) = a_2 l^2$ a derivace potenciální energie vnějších sil je tak

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial a_2} = -F \frac{\partial w}{\partial a_2} \Big|_{x=l} = -Fl^2$$

Pro potenciální energii vnitřních sil použijeme odvozený vztah

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2} = \frac{\partial \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \, dx}{\partial a_2} = EI_y \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial a_2} \, dx = EI_y \int_0^l 2a_2 \cdot 2 \, dx = 4a_2 l EI_y$$

Celkem tedy

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_2} = 4a_2 l EI_y - Fl^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{Fl}{4EI_y}$$

a ohybová čára má předpis

$$w(x) = \frac{Fl}{4EI_y} x^2$$

a je nakreslena na Obr. 9. Průhyb na konci je $w(l) = Fl^3/4EI_y$, momenty a posouvající síly jsou

$$M(x) = -EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{Fl}{2} \quad V(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = 0$$

Posouvající síla je na celém prutu nulová, na konci vzniká pod zatížením nerovnováha. Podobně moment na konci není nulový. Je zřejmé, že nemáme dostatečnou aproximaci průhybu. ■

Příklad 3.3 Pro konzolu z příkladu 3.2 uvažujte kubický polynom.

Řešení Uvažujme $w(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Musíme ovšem splnit kinematické okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w(0) = 0 & \Rightarrow a_0 = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 & \Rightarrow a_1 = 0 \end{aligned}$$

a tedy $w(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2$. Průhyb má na konci hodnotu $w(l) = a_3 l^3 + a_2 l^2$ a derivace potenciální energie vnějších sil je tak

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial a_3} = -F \frac{\partial w}{\partial a_3} \Big|_{x=l} = -Fl^3 \quad \frac{\partial \Pi_e}{\partial a_2} = -F \frac{\partial w}{\partial a_2} \Big|_{x=l} = -Fl^2$$

Pro potenciální energii vnitřních sil platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_3} &= EI_y \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial a_3} dx = EI_y \int_0^l (6a_3 x + 2a_2)(6x) dx = EI_y(12a_3 l^3 + 6a_2 l^2) \\ \frac{\partial \Pi_i}{\partial a_2} &= EI_y \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial a_2} dx = EI_y \int_0^l 12a_3 x + 4a_2 dx = EI_y(6a_3 l^2 + 4a_2 l) \end{aligned}$$

Získáváme

$$EI_y \begin{bmatrix} 12l^3 & 6l^2 \\ 6l^2 & 4l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fl^3 \\ Fl^2 \end{Bmatrix}$$

Řešení soustavy je následující

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12l^3 & 6l^2 & Fl^3/EI_y \\ 6l^2 & 4l & Fl^2/EI_y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12l & 6 & Fl/EI_y \\ 6l & 4 & Fl/EI_y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -F/6EI_y \\ 0 & 1 & Fl/2EI_y \end{array} \right)$$

tedy $a_3 = -F/6EI_y$, $a_2 = Fl/2EI_y$ a ohybová čára má předpis

$$w(x) = -\frac{F}{6EI_y}x^3 + \frac{Fl}{2EI_y}x^2$$

Průhyb na konci je $w(l) = Fl^3/3EI_y$, momenty a posouvající síly jsou

$$M(x) = -EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F(x-l) \qquad V(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = F$$

Posouvající síla je na celém prutu konstantní (rovna F), moment je lineární a na konci nulový. Ve všech bodech máme rovnováhu. Dostali jsme přesné řešení bez vlivu smyku.

■

Otázka: jak by příklad dopadl, pokud by se uvažovala lineární aproximační křivka či polynom 4. řádu?

Všimněme si, že pro aproximaci, která neobsahuje přesné řešení, se konstrukce jeví tužší, než ve skutečnosti je. To není náhoda, při aproximaci deformačního stavu dostaneme *vždy* tužší nebo přesné řešení.

4 Energetické principy III - nelineární materiál

Příklad 4.1 Vypočtete deformační a silový stav konstrukce z příkladu 2.1 za předpokladu nelineárního chování materiálu: $\sigma = E\varepsilon - \hat{E}\varepsilon^2$. Uvažujte $\hat{E} = 30000 \text{ GPa}$.

Řešení Budeme uvažovat stejnou aproximační funkci jako v příkladu 2.1

$$u(x) = \begin{cases} \frac{a}{l_1}x & x < l_1 \\ \frac{a}{l_2}(l_1 + l_2 - x) & x \geq l_1 \end{cases}$$

s deformací

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{a}{l_1} & x < l_1 \\ -\frac{a}{l_2} & x \geq l_1 \end{cases}$$

Potenciální energie vnějších sil a její derivace je

$$\Pi_e = -Fa \quad \frac{\partial \Pi_e}{\partial a} = -F$$

Potenciální energie vnitřních sil v prvním prutu je

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(1)} &= A_1 \int_0^{l_1} \int_0^\varepsilon \sigma(e) \, de \, dx = A_1 l_1 \int_0^\varepsilon Ee - \hat{E}e^2 \, de \\ &= A_1 l_1 \left(\frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{\hat{E}\varepsilon^3}{3} \right) = A_1 l_1 \left(\frac{Ea^2}{2l_1^2} - \frac{\hat{E}a^3}{3l_1^3} \right) = \frac{EA_1 a^2}{2l_1} - \frac{\hat{E}A_1 a^3}{3l_1^2} \end{aligned}$$

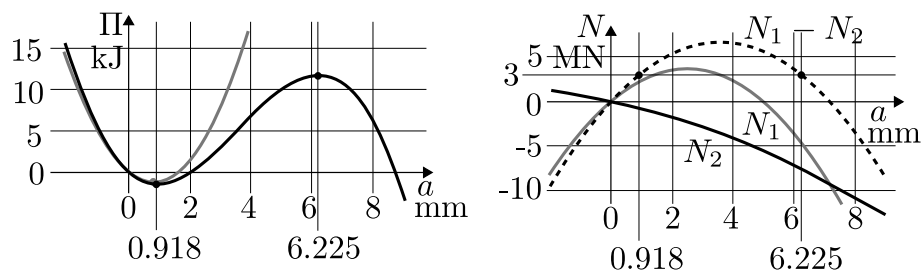
a na druhém prutu

$$\Pi_i^{(2)} = A_2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{E\varepsilon^2}{2} - \frac{\hat{E}\varepsilon^3}{3} \, dx = A_2 l_2 \left(\frac{Ea^2}{2l_2^2} + \frac{\hat{E}a^3}{3l_2^3} \right) = \frac{EA_2 a^2}{2l_2} + \frac{\hat{E}A_2 a^3}{3l_2^2}$$

Celková potenciální energie a její derivace je tak

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_i^{(1)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_e = a^3 \hat{E} \left(-\frac{A_1}{3l_1^2} + \frac{A_2}{3l_2^2} \right) + a^2 E \left(\frac{A_1}{2l_1} + \frac{A_2}{2l_2} \right) - aF \\ &= -1.75 \cdot 10^{11} a^3 + 1.875 \cdot 10^9 a^2 - 3 \cdot 10^6 a \quad \text{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a} &= a^2 \hat{E} \left(-\frac{A_1}{l_1^2} + \frac{A_2}{l_2^2} \right) + aE \left(\frac{A_1}{l_1} + \frac{A_2}{l_2} \right) - F = 0 \\ &= -5.25 \cdot 10^{11} a^2 + 3.75 \cdot 10^9 a - 3 \cdot 10^6 = 0 \end{aligned}$$



Obrázek 10: Potenciální energie konstrukce a normálové síly v prutech z příkladu 4.1.

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení, $a = 0.918$ mm a $a = 6.225$ mm. Pomocí druhé derivace snadno zjistíme, že první z řešení je lokální minimum (konvexní křivost) zatímco druhé lokální maximum (konkávní křivost).

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \Big|_{a=0.000918} = -2 \cdot 5.25 \cdot 10^{11} \cdot 0.000918 + 3.75 \cdot 10^9 = 2.79 \text{ GJ/m}^2 \Rightarrow \text{konvexní}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} \Big|_{a=0.006225} = -2 \cdot 5.25 \cdot 10^{11} \cdot 0.006225 + 3.75 \cdot 10^9 = -2.79 \text{ GJ/m}^2 \Rightarrow \text{konkávní}$$

Řešením je tedy první z hodnot, $a = 0.918$ mm. Normálová síla v prutech je rovna

$$N_1 = A_1 \sigma_1 = A_1 (E \varepsilon - \hat{E} \varepsilon^2) = A_1 \left(\frac{Ea}{l_1} - \frac{\hat{E}a^2}{l_1^2} \right) = (3a - 600a^2) \cdot 10^9 = 2.2483 \text{ MN}$$

$$N_2 = A_2 \sigma_2 = -A_2 \left(\frac{Ea}{l_2} + \frac{\hat{E}a^2}{l_2^2} \right) = -(0.75a + 75a^2) \cdot 10^9 = -0.7517 \text{ MN}$$

Dostáváme tedy v zatěžovaném uzlu rovnováhu

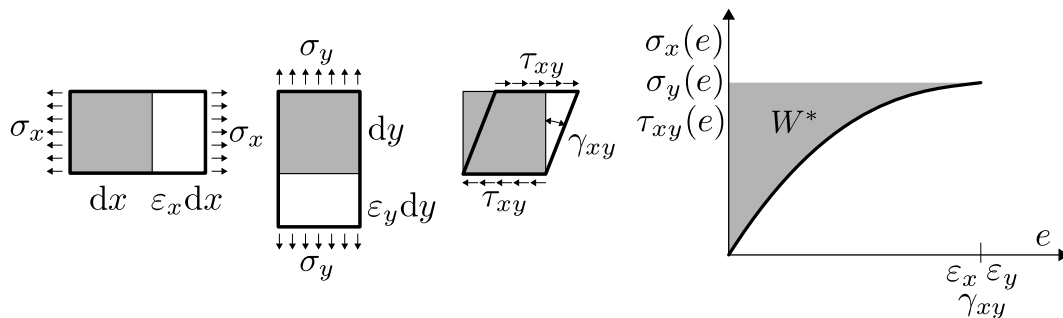
$$\sum F_x = -N_1 + N_2 + F = -2.2483 - 0.7517 + 3 = 0$$

a řešení je přesné. To můžeme opět ověřit dosazením do silné formulace. Závislost potenciální energie a síly v prutech na parametru deformačního stavu a je znázorněna na Obr. 10.

Pokud by byl materiál lineární, výsledná rovnice by byla také lineární (člen s a^2 by byl nulový) a řešení by bylo stejné jako u příkladu 2.1. Pokud je konstrukce nelineární (materiálově, geometricky nebo díky kontaktům), dostáváme soustavu nelineárních rovnic. ■

Zkusme si ještě tento příklad vyřešit pomocí zmiňovaného duálního principu minima doplňkové (někdy též komplementární) potenciální energie, tzv. Castigliánova variačního principu. V něm se nevolí deformační proměnné, ale silové proměnné. Oproti deformačním, které musely splnit kinematické okrajové podmínky, musí silové proměnné zajistit splnění podmínek rovnováhy v každém bodě konstrukce, a ještě také statické okrajové podmínky na okraji Γ_t . Doplňková energie vnitřních sil je pak (Obr. 11)

$$\Pi_i^* = \int_V W^* dV = \int_V \left[\int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x(e) de + \int_0^{\sigma_y} \varepsilon_y(e) de + \int_0^{\tau_{xy}} \gamma_{xy}(e) de \right] dV \quad (32)$$



Obrázek 11: Doplňková potenciální energie vnitřních sil

což u lineárního materiálu vede na výraz zcela shodný s potenciální energií vnitřních sil v deformačním principu

$$\Pi_1^* = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (33)$$

U nelineárního materiálu však $\Pi_1^* \neq \Pi_1$.

Vnější síly nekonají žádnou doplňkovou práci. Doplňková potenciální energie vnějších sil je tedy nulová.

$$\Pi_e^* = 0 \quad (34)$$

Celková doplňková potenciální energie je pak

$$\Pi^* = \Pi_1^* + \Pi_e^* \quad (35)$$

a těleso se ustálí ve stavu, ve kterém je definovaný funkcionál minimální.

Příklad 4.2 Vypočítejte deformační a silový stav konstrukce z příkladu 4.1 pomocí principu minima doplňkové energie.

Řešení Budeme volit silové proměnné. Musíme je ovšem předpokládat tak, aby splňovaly ve všech bodech rovnice rovnováhy a statické okrajové podmínky. Budeme tedy předpokládat konstantní normálové síly N_1 a N_2 na prutech a pro bod, kde působí síla F , musí platit

$$\sum F_x = -N_1 + N_2 + F = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = N_1 - F$$

Nejprve potřebujeme provést inverzi fyzikální rovnice

$$\sigma = E\varepsilon - \hat{E}\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4\hat{E}\sigma}}{2\hat{E}}$$

Kvůli nevhodné definici fyzikální rovnice, která nemá jednoznačnou inverzi, jsme získali dvě možná řešení. Uvažujme, že platné řešení budeme hledat pouze oblasti, kde materiálu s narůstající deformací narůstá i napětí. Řešením je tedy pouze

$$\varepsilon = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4\hat{E}\sigma}}{2\hat{E}}$$

a napětí σ je na prutech konstantní, rovno $\sigma_1 = N_1/A_1$ a $\sigma_2 = N_2/A_2 = (N_1 - F)/A_2$. Nyní můžeme vypočítat doplňkovou energii vnitřních sil na prvním z prutů a její derivaci

$$\begin{aligned} \Pi_i^{*(1)} &= \int_{V_1} \int_0^{\sigma_1} \varepsilon_1(e) \, de \, dV_1 = A_1 l_1 \int_0^{\sigma_1} \frac{E - \sqrt{E^2 - 4\hat{E}e}}{2\hat{E}} \, de = A_1 l_1 \left[\frac{(E^2 - 4\hat{E}e)^{\frac{3}{2}}}{12\hat{E}^2} + \frac{\hat{E}e}{2E} \right]_0^{\sigma_1} \\ &= A_1 l_1 \left(\frac{(E^2 - 4\hat{E}N_1/A_1)^{\frac{3}{2}}}{12\hat{E}^2} + \frac{EN_1}{2\hat{E}A_1} - \frac{E^3}{12\hat{E}^2} \right) \\ \frac{\partial \Pi_i^{*(1)}}{\partial N_1} &= A_1 l_1 \left(\frac{-4 \cdot \frac{3}{2} \hat{E} \sqrt{E^2 - 4\hat{E}N_1/A_1}}{12A_1 \hat{E}^2} + \frac{E}{2\hat{E}A_1} \right) = \frac{l_1}{2} \left(\frac{E}{\hat{E}} - \sqrt{\left(\frac{E}{\hat{E}}\right)^2 - \frac{4N_1}{\hat{E}A_1}} \right) \end{aligned}$$

Stejným postupem lze dojít také k doplňkové energii na druhém prutu a její derivaci.

$$\begin{aligned} \Pi_i^{*(2)} &= \int_{V_2} \int_0^{\sigma_2} \varepsilon_2(e) \, de \, dV_2 = A_2 l_2 \left(\frac{(E^2 - 4\hat{E} \frac{N_1 - F}{A_2})^{\frac{3}{2}}}{12\hat{E}^2} + \frac{E(N_1 - F)}{2\hat{E}A_2} - \frac{E^3}{12\hat{E}^2} + \frac{EF}{2\hat{E}A_2} \right) \\ \frac{\partial \Pi_i^{*(2)}}{\partial N_1} &= A_2 l_2 \left(\frac{-4 \cdot \frac{3}{2} \hat{E} \sqrt{E^2 - 4\hat{E} \frac{N_1 - F}{A_2}}}{12A_2 \hat{E}^2} + \frac{E}{2\hat{E}A_2} \right) = \frac{l_2}{2} \left(\frac{E}{\hat{E}} - \sqrt{\left(\frac{E}{\hat{E}}\right)^2 - \frac{4(N_1 - F)}{\hat{E}A_2}} \right) \end{aligned}$$

Součet těchto derivací musí být nulový

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial N_1} &= \frac{\partial \Pi_i^{*(1)}}{\partial N_1} + \frac{\partial \Pi_i^{*(2)}}{\partial N_1} + \frac{\partial \Pi_e^*}{\partial N_1} = 0 \\ \frac{l_1}{2} \left(\frac{E}{\hat{E}} - \sqrt{\left(\frac{E}{\hat{E}}\right)^2 - \frac{4N_1}{\hat{E}A_1}} \right) &+ \frac{l_2}{2} \left(\frac{E}{\hat{E}} - \sqrt{\left(\frac{E}{\hat{E}}\right)^2 - \frac{4(N_1 - F)}{\hat{E}A_2}} \right) = 0 \\ 2.5 \cdot 10^{-3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{3} N_1 \cdot 10^{-7}} \right) &+ 5 \cdot 10^{-3} \left(1 - \sqrt{\frac{13}{5} - \frac{16}{3} N_1 \cdot 10^{-7}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dostáváme opět nelineární rovnici pro neznámou N_1 . Řešení již známe z předchozího příkladu: $N_1 = 2.2483$ MN. Zbývá dopočítat druhou sílu $N_2 = N_1 - F = 2.2483 - 3 = -0.7517$ MN. Kontrolu výsledků provedeme výpočtem posunu ve středovém uzlu na prvním i na druhém prutu

$$\begin{aligned} u(l_1)^- &= \varepsilon_1 l_1 = l_1 \frac{E - \sqrt{E^2 - 4\hat{E}N_1/A_1}}{2\hat{E}} = 0.918 \text{ mm} \\ u(l_1)^+ &= -\varepsilon_2 l_2 = -l_2 \frac{E - \sqrt{E^2 - 4\hat{E}N_2/A_2}}{2\hat{E}} = 0.918 \text{ mm} \end{aligned}$$

■

Pomocí minima doplňkové energie se odvodí silová metoda.

5 Energetické principy IV - rovinná konstrukce

Příklad 5.1 Vypočítejte deformační a silový stav konstrukce na obrázku 12 za předpokladu lineárního chování materiálu a lineárních aproximačních funkcí pro posuny. Uvažujte izotropní materiál s modulem pružnosti $E = 30 \text{ GPa}$ a Poissonovým součinitelem $\nu = 0.2$, úlohu počítejte jako rovinnou napjatost. Šířka stěny je $w = 3 \text{ m}$, její výška je $h = 2 \text{ m}$ a tloušťka $t = 0.5 \text{ m}$. Velikost zatěžovací síly je $F = 10 \text{ MN}$.

Řešení Definujme matice \mathbf{B} a \mathbf{H} závislé na poloze (x, y) , které poskytují vztah mezi posuny a neznámými parametry deformačního stavu a deformacemi a parametry podle rovnice (27). Vektor neznámých deformačních parametrů budeme značit $\hat{\mathbf{u}}$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (36)$$

Potenciální energii vnitřních sil lze pak vypočíst (rovnice (18))

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_S t \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dS = \frac{1}{2} \int_S t \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \, dS = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \underbrace{\left(t \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dS \right)}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}}$$

Poslední rovnost je možná díky tomu, že neznámé parametry deformačního stavu nezávisí na poloze (x, y) . Díky symetrii matice \mathbf{C} je symetrická i matice \mathbf{K} , nazývaná matice tuhosti.

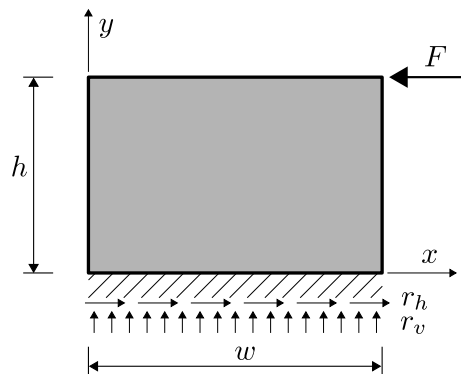
My ovšem potřebujeme vypočíst derivaci potenciální energie podle jednotlivých složek vektoru $\hat{\mathbf{u}}$. Označme i -tý parametr deformačního stavu \hat{u}_i . Derivace podle tohoto parametru pak vypadá následovně

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \hat{u}_i} = \frac{\partial \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{u}_i} = \left\{ K_{i1} \quad K_{i2} \quad \dots \quad K_{ii} \quad \dots \quad K_{iN} \right\} \left\{ \hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \quad \dots \quad \hat{u}_i \quad \dots \quad \hat{u}_N \right\}^T$$

Veškeré mimodiagonální členy jsou v součtu dvakrát, u diagonálního člene K_{ii} je zase dvojka kvůli derivaci kvadratického výrazu \hat{u}_i^2 .

Derivaci podle všech parametrů lze pak jednoduše zapsat jako

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}$$



Obrázek 12: Konstrukce z příkladu 5.1.

Práce vnějších sil je práce síly \mathbf{F} na posunu \mathbf{u} v bodě (3,2).

$$\Pi_e = -\mathbf{u}^T(3,2)\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{H}^T(3,2)\mathbf{F}$$

a její derivace podle jednotlivých parametrů deformačního stavu je následující

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = -\mathbf{H}^T(3,2)\mathbf{F}$$

Požadavek nulové derivace celkové potenciální energie nám pak poskytne rovnice vedoucí k nalezení neznámých parametrů deformačního stavu.

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \hat{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \left(t \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dS \right) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{H}^T(3,2)\mathbf{F}$$

což je ekvivalentní následujícímu lineárnímu systému

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H}^T(3,2)\mathbf{F} \quad (37)$$

Pokračujme nyní volbou aproximačních funkcí pro posuny

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (38)$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \quad (39)$$

Aby posuny $u(x, y)$ a $v(x, y)$ splňovaly kinematické okrajové podmínky (tj. vetknutí při spodním okraji), musí pro libovolné x platit

$$u(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1x = 0$$

$$v(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 + b_1x = 0$$

a tedy členy $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$. Zbývající parametry deformačního stavu sdružíme do vektoru

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ a_2 \quad a_3 \quad b_2 \quad b_3 \right\}^T$$

Všimněme si, že a_2 a b_2 jsou bezrozměrné, zatímco a_3 a b_3 mají jednotku m^{-1} . Derivace aproximačních funkcí jsou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_3y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2 + a_3x \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b_3y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b_2 + b_3x$$

a matice \mathbf{B} a \mathbf{H} jsou tak následující (podle rovnice (36))

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & xy \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

Síla \mathbf{F} a matice \mathbf{H} v bodě (3,2) jsou

$$\mathbf{H}(3,2) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{m} \\ \text{m}^2 \end{matrix} \quad \mathbf{F} = \left\{ \begin{matrix} -10 \cdot 10^6 \\ 0 \end{matrix} \right\} \text{N}$$

Derivace potenciální energie vnějších sil (záporně vzatá pravá strana rovnice (37)) je pak

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = -\mathbf{H}^T(3, 2)\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} -10 \cdot 10^6 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 20 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \cdot 10^6 \begin{array}{l} \text{Nm} \\ \text{Nm}^2 \end{array}$$

Matici tuhosti \mathbf{K} získáme vypočtením integrálu přes objem V z výrazu $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} &= \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 & y \end{bmatrix} \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ y & \nu y & \frac{1-\nu}{2}x \\ \nu & 1 & 0 \\ \nu x & x & \frac{1-\nu}{2}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 & y \end{bmatrix} \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2}x & 0 & \frac{1-\nu}{2}y \\ \frac{1-\nu}{2}x & y^2 + \frac{1-\nu}{2}x^2 & \nu y & \frac{1+\nu}{2}xy \\ 0 & \nu y & 1 & x \\ \frac{1-\nu}{2}y & \frac{1+\nu}{2}xy & x & x^2 + \frac{1-\nu}{2}y^2 \end{bmatrix} \\ &= 31.25 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4x & 0 & 0.4y \\ 0.4x & y^2 + 0.4x^2 & 0.2y & 0.6xy \\ 0 & 0.2y & 1 & x \\ 0.4y & 0.6xy & x & x^2 + 0.4y^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

K vyčíslení integrace si připravíme integrály dílčích polynomů

$$\begin{aligned} \int_S 1 \, dS &= wh = 3 \cdot 2 = 6 \, \text{m}^2 \\ \int_S x \, dS &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^w ht = \frac{1}{2} w^2 ht = 0.5 \cdot 3^2 \cdot 2 = 9 \, \text{m}^3 \\ \int_S y \, dS &= w \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h t = \frac{1}{2} wh^2 = 0.5 \cdot 3 \cdot 2^2 = 6 \, \text{m}^3 \\ \int_S x^2 \, dS &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^w ht = \frac{1}{3} w^3 h = \frac{1}{3} \cdot 3^3 \cdot 2 = 18 \, \text{m}^4 \\ \int_S y^2 \, dS &= w \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} wh^3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^3 = 8 \, \text{m}^4 \\ \int_S xy \, dS &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^w \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{1}{4} w^2 h^2 = 0.25 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 9 \, \text{m}^4 \end{aligned}$$

a dosadíme do integrace matice tuhosti

$$\mathbf{K} = t \int_S \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dS = 31.25 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1.2 & 1.8 & 0 & 1.2 \\ 1.8 & 7.6 & 0.6 & 2.7 \\ 0 & 0.6 & 3 & 4.5 \\ 1.2 & 2.7 & 4.5 & 10.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Nm} \\ \text{Nm}^2 \\ \text{Nm}^3 \end{matrix}$$

Princip minima potenciální energie (rovnice (37)) nám poskytne lineární systém čtyř rovnic pro čtyři neznámé parametry deformačního stavu s řešením

$$31.25 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1.2 & 1.8 & 0 & 1.2 \\ 1.8 & 7.6 & 0.6 & 2.7 \\ 0 & 0.6 & 3 & 4.5 \\ 1.2 & 2.7 & 4.5 & 10.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 20 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^6$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.736 \\ -2.008 \\ -3.221 \\ 2.415 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

Nyní lze dosadit do rovnic (38) a (39) a získat tak kompletní popis posunů v tělese

$$u(x, y) = -4.736 \cdot 10^{-4} y - 2.008 \cdot 10^{-4} xy$$

$$v(x, y) = -3.221 \cdot 10^{-4} y + 2.415 \cdot 10^{-4} xy$$

Pomocí matice \mathbf{B} získáme deformace

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & x & 0 & y \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -2.008y \\ -3.221 + 2.415x \\ -4.736 - 2.008x + 2.415y \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

a násobením zleva maticí elastických konstant získáme napětí v libovolném bodě

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = 31.25 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.008y \\ -3.221 + 2.415x \\ -4.736 - 2.008x + 2.415y \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} -2.013 + 1.509x - 6.275y \\ -10.06 + 7.547x - 1.255y \\ -5.920 - 2.510x + 3.018y \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Například posun bodu, kde je aplikována síla F , je

$$u(3, 2) = -4.736 \cdot 10^{-4} \cdot 2 - 2.008 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 2 = -2.152 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -2.152 \text{ mm}$$

$$v(3, 2) = -3.221 \cdot 10^{-4} \cdot 2 + 2.415 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 2 = 8.048 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0.805 \text{ mm}$$

Svislou a vodorovnou reakci ve vetknutí je možné vypočítat z napětí v poloze $y = 0$ podle rovnice (6), kde je normála $\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} r_h \\ r_v \end{Bmatrix} = t \mathbf{t}(y=0) = t \mathcal{N}^T \boldsymbol{\sigma}(y=0) = t \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.96 + 1.25x \\ 5.03 - 3.77x \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Celková vodorovná a svislá reakce je tak

$$\begin{Bmatrix} R_h \\ R_v \end{Bmatrix} = \int_0^w \begin{Bmatrix} r_h \\ r_v \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} 2.96w + 1.25\frac{w^2}{2} \\ 5.03w - 3.77\frac{w^2}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.53 \\ -1.89 \end{Bmatrix} \text{ MN}$$

Konstrukce zřejmě není v rovnováze, protože svislou reakci nevyrovnává žádné zatížení a vodorovná reakce není vyvážena zatížením -10 MN.

Přirozeně jsme použili velmi hrubou aproximační bázi pro posuny na konstrukci. Přidání dalších členů (kvadratických, kubických a pod.) by vylepšilo získané výsledky, ale také podstatně zkomplikovalo řešení. S každým dalším členem by se matice a vektory rozrůstaly o další řádek, případně sloupec a výrazy by byly čím dál složitější. Částečné zjednodušení přináší právě metoda konečných prvků, která bázi volí pouze pomocí jednoduchých funkcí, ovšem po částech. Například volbou 30·20 lineárních konečných prvků získáme posuny v místě zatěžování $u = -6.862$ mm a $v = 3.578$ mm, tedy naše výsledky očekávaně predikují tužší konstrukci, než získáme s bohatší bází pro posuny.

Podívejme se ještě na silnou formulaci, která, jak už víme, není splněna

$$t\boldsymbol{\partial}^T \boldsymbol{\sigma} + t\mathbf{f} = t\boldsymbol{\partial}^T (\mathbf{C}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}) = t \begin{Bmatrix} 1.509 + 0.3018 \\ -1.255 - 2.510 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 = t \begin{Bmatrix} 1.8108 \\ -3.765 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \neq \mathbf{0}$$

Zde bychom ovšem neuspěli ani s rovnicí (14) a správnými virtuálními posuny, jak jsme to provedli v příkladu 3.1. Splnili jsme totiž až rovnici (16), která využívá platnosti statických okrajových podmínek (rovnice (6)), což nalezené aproximační funkce nesplňují.

6 MKP v jedné dimenzi

Dosud jsme volili aproximaci pole posunů po celé doméně najednou. Nutnost splnění kinematických okrajových podmínek a komplikovaný tvar domény vedou v obecném případě k obtížím při volbě takovýchto funkcí. Proto se aproximace volí pouze po částech domény, na tzv. konečných prvcích. Toto je jediný, avšak zásadní, rozdíl mezi Galerkinovou metodou a MKP.

Nyní již nebudeme sestavovat potenciální energii konstrukce, jak jsme to dělali doposud, ale začneme přímo používat princip virtuálních prací, neboli slabou formulaci (rovnice (25)). Jak jste si mohli všimnout v předchozích příkladech, stejně jsme k ní po derivaci potenciální energie nakonec vždycky dospěli.

Příklad 6.1 Pomocí MKP najděte posuny a normálové síly v konstrukci na obrázku 13, uvažujte konstantní modul pružnosti E , průřezovou plochu A i zatížení q .

Řešení Konstrukci rozdělíme na n ekvidistantních intervalů délky l/n omezených body $x_0 = 0$, $x_i = il/n$, $x_n = l$. Posuny v těchto bodech budou tvořit naše neznámé parametry deformačního stavu u_0 až u_n , přičemž aproximace posunů na i -tém intervalu provedeme pomocí dvou lineárních funkcí

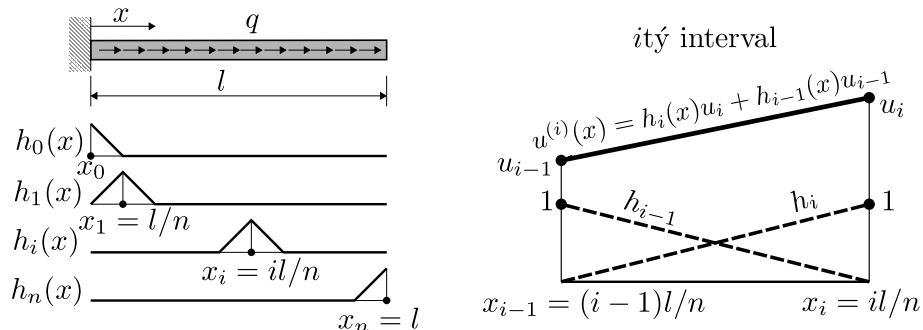
$$u(x)^{(i)} = h_{i-1}(x)u_{i-1} + h_i(x)u_i = \frac{n}{l}(x_i - x)u_{i-1} + \frac{n}{l}(x - x_{i-1})u_i$$

což lze zapsat pomocí matice (v 1D je to pouze vektor, ovšem zapsaný do řádku) \mathbf{H} jako

$$u(x)^{(i)} = \mathbf{H}^{(i)} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} = \underbrace{\frac{n}{l} \begin{Bmatrix} x_i - x & x - x_{i-1} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{H}^{(i)}} \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix}$$

Získáváme tedy konstantní deformace na daných intervalech, tzv. konečných prvcích

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{\partial u(x)^{(i)}}{\partial x} = \frac{n}{l}u_i - \frac{n}{l}u_{i-1} = \frac{n}{l}(u_i - u_{i-1})$$



Obrázek 13: Zadání příkladu 6.1 a uvažované aproximační funkce.

což lze zapsat pomocí matice \mathbf{B} (v 1D opět jen řádkový vektor)

$$\varepsilon^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} = \underbrace{\frac{n}{l} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{B}^{(i)}} \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{Bmatrix}$$

Předpokládáme lineární materiál, tedy $\sigma = E\varepsilon$. Dostáváme konstantní normálovou sílu

$$N^{(i)} = A\sigma^{(i)} = EA\varepsilon^{(i)} = \frac{EAn}{l}(u_i - u_{i-1})$$

Matice \mathbf{C} , zprostředkovávající lineární konstitutivní vztah, je v 1D pouze skalár, $\mathbf{C} = E$ a matici tuhosti na intervalu i vypočteme jako

$$\mathbf{K}^{(i)} = A \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{B}^{(i)T} \mathbf{C} \mathbf{B}^{(i)} dx = AE \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{n^2}{l^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} dx = \frac{EAn}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

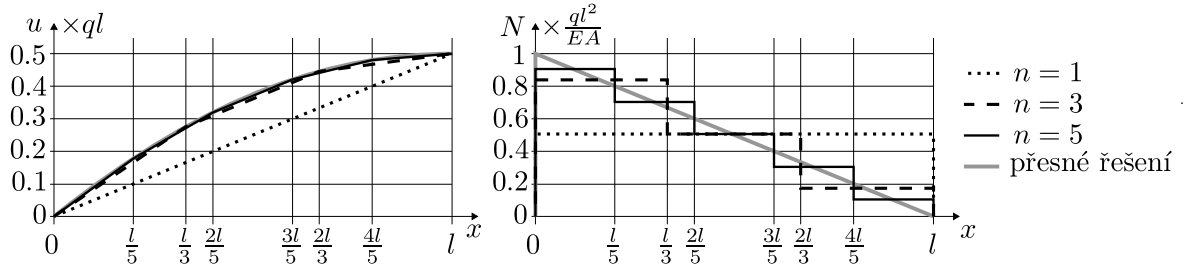
Objemové síly způsobené zatížením q (v 1D opět pouze skaláry) jsou $\mathbf{f} = f = q/A$ a síly na volném konci jsou nulové, $t(0) = 0$. Výpočet vektoru \mathbf{R} na intervalu i je pak následující

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(i)} &= A \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{H}^{(i)T} f dx = A \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{n}{l} \begin{Bmatrix} x_i - x \\ x - x_{i-1} \end{Bmatrix} \frac{q}{A} dx = \frac{qn}{l} \begin{bmatrix} xx_i - \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} - xx_{i-1} \end{bmatrix}_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &= \frac{qn}{l} \begin{Bmatrix} x_i^2 - \frac{x_i^2}{2} - x_{i-1}x_i + \frac{x_{i-1}^2}{2} \\ \frac{x_i^2}{2} - x_{i-1}x_i - \frac{x_{i-1}^2}{2} + x_{i-1}^2 \end{Bmatrix} = \frac{qn}{l} \begin{Bmatrix} \frac{i^2 l^2}{2n^2} - \frac{(i-1)il^2}{n^2} + \frac{(i-1)^2 l^2}{2n^2} \\ \frac{i^2 l^2}{2n^2} - \frac{(i-1)il^2}{n^2} + \frac{(i-1)^2 l^2}{2n^2} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{qn}{l} \begin{Bmatrix} \frac{l^2}{2n^2} \\ \frac{l^2}{2n^2} \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2n} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Celková matice tuhosti a celkový vektor pravé strany je pak

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^n \mathbf{K}^{(i)} \qquad \mathbf{R} = \sum_{i=0}^n \mathbf{R}^{(i)}$$

Toto sčítání je ovšem nutno provést uvážlivě podle souřadnic. Tomuto procesu se říká *lokalizace* a znáte ji například z deformační metody. Navíc je nutné zavést okrajové podmínky, jinak bude matice tuhosti singulární (závislé řádky a sloupce \Rightarrow nulový determinant \Rightarrow nedostatečné podepření, mechanismus). Jedinou kinematickou okrajovou podmínkou je zde nulový posun v nule, $u(0) = 0$, a tedy nulový parametr $u_0 = 0$.



Obrázek 14: Výsledky příkladu 6.1 pro různý počet konečných prvků.

Matici musíme tedy konstruovat ve tvaru $n \times n$ pro parametry u_1 až u_n .

$$\mathbf{K} = \frac{EAn}{l} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 1 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & 1 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{EAn}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stejně tak vektor \mathbf{R} sestavujeme lokalizací jednotlivých vektorů prvků se zohledněním kinematických okrajových podmínek

$$\mathbf{R} = \frac{ql}{2n} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{ql}{2n} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nyní musíme vyřešit systém lineárních rovnic pro n neznámých

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \Rightarrow \frac{EAn}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2n} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Po důkladnější úvaze není těžké najít řešení tohoto systému

$$u_i = \frac{ql^2}{2EA} \frac{2ni - i^2}{n^2}$$

i	1	i	1	2	3	i	1	2	3	4	5
x_i	l	x_i	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$	l	x_i	$\frac{l}{5}$	$\frac{2l}{5}$	$\frac{3l}{5}$	$\frac{4l}{5}$	l
u_i	$\frac{ql^2}{2EA}$	u_i	$\frac{5ql^2}{18EA}$	$\frac{4ql^2}{9EA}$	$\frac{ql^2}{2EA}$	u_i	$\frac{9ql^2}{50EA}$	$\frac{16ql^2}{50EA}$	$\frac{21ql^2}{50EA}$	$\frac{24ql^2}{50EA}$	$\frac{ql^2}{2EA}$
$N^{(i)}$	$\frac{ql}{2}$	$N^{(i)}$	$\frac{5ql}{6}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{6}$	$N^{(i)}$	$\frac{9ql}{10}$	$\frac{7ql}{10}$	$\frac{5ql}{10}$	$\frac{3ql}{10}$	$\frac{ql}{10}$

Tabulka 1: Poloha uzlů, posun v uzlu a normálová síla na prvcích při aproximaci jedním, třemi a pěti prvky.

a tedy

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{ql^2 n}{2EA l} \left(\frac{2ni - i^2}{n^2} - \frac{2n(i-1) - (i-1)^2}{n^2} \right) = \frac{ql}{2EA} \cdot \frac{2(n-i) + 1}{n}$$

a normálové síly v intervalech (konečných prvcích) jsou

$$N^{(i)} = EA \varepsilon^{(i)} = \frac{ql}{2} \frac{2(n-i) + 1}{n}$$

Výsledky jsou spočteny při uvažování jednoho, tří či pěti prvků v tabulce 1. Přesné řešení lze lehce spočítat Ritzovou metodou při použití polynomu druhého stupně (můžete si zkusit sami) nebo přímo řešením silné formulace. Konstrukce je totiž staticky určitá, a tak lze rovnici rovnováhy řešit odděleně od geometrické a fyzikální rovnice.

$$u(x) = -\frac{q}{2AE}x^2 + \frac{ql}{AE}x \quad N(x) = -qx + ql$$

Porovnání přesného řešení a MKP řešení je provedeno na Obr. 14. Přesné řešení posunů jsme nezískali. Nesplnili jsme statickou okrajovou podmínku v $x = l$, kde má být napětí na okraji nulové. Normála v $x = l$ je rovna $n(l) = +1$.

$$n(l)\sigma(l) = E\varepsilon^{(n)} = \frac{Aql}{2n} \neq 0$$

Není splněna ani silná formulace ve všech bodech

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} + A \frac{q}{A} = q \neq 0$$

Se zvyšujícím se počtem prvků však MKP konverguje k přesnému řešení. Překvapivě získáváme zcela přesné hodnoty posunů v uzlech. Obecně tato zvláštnost neplatí, pouze na osově namáhaných prutech ano. ■

Přesně stejnou matici tuhosti i vektor pravé strany bychom získali při použití derivace potenciální energie. Jedná se o zcela totožné principy a zcela totožný zápis, pouze jinou interpretaci.

Matice tuhosti má typicky následující vlastnosti:

- je symetrická, jednotlivé prvky jsou totiž dvojné parciální derivace potenciální energie

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_j \partial u_i} = \mathbf{K}_{ji} \quad (40)$$

kde podle Schwarzovy věty nezáleží na pořadí derivací.

- pozitivně definitní, tedy pro každý nenulový vektor $\hat{\mathbf{u}}$ platí

$$\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} > 0 \quad (41)$$

Jelikož je $\hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}}$ rovno dvojnásobku potenciální energie vnitřních sil, znamená to tedy, že konstrukce vzdoruje snahám o deformaci. Pokud by existoval vektor, pro který bychom získali záporné číslo, pak by se konstrukce sama aktivně snažila deformovat podle tohoto vektoru parametrů deformačního stavu.

- řídká, tedy obsahuje spoustu nul díky omezeným oblastem aproximačních funkcí h . Je vhodné funkce rozumně očíslovat, aby matice byla pásová.
- pokud je konstrukce vhodně podepřená, tak je matice \mathbf{K} regulární.

7 Stěnová konstrukce I

Příklad 7.1 *Odvodte matici tuhosti pro obecný trojúhelníkový prvek při uvažování lineárních aproximací posunů bez smíšených členů xy a rovinné napjatosti. Jako neznámé parametry deformačního stavu volte posuny uzlů prvku ve vrcholech trojúhelníka. Číselně ji vypočtěte pro trojúhelník na obrázku 15 vpravo pro $E = 30 \text{ GPa}$ a $\nu = 0.2$ a tloušťku $t = 0.1 \text{ m}$. (příklad převzat od Romana Gratzy)*

Řešení Uvažujme lineární aproximace bez smíšených členů

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y \end{aligned}$$

V uzlových bodech na souřadnicích x_i a y_i získáváme posuny

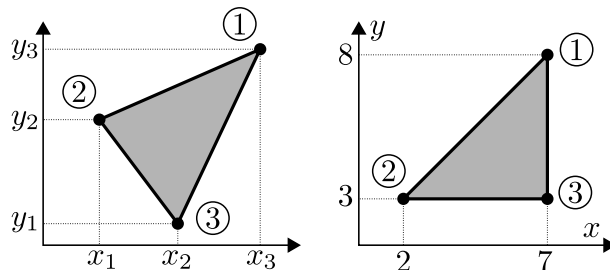
$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$

Podle zadání však potřebujeme parametry lineární funkce vyjádřit pomocí uzlových deformací. To je velmi výhodné, protože pak snadno zajistíme spojitost tvarových funkcí na hranicích prvků a také kinematické okrajové podmínky. Pro řízení tvarových funkcí posuny potřebujeme vypočítat inverzi matice \mathbf{A} .

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{u}}$$

Postačí spočítat inverzi menší submatice

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$



Obrázek 15: Trojúhelníkový konečný prvek v obecném tvaru (vlevo) a jeho geometrie pro příklad 7.1 (vpravo).

kde S je orientovaná plocha trojúhelníka

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \det \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right) - 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right) + 1 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} (x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)
\end{aligned}$$

Celková invertovaná matice A je

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Pole posunů je tedy aproximováno pomocí uzlových deformací takto

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}$$

My ovšem potřebujeme pole deformací, které získáme z derivací posunů

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}} \\
&= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}} \\
&= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}
\end{aligned}$$

a deformace jsou tak na celém prvku konstantní

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}$$

kde

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

Elastická matice pro rovinnou napjatost je podle (4)

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti je pak díky konstantnosti matic \mathbf{C} i \mathbf{B}

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \int_V 1 \, dV = St \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$$

kde t je tloušťka konstrukce. Pro trojúhelník na obrázku 15 vpravo platí

$$S = \frac{1}{2} (2 \cdot 3 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 3 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 3 - 2 \cdot 8) = \frac{25}{2} \text{ m}^2$$

Po dosazení získáváme následující matice

$$\mathbf{B} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^{-1}$$

$$\mathbf{C} = \frac{30 \cdot 10^9}{1-0.2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0.2}{2} \end{bmatrix} = 31.25 \cdot 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

Nejprve vynásobíme $\mathbf{C} \mathbf{B}$

$$\mathbf{C} \mathbf{B} = \frac{31.25 \cdot 10^9}{5} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ Pa/m}$$

a nakonec získáváme celou matici tuhosti

$$\mathbf{K} = St \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -1 & 1.4 & 0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.6 & -1 & 0.4 & 1.4 \end{bmatrix} \text{ Pa} \cdot \text{m} \quad (\text{N/m})$$

■

8 Stěnová konstrukce II

Příklad 8.1 Vypočítejte napětí v konstrukci na obrázku 16 zatížené na povrchu spojitým zatížením $q = 100 \text{ kN/m}$. Uvažujte rovinnou napjatost, modul pružnosti 30 GPa , Poissonovo číslo 0.2 a tloušťku 0.1 m . Respektujte naznačené dělení na konečné prvky, uvažujte na každém prvku lineární aproximace posunutí bez smíšeného členu xy (stejně jako v příkladu 7.1). (příklad převzat od Romana Gratzy)

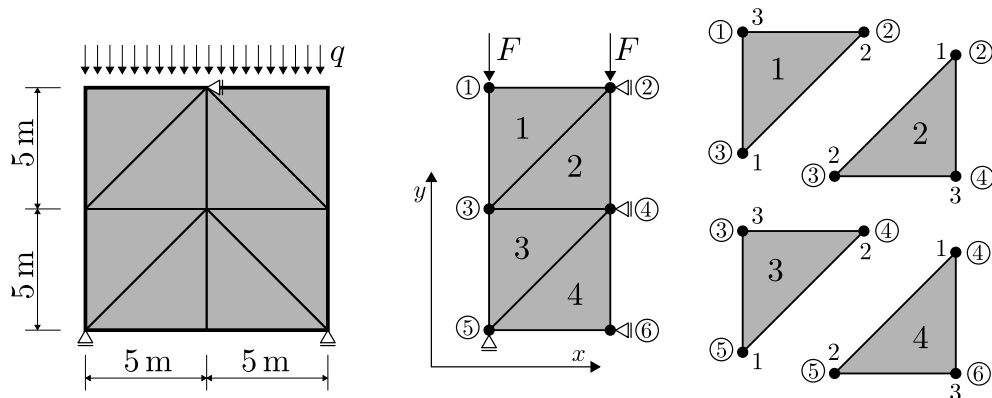
Řešení Konstrukce je symetrická podle svislé osy, stačí tedy řešit její symetrickou polovinu se zabráněním vodorovným posunům na ose symetrie, Obr. 16. Tedy uzly 2, 4 a 6 jsou podepřeny ve vodorovném směru a uzel 5 ve svislém. Z těchto kinematických okrajových podmínek plyne

$$u_2 = u_4 = u_6 = v_5 = 0$$

a neznáme uzlové posuny jsou

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

Matice tuhosti získáme sečtením matic ze čtyř prvků. Pro prvky 2 a 3 jsme ji již vypočetli v příkladu 7.1. Je stejná, protože matice \mathbf{B} obsahuje pouze rozdíly souřadnic a nezáleží tedy na posunu prvku jako celku. Při rotaci o π získají souřadnicové rozdíly v \mathbf{B} opačné znaménko, ovšem při součinu $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ se tento rozdíl smaže. Matice tuhosti



Obrázek 16: Stěnová konstrukce, její symetrická polovina a dělení na konečné prvky.

prvků 1 a 3 je tedy také shodná a příkladem 7.1. Při sčítání matic prvků, tzv. lokalizaci, je potřeba sčítat podle souřadnic (někdy se používají kódová čísla).

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} & u_3 & u_2 & u_1 & v_3 & v_2 & v_1 & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -1 & 1.4 & 0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.6 & -1 & 0.4 & 1.4 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{array} \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} & u_2 & u_3 & u_4 & v_2 & v_3 & v_4 & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -1 & 1.4 & 0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.6 & -1 & 0.4 & 1.4 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} & u_5 & u_4 & u_3 & v_5 & v_4 & v_3 & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -1 & 1.4 & 0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.6 & -1 & 0.4 & 1.4 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_5 \\ u_4 \\ u_3 \\ v_5 \\ v_4 \\ v_3 \end{array} \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} & u_4 & u_5 & u_6 & v_4 & v_5 & v_6 & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.4 & 0 & -0.4 & 0 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & -1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.4 & -1 & 1.4 & 0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.4 & 0.2 & -0.6 & -1 & 0.4 & 1.4 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

$$\mathbf{K} = \frac{31.25 \cdot 10^8}{2} \begin{bmatrix} & u_1 & v_1 & v_2 & u_3 & v_3 & v_4 & u_5 & v_6 & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1.4 & -0.6 & 0.4 & -0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 1.4 & -0.4 & 0.4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & 1.4 & -0.6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & -0.6 & 2.8 & -0.6 & 0.6 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0.2 & -1 & 0 & -0.6 & 2.8 & -0.8 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6 & -0.8 & 2.8 & -0.6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & -0.6 & 1.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.2 & 1.4 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_6 \end{array} \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Vektor zatížení získáme integrací $\mathbf{H}^T(x, y)\mathbf{t}(x, y)$ po hranách jednotlivých prvků na okraji tělesa a součtem na odpovídajících pozicích. V tomto případě je ovšem evidentní, že pouze první z prvků bude mít na svém horním okraji tento integrál nenulový. Povrchová síla je tam konstantní

$$\mathbf{t} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000 \end{Bmatrix} \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

Matici \mathbf{H} převezmeme z předchozího příkladu 7.1.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}$$

Potřebujeme ji pouze pro souřadnici $y = 10 \text{ m}$ a prvek má souřadnice uzlů $x_{1l} = 0 \text{ m}$, $x_{2l} = 5 \text{ m}$, $x_{3l} = 0 \text{ m}$, $y_{1l} = 5 \text{ m}$, $y_{2l} = 10 \text{ m}$, $y_{3l} = 10 \text{ m}$, které dosazujeme do \mathbf{A}^{-1} . Upozorňujeme, že tyto indexy neodkazují ke globálnímu číslování uzlů (čísla v kroužcích na Obr. 16), ale k lokálnímu očíslování každého z prvků (čísla bez kroužků na Obr. 16). Dosazením do (42) a do předchozího vztahu získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)}(y = 10) &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & x & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 & -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{x}{5} & 1 - \frac{x}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{5} & 1 - \frac{x}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nyní můžeme integrovat

$$\mathbf{R}^{(1)} = t \int_0^5 \mathbf{H}^{(1)T} \mathbf{t} dx = t \left(\int_0^5 \mathbf{H}^{(1)T} dx \right) \mathbf{t} = 0.1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -10^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ -250 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{matrix} \cdot 10^3 \text{ N}$$

Protože $\mathbf{R}^{(2)}$, $\mathbf{R}^{(3)}$ i $\mathbf{R}^{(4)}$ jsou nulové, získáváme celkový vektor pravé strany ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -250 \\ -250 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_6 \end{matrix} \cdot 10^3 \text{ N}$$

Odpovídá to v podstatě zatížení horních uzlů silou $F = -250$ kN ve směru y .

Nyní potřebujeme vyřešit systém 8 lineárních rovnic s 8 neznámými: $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}$, vyjadřující podmínky minima potenciální energie či nulové virtuální práce. Řešením je tento vektor

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -0.208 \\ -4.180 \\ -4.681 \\ -0.335 \\ -2.389 \\ -3.164 \\ -0.456 \\ -2.195 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_6 \end{matrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Rozepsaný na jednotlivé prvky vypadá následovně

$$\hat{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.335 \\ 0 \\ -0.208 \\ -2.389 \\ -4.681 \\ -4.180 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_1 \end{matrix} \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \hat{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.335 \\ 0 \\ -4.681 \\ -2.389 \\ -3.164 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

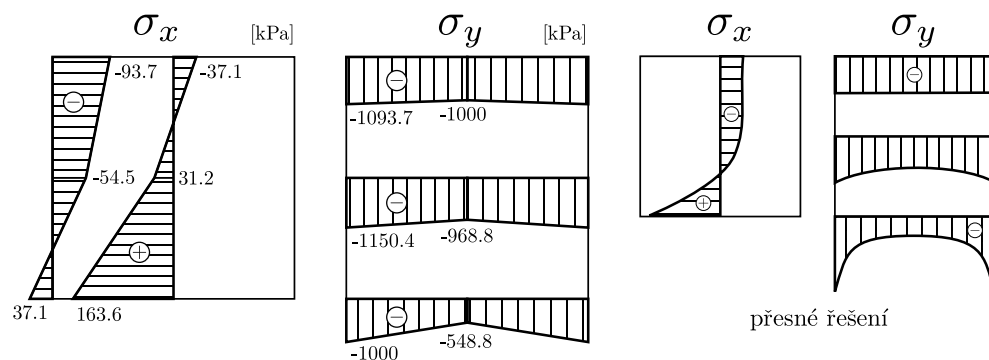
$$\hat{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.456 \\ 0 \\ -0.335 \\ 0 \\ -3.164 \\ -2.389 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_5 \\ u_4 \\ u_3 \\ v_5 \\ v_4 \\ v_3 \end{matrix} \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \hat{\mathbf{u}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.456 \\ 0 \\ -3.164 \\ 0 \\ -2.195 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

V prvcích je konstantní deformace díky lineární aproximaci posunů. Získáme ji násobením maticí \mathbf{B} zleva. Dalším násobením maticí \mathbf{C} zleva získáme konstantní napětí. Součin \mathbf{CB} jsme vypočetli již v příkladu 7.1. U prvků pootočených o π je tento součin shodný, pouze s opačným znaménkem.

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{CB}^{(1)}\hat{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -93.69 \\ -1093.69 \\ -93.69 \end{pmatrix} \text{ kPa}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{pmatrix} 19.52 \\ -906.31 \\ -193.88 \end{pmatrix} \text{ kPa} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \begin{pmatrix} -89.46 \\ -1451.20 \\ -163.63 \end{pmatrix} \text{ kPa} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(4)} = \begin{pmatrix} 163.63 \\ -548.80 \\ -548.80 \end{pmatrix} \text{ kPa}$$

Uvnitř prvku je sice silná formulace splněna, ale na hranicích mezi prvky máme nerovnováhu. Nesplnili jsme také přesně statické okrajové podmínky. Oboje je způsobeno nedostatečným aproximačním polynomem. Kvůli nerovnováze na hranicích prvku dostáváme při vykreslování napětí nespojitost. Často se kvůli tomu napětí průměrují



Obrázek 17: Výsledná napjatost a teoretické přesné řešení napjatosti.

v uzlech ze všech prvků, kterým je uzel společný, a tyto hodnoty se interpolují podle aproximačních polynomů uvnitř prvků. To je provedeno v následujících rovnicích a vykresleno na Obr. 17.

$$\begin{aligned}
 \sigma^{①} = \sigma^{(1)} &= \begin{Bmatrix} -93.7 \\ -1093.7 \\ -93.7 \end{Bmatrix} \text{ kPa} & \sigma^{④} &= \frac{1}{3} \sum_{i=2}^4 \sigma^{(i)} = \begin{Bmatrix} 31.2 \\ -968.8 \\ -302.1 \end{Bmatrix} \text{ kPa} \\
 \sigma^{②} = \frac{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}}{2} &= \begin{Bmatrix} -37.1 \\ -1000.0 \\ -143.8 \end{Bmatrix} \text{ kPa} & \sigma^{⑤} &= \frac{\sigma^{(3)} + \sigma^{(4)}}{2} = \begin{Bmatrix} 37.1 \\ -1000.0 \\ -356.2 \end{Bmatrix} \text{ kPa} \\
 \sigma^{③} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma^{(i)} &= \begin{Bmatrix} -54.5 \\ -1150.4 \\ -150.4 \end{Bmatrix} \text{ kPa} & \sigma^{⑥} = \sigma^{(4)} &= \begin{Bmatrix} 163.6 \\ -548.8 \\ -548.8 \end{Bmatrix} \text{ kPa}
 \end{aligned}$$

■

9 Numerická integrace

Mějme funkci, $F(r)$, která závisí na jediném parametru r . Cílem je odhadnout integrál z této funkce na intervalu od -1 do 1 pomocí součtu hodnot této funkce F_{r_i} v bodech r_i s váhami α_i .

$$\int_{-1}^1 F(r) dr \approx \sum_i \alpha_i F(r_i) \quad (43)$$

Jednou z možností je použití Newton-Cotesových formulí, které uvažují $n + 1$ integračních bodů ekvidistantně rozmístěných přes n intervalů a $r_0 = -1$ a $r_n = 1$. Váhy odvodíme z požadavku, aby polynomy stupně n (tedy obsahující členy s mocninou max. x^n) byly integrovány přesně.

Příklad 9.1 Najděte váhy integračních bodů u Newton-Cotesových formulí pro $n = 2$, tedy pro tři integrační body.

Řešení Uvažujeme polynom druhého stupně ve tvaru $F(r) = ar^2 + br + c$. Přesná hodnota integrálu je

$$I = \int_{-1}^1 F(r) dr = \int_{-1}^1 (ar^2 + br + c) dr = \left[\frac{a}{3}r^3 + \frac{b}{2}r^2 + cr \right]_{-1}^1 = \frac{2a}{3} + 2c$$

Pomocí tří bodů a vah požadujeme dosažení stejného výsledku

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i F(r_i) = I$$

Ekvidistantní body jsou $r_0 = -1$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Po dosazení a úpravě dostaneme

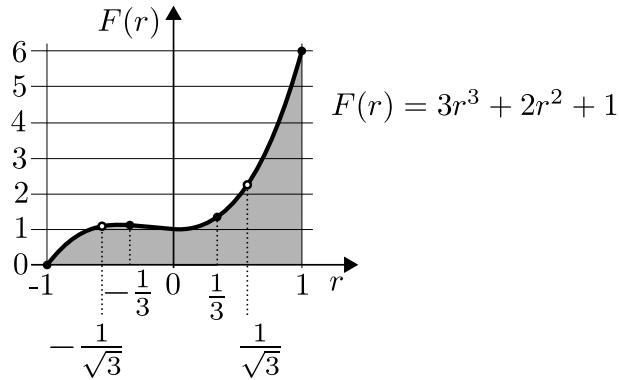
$$I = a(\alpha_0 + \alpha_2) + b(-\alpha_0 + \alpha_2) + c(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$$

Za předpokladu, že a , b i c může nabývat libovolných hodnot požadujeme rovnost pro každou ze složek

$$\begin{aligned} a : & \quad \alpha_0 + \alpha_2 = \frac{2}{3} \\ b : & \quad -\alpha_0 + \alpha_2 = 0 \\ c : & \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{aligned}$$

Získáváme tedy soustavu tří rovnic s třemi neznámými, kterou musíme vyřešit. Dostáváme $\alpha_0 = \alpha_2 = 1/3$ a $\alpha_1 = 4/3$. ■

Integrace s počtem intervalů $n = 2$ (a tedy třemi body) se nazývá Simpsonovo pravidlo, při $n = 1$ (dva integrační body) pak lichoběžníkové pravidlo. U sudého počtu intervalů (sudé n) dosahuje integrace přesného řešení dokonce pro polynomy stupně $n + 1$, v praxi se tedy používá pouze sudý počet intervalů.



Obrázek 18: Integrace v 1D.

Příklad 9.2 Vypočtete analyticky a pomocí Newton-Cotesovy integrace pro dva, tři a čtyři body ($n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$) integrál funkce $F(r) = 3r^3 + 2r^2 + 1$ v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení analyticky

$$I = \int_{-1}^1 F(r) \, dr = \left[\frac{3}{4}r^4 + \frac{2}{3}r^3 + 1r \right]_{-1}^1 = \frac{10}{3}$$

2 integrační body: polohy bodů jsou krajní hodnoty intervalu, váhy jsou 1

$$\sum_{i=0}^1 \alpha_i F(r_i) = 1 \cdot F(-1) + 1 \cdot F(1) = 6$$

Přesné řešení nevyšlo, protože Newton-Cotesova integrace pomocí dvou bodů integruje přesně pouze polynomy nultého a prvního stupně.

3 integrační body: použijeme řešení z předchozího příkladu a máme

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i F(r_i) = \frac{1}{3}F(-1) + \frac{4}{3}F(0) + \frac{1}{3}F(1) = \frac{10}{3}$$

Pro čtyři integrační body jsou váhy $\alpha_0 = \alpha_3 = 1/4$ a $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/4$

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i F(r_i) = \frac{1}{4}F(-1) + \frac{3}{4}F\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}F\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}F(1) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \frac{10}{9} + \frac{3}{4} \frac{12}{9} + \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{10}{3}$$

Řešení příkladu je naznačeno na obrázku 18. ■

Podobně funguje i Gaussova integrace. Krajní integrační body však neleží v krajních polohách intervalu a poloha bodů není ekvidistantní. Z požadavku přesné integrace polynomů stupně $2n - 1$ pomocí n bodů odvodíme váhy i polohu integračních bodů.

Protože Gaussova integrace používá pouze n bodů (oproti $n + 1$ u Newton-Cotesovy integrace), proměnná i již nebude probíhat od 0 do n ale pouze od 1 do n .

Příklad 9.3 Najděte polohy r_i dvou integračních bodů a jejich váhy α_i pro Gaussovou integraci polynomů až třetího stupně v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení Uvažujme polynom ve tvaru $F(r) = ar^3 + br^2 + cr + d$. Přesná hodnota integrálu je

$$I = \int_{-1}^1 F(r) dr = \int_{-1}^1 ar^3 + br^2 + cr + d dr = \left[\frac{a}{4}r^4 + \frac{b}{3}r^3 + \frac{c}{2}r^2 + dr \right]_{-1}^1 = \frac{2b}{3} + 2d$$

Pomocí dvou bodů a vah požadujeme dosažení stejného výsledku

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i F(r_i) = I$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$a(\alpha_1 r_1^3 + \alpha_2 r_2^3) + b(\alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2) + c(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) + d(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{2b}{3} + 2d$$

Za předpokladu, že a , b , c i d může nabývat libovolných hodnot požadujeme rovnost pro každou ze složek

$$\begin{aligned} a : & \quad \alpha_1 r_1^3 + \alpha_2 r_2^3 = 0 \\ b : & \quad \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 = \frac{2}{3} \\ c : & \quad \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 0 \\ d : & \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \end{aligned}$$

Získáváme tedy soustavu čtyř nelineárních rovnic se čtyřmi neznámými, kterou musíme vyřešit. Uvědomíme si, že příklad musí mít symetrické řešení, tedy $\alpha_1 = \alpha_2$ a $r_1 = -r_2$, a pak lehce dostáváme $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ a $r_1 = -r_2 = 1/\sqrt{3}$. ■

Podobným způsobem je možné odvodit polohy a váhy bodů pro integrační formule vyššího řádu. Tabulka 1 představuje řešení až pro 5 integračních bodů.

Příklad 9.4 Vypočítejte analyticky a pomocí Gaussovy integrace pomocí dvou a tří bodů integrál funkce $F(r) = 3r^3 + 2r^2 + 1$ v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, stejný jako v příkladu 9.2.

Řešení analyticky

$$I = \int_{-1}^1 F(r) dr = \left[\frac{3}{4}r^4 + \frac{2}{3}r^3 + 1r \right]_{-1}^1 = \frac{10}{3}$$

2 integrační body

$$I = \sum_{i=1}^2 \alpha_i F(r_i) = 1 \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5 + \sqrt{3}}{3} + \frac{5 - \sqrt{3}}{3} = \frac{10}{3}$$

3 integrační body

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i F(r_i) = \frac{5}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} F(0) + \frac{5}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\
 &= \frac{5}{9} \frac{11\sqrt{5} + 9\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} \frac{11\sqrt{5} - 9\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$



Gaussova integrace integruje přesně polynomy do stupně $2n - 1$, u ostatních funkcí povede k chybě. Pokud je funkce dostatečně hladká, bude se se zvětšujícím n chyba blížit nule.

Příklad 9.5 Vypočtěte analyticky a pomocí Gaussovy integrace pomocí dvou a tří bodů integrál funkce $F(r) = \cos(r)$ v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení analyticky

$$I = \int_{-1}^1 F(r) dr = [\sin(r)]_{-1}^1 = 2 \sin(1) = 1.6829$$

2 integrační body

$$I = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \cos(r_i) = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.6758$$

n	r_i	α_i
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$

Tabulka 2: Polohy a váhy Gaussových bodů pro numerickou integraci v 1D.

3 integrační body

$$I = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \cos(r_i) = \frac{5}{9} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cos(0) + \frac{5}{9} \cos\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 1.6830$$

■

Pokud je oblast integrace jiná než interval od -1 do 1, je nutné polohu i váhu integračních bodů upravit. Na intervalu od r_a do r_b jsou váhy a polohy upraveny takto

$$\alpha_i = \frac{r_b - r_a}{2} \bar{\alpha}_i \quad (44a)$$

$$r_i = r_a + \frac{r_b - r_a}{2} (\bar{r}_i + 1) \quad (44b)$$

kde $\bar{\alpha}_i$ a \bar{r}_i jsou váhy a polohy pro interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Příklad 9.6 Vypočtěte analyticky a pomocí Gaussovy integrace integrál funkce $F(r) = 6r^5 + 4r^3$ v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

Řešení analyticky

$$I = \int_{-1}^2 F(r) dr = \left[r^6 + r^4 \right]_{-1}^2 = 78$$

Pro přesnou integraci polynomu 5 stupně postačí 3 integrační body s váhami a polohami podle (44)

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{3}{2} \bar{\alpha}_i &\Rightarrow \frac{5}{6}, \frac{8}{6}, \frac{5}{6} \\ r_i = -1 + \frac{3}{2} (\bar{r}_i + 1) &\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = -0.6619, 0.5, 1.6619 \end{aligned}$$

Nyní můžeme integrovat

$$I = \sum_{i=1}^3 \alpha_i F(r_i) = \frac{5}{6} F\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{6} F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} F\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right) = 78$$

■

Při integraci přes dvourozměrnou obdélníkovou či třírozměrnou oblast tvaru kvádrů (nebo více dimenzí ve tvaru hyperkvádrů) použijeme stejný postup pro každou z dimenzí.

$$\int_{s_a}^{s_b} \int_{r_a}^{r_b} F(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \quad (45a)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \int_{s_a}^{s_b} \int_{r_a}^{r_b} F(r, s, t) dr ds dt = \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, s_j, t_k) \quad (45b)$$

Příklad 9.7 Vypočítejte analyticky a pomocí Gaussovy integrace integrál funkce $F(r, s) = 3r^2 + s^2 + rs + 2s$ v oblasti $r \in \langle -1, 1 \rangle$ a $s \in \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení analyticky

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{-1}^1 F(r, s) \, dr \, ds = \int_0^1 \left[r^3 + rs^2 + \frac{1}{2}r^2s + 2rs \right]_{-1}^1 \, ds \\ &= \int_0^1 (2s^2 + 4s + 2) \, ds = \left[\frac{2}{3}s^3 + 2s^2 + 2s \right]_0^1 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Polynom je v r i s kvadratický. Pro přesnou integraci tedy použijeme dva integrační body pro oba směry. Ve směru s je ale nejprve nutné spočítat upravené váhy a polohy podle (44).

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{2}\bar{\alpha}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ s_j &= \frac{1}{2}(\bar{s}_j + 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 0.2113, 0.7887 \end{aligned}$$

Nyní můžeme integrovat

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) = 1 \cdot \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) \\ &\quad + 1 \cdot \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

■

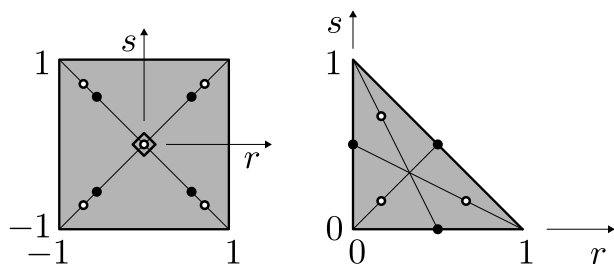
Pro oblasti jiného tvaru než je hyperkvádr (obdélník, kvádr, ...) je nutné odvodit jiné polohy a váhy. Zde uvažujeme trojúhelníkovou integrační oblast, protože konečné prvky v rovině jsou často uvažovány trojúhelníkového tvaru. Zrovna pro trojúhelníky existuje nekonečně mnoho řešení pro tři integrační body integrující přesně polynomy 2. stupně. Uvedme dvě nejčastěji používané. Zobrazeny jsou na Obr. 19 vpravo, je úplně jedno, kterou sadu si vybereme.

$$(r_i, s_i, \alpha_i) = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right) \\ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) \end{cases} \quad (46)$$

Příklad 9.8 Vypočítejte analyticky a pomocí Gaussovy integrace integrál funkce $F(r, s) = r^2 + 2s$ v oblasti $r \in \langle 0, 1 \rangle$ a $s \in \langle 0, 1-r \rangle$.

Řešení analyticky

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-r} F(r, s) \, ds \, dr = \int_0^1 \left[r^2s + s^2 \right]_0^{1-r} \, dr = \int_0^1 (-r^3 + 2r^2 - 2r + 1) \, dr \\ &= \left[-\frac{r^4}{4} + \frac{2r^3}{3} - r^2 + r \right]_0^1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$



Obrázek 19: Integrační body ve 2D: čtverec – jeden (\diamond), čtyři (\bullet) a pět (\circ) integračních bodů; trojúhelník – dvě varianty (\bullet a \circ) pro tři integrační body.

Pro přesnou integraci postačí tři integrační body podle (46). Vyzkoušejme obě varianty.

$$I = \sum_{i=1}^3 \alpha_i F(r_i, s_i) = \frac{1}{6} F\left(0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} F\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{6} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

■

10 Izoparametrické prvky I

Prozatím jsme sestavovali aproximační funkce na prvku s předem zadanou geometrií. Např. v příkladu 7.1 to bylo provedeno pro trojúhelníkový lineární prvek pomocí inverze matice \mathbf{A} . Je však velmi výhodné mít obecný předpis pro jakoukoliv geometrii, který automaticky zajistí spojitost tvarových funkcí mezi prvky. Jednoduše tak získáme velkou volnost při sestavování sítě konečných prvků. Tvarové funkce budeme sestavovat na prvku v základním tvaru, v lokální souřadnicové soustavě s osami r a s . Geometrii prvku i jeho tvarové funkce pak budeme mapovat do globálního souřadnicového systému s osami x a y (Obr. 20). Lokální systém je systém vlastní prvku v nějaké ideální konfiguraci, zatímco globální systém je vlastní konstrukci, na kterou je prvek aplikován. Souřadnice jakéhokoliv bodu uvnitř prvku lze tedy zapsat dvěma způsoby, mezi nimiž je následující vztah.

$$x = \sum_{i=1}^{q(x)} h_i^{(x)}(r, s)x_i \quad y = \sum_{i=1}^{q(x)} h_i^{(x)}(r, s)y_i \quad (47)$$

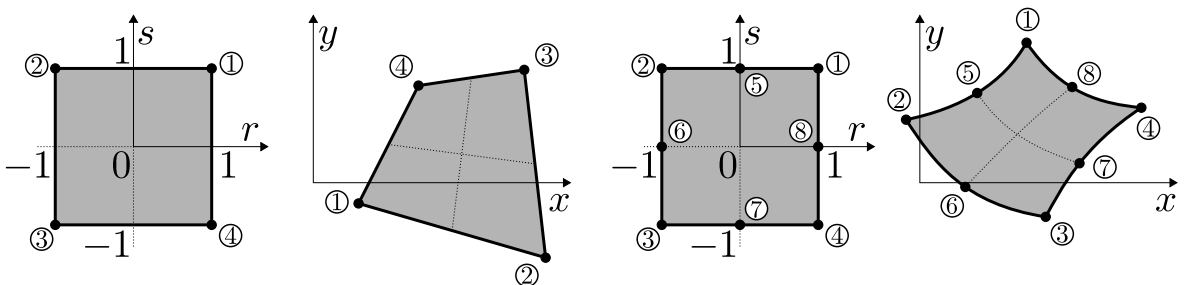
Funkce $h_i^{(x)}$ interpolují geometrii prvku, x_i a y_i jsou geometrické parametry prvku (většinou souřadnice uzlů prvku v globální souřadnicové soustavě). Pro známé r a s dosadíme a získáme x a y . Opačný, inverzní proces, kdy známe x a y a chceme znát odpovídající r a s , může být poměrně složitý, vedoucí na řešení soustavy nelineárních rovnic.

Stejně jako geometrii budeme sestavovat i aproximační funkce pro posuny uvnitř prvku.

$$u = \sum_{i=1}^{q(u)} h_i^{(u)}(r, s)u_i \quad v = \sum_{i=1}^{q(u)} h_i^{(u)}(r, s)v_i \quad (48)$$

Obecně mohou být funkce $h^{(x)}$ a $h^{(u)}$ v rovnicích (47) a (48) rozdílné a může jich být jiný počet (pak budou mít i jiný počet parametrů), $q^{(x)} \neq q^{(u)}$. Pokud je $q^{(x)} > q^{(u)}$, prvek se nazývá superparametrický, v opačném případě kdy $q^{(x)} < q^{(u)}$ subparametrický a konečně při rovnosti $q^{(x)} = q^{(u)}$ izoparametrický. Většinou se pak uvažují funkce $h^{(x)}$ a $h^{(u)}$ totožné. Pro izoparametrické prvky tedy platí

$$q^{(u)} = q^{(x)} = q \quad h_i^{(u)} = h_i^{(x)} = h_i$$



Obrázek 20: Mapování geometrie z lokálního souřadnicového systému rs do globálního xy pro čtyřuzlový a osmiuzlový obdélníkový prvek.

Funkce $h_i(r, s)$ se nazývají tvarové funkce a platí pro ně

- $h_i(r_j, s_j) = \delta_{ij}$ (= Kroneckerovo delta), tvarová funkce i je rovna 1 v uzlu i a 0 ve všech ostatních uzlech
- jsou spojité a dostatečně hladké (z množiny C^0)
- splňují „rozklad jedničky“ (anglicky *partition-of-unity*): $\sum_{i=1}^q h_i(r, s) = 1$ pro jakékoliv r a s . Rozklad jedničky je požadován proto, aby prvek dokázal přesně vystihnout konstantní posun, tedy posun jako tuhé těleso.

Příklad 10.1 *Odvodte a nakreslete všechny tvarové funkce na lineárním 1D konečném prvku spojujícím uzly na souřadnicích -1 a 1. Totéž proveďte pro kvadratický prvek s uzly na souřadnicích -1, 0 a 1. Zkontrolujte platnost „rozkladu jedničky“.*

Řešení Pro dva uzly budou existovat dvě tvarové funkce h_1 a h_2 , vždy s hodnotou 1 v jednom uzlu a s hodnotou 0 v druhém.

$$\begin{array}{ll} h_1(-1) = 0 & h_1(1) = 1 \\ h_2(-1) = 1 & h_2(1) = 0 \end{array}$$

Tyto hodnoty definují lineární funkce ve tvaru $ar+b$. Vyžadujeme-li splnění předchozích podmínek, dostáváme

$$\begin{array}{ll} h_1(-1) = -a_1 + b_1 = 0 & h_1(1) = a_1 + b_1 = 1 \\ h_2(-1) = -a_2 + b_2 = 1 & h_2(1) = a_2 + b_2 = 0 \end{array}$$

Řešením jsou koeficienty $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1/2$, $a_2 = -1/2$ a $b_2 = 1/2$. Zápis funkcí je následující

$$h_1(r) = \frac{1}{2}(1+r) \qquad h_2(r) = \frac{1}{2}(1-r)$$

Pro tři uzly je řešení identické. Hledáme tři kvadratické funkce $h_i(r) = a_i r^2 + b_i r + c_i$ které procházejí následujícími body.

$$\begin{array}{lll} h_1(-1) = 0 & h_1(0) = 0 & h_1(1) = 1 \\ h_2(-1) = 0 & h_2(0) = 1 & h_2(1) = 0 \\ h_3(-1) = 1 & h_3(0) = 0 & h_3(1) = 0 \end{array}$$

Řešením jsou koeficienty $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1/2$, $c_1 = 0$, $a_2 = -1$, $b_2 = 0$, $c_2 = 1$, $a_3 = 1/2$, $b_3 = -1/2$ a $c_3 = 0$. Zápis funkcí je následující

$$h_1(r) = \frac{r}{2}(r+1) \qquad h_2(r) = 1-r^2 \qquad h_3(r) = \frac{r}{2}(r-1)$$

Všechny tvarové funkce jsou nakresleny na obrázku 21.

Pro kontrolu „rozkladu jedničky“ stačí funkce sečíst.

$$\sum_{i=1}^2 h_i(r) = \frac{1}{2}(1+r) + \frac{1}{2}(1-r) = 1$$

$$\sum_{i=1}^3 h_i(r) = \frac{r}{2}(r+1) + 1 - r^2 + \frac{r}{2}(r-1) = 1$$

■

Příklad 10.2 *Odvodte a nakreslete všechny tvarové funkce na čtyřúhelníkovém prvku se čtyřmi rohovými uzly s lineární aproximací posunů. Zkontrolujte platnost „rozkladu jedničky“.*

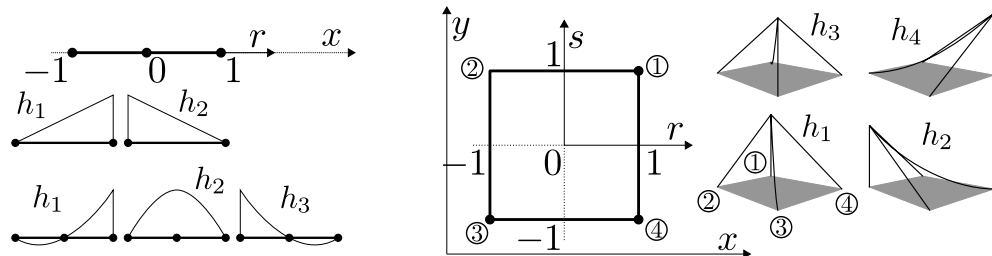
Řešení Pro čtyři uzly budou existovat čtyři tvarové funkce $h_1 - h_4$, vždy s hodnotou 1 v jednom uzlu a s hodnotou 0 v ostatních.

$$\begin{array}{cccc} h_1(-1, -1) = 0 & h_1(1, -1) = 0 & h_1(-1, 1) = 0 & h_1(1, 1) = 1 \\ h_2(-1, -1) = 0 & h_2(1, -1) = 0 & h_2(-1, 1) = 1 & h_2(1, 1) = 0 \\ h_3(-1, -1) = 1 & h_3(1, -1) = 0 & h_3(-1, 1) = 0 & h_3(1, 1) = 0 \\ h_4(-1, -1) = 0 & h_4(1, -1) = 1 & h_4(-1, 1) = 0 & h_4(1, 1) = 0 \end{array}$$

Tyto hodnoty definují lineární funkce ve tvaru $h_i(r, s) = a_i r + b_i s + c_i r s + d_i$. Vyžadujeme-li splnění předchozích podmínek, dostáváme

$$\begin{array}{ll} h_1(-1, -1) = -a_1 - b_1 + c_1 + d_1 = 0 & h_2(-1, -1) = -a_2 - b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ h_1(1, -1) = -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = 0 & h_2(1, -1) = -a_2 + b_2 - c_2 + d_2 = 0 \\ h_1(-1, 1) = a_1 - b_1 - c_1 + d_1 = 0 & h_2(-1, 1) = a_2 - b_2 - c_2 + d_2 = 1 \\ h_1(1, 1) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 1 & h_2(1, 1) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} h_3(-1, -1) = -a_3 - b_3 + c_3 + d_3 = 1 & h_4(-1, -1) = -a_4 - b_4 + c_4 + d_4 = 0 \\ h_3(1, -1) = -a_3 + b_3 - c_3 + d_3 = 0 & h_4(1, -1) = -a_4 + b_4 - c_4 + d_4 = 1 \\ h_3(-1, 1) = a_3 - b_3 - c_3 + d_3 = 0 & h_4(-1, 1) = a_4 - b_4 - c_4 + d_4 = 0 \\ h_3(1, 1) = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 = 0 & h_4(1, 1) = a_4 + b_4 + c_4 + d_4 = 0 \end{array}$$



Obrázek 21: Tvarové funkce na prutu a čtyřuzlovém 2D prvku.

Řešením jsou tyto funkce

$$\begin{aligned}
 h_1(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
 h_2(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\
 h_3(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
 h_4(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s)
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \quad (49)$$

Všechny tvarové funkce jsou nakresleny na obrázku 21.

Pro kontrolu „rozkladu jedničky“ stačí funkce sečíst.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) &= \frac{1}{4} [(1+r)(1+s) + (1-r)(1+s) + (1+r)(1-s) + (1-r)(1-s)] \\
 &= \frac{1}{4} [(1+r+s+rs) + (1-r+s-rs) + (1+r-s-rs) + (1-r-s+rs)] = 1
 \end{aligned}$$

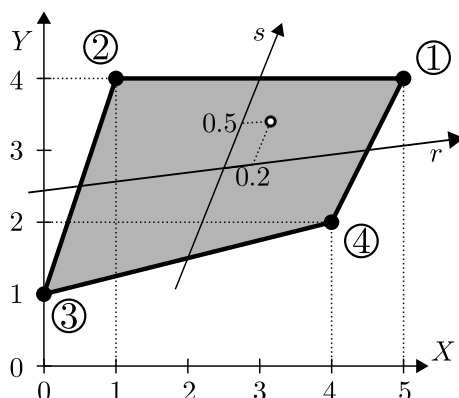
■

Příklad 10.3 Pomocí tvarových funkcí na čtyřúhelníkovém prvku (Obr. 22) se čtyřmi rohovými uzly v bodech $[x_i, y_i] = \{[5, 4], [1, 4], [0, 1], [4, 2]\}$, ve kterých byly vypočteny posuny $[u_i, v_i] = \{[0.1, 0.2], [0.15, -0.1], [0.1, -0.15], [0.2, -0.2]\}$, určete polohu v globální souřadnicové soustavě a posuny v bodě $[r, s] = [1/5, 1/2]$.

Řešení Využijeme tvarové funkce z příkladu 10.2.

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) x_i = \frac{1}{4} \left[\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \frac{63}{20} = 3.15$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) y_i = \frac{1}{4} \left[\frac{9}{5} \cdot 4 + \frac{6}{5} \cdot 4 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 2 \right] = \frac{17}{5} = 3.4$$



Obrázek 22: Čtyřúhelníkový prvek se čtyřmi uzly.

a podobně pro posuny

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right) u_i = \frac{1}{4} \left[\frac{9}{5} \cdot 0.1 + \frac{6}{5} \cdot 0.15 + \frac{2}{5} \cdot 0.1 + \frac{3}{5} \cdot 0.2 \right] = 0.13$$

$$v = \sum_{i=1}^4 h_i \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right) v_i = -\frac{1}{4} \left[\frac{9}{5} \cdot 0.2 + \frac{6}{5} \cdot 0.1 + \frac{2}{5} \cdot 0.15 + \frac{3}{5} \cdot 0.2 \right] = -0.165$$

■

Pro výpočet deformací potřebujeme derivace posunů podle globálních souřadnic x a y (geometrické rovnice (2a)).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (50)$$

Tyto derivace lze získat pomocí derivace inverze tvarových funkcí. Přímý výpočet těchto inverzí ovšem není vždy snadný. Proto se provádí inverze matice derivací v lokálním systému, tzv. Jacobiánu. Pomocí řetězkového pravidla pro libovolnou funkci f dvou proměnných x a y závislých na r a s máme

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (52)$$

a tedy vztah mezi derivacemi můžeme zapsat jako

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \text{ což zapíšeme jako } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad (53)$$

Pro výpočet derivací v globálním systému pak stačí provést zmiňovanou inverzi.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \quad (54)$$

Příklad 10.4 Pro prvek z příkladu 10.3 vypočtete ve stejném bodě Jacobiho matici a její inverzi.

Řešení Potřebujeme vypočíst derivaci \mathbf{u} podle \mathbf{x} . Musíme nejprve sestavit Jacobiho matici, a k tomu potřebujeme derivace tvarových funkcí podle lokálních souřadnic.

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial h_1}{\partial r} = \frac{1+s}{4} & \frac{\partial h_2}{\partial r} = -\frac{1+s}{4} & \frac{\partial h_3}{\partial r} = -\frac{1-s}{4} & \frac{\partial h_4}{\partial r} = \frac{1-s}{4} \\ \frac{\partial h_1}{\partial s} = \frac{1+r}{4} & \frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1-r}{4} & \frac{\partial h_3}{\partial s} = -\frac{1-r}{4} & \frac{\partial h_4}{\partial s} = -\frac{1+r}{4} \end{array}$$

Jacobiho matici sestavíme kombinací těchto derivací. Například

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial \sum_{i=1}^4 h_i x_i}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i$$

Dosadíme bod $[r, s] = [1/5, 1/2]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{1+s}{4} \cdot 5 - \frac{1+s}{4} \cdot 1 - \frac{1-s}{4} \cdot 0 + \frac{1-s}{4} \cdot 4 = 2 \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1+r}{4} \cdot 5 + \frac{1-r}{4} \cdot 1 - \frac{1-r}{4} \cdot 0 - \frac{1+r}{4} \cdot 4 = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{1+s}{4} \cdot 4 - \frac{1+s}{4} \cdot 4 - \frac{1-s}{4} \cdot 1 + \frac{1-s}{4} \cdot 2 = \frac{1-s}{4} \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1+r}{4} \cdot 4 + \frac{1-r}{4} \cdot 4 - \frac{1-r}{4} \cdot 1 - \frac{1+r}{4} \cdot 2 = \frac{5-r}{4} \end{aligned}$$

Po dosazení bodu $[r, s] = [1/5, 1/2]$ máme

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1-s}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5-r}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

a výpočet inverze Jacobiho matice je pak

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & \frac{1-s}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5-r}{4} & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-s}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5-r}{4} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-s}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19-4r+s}{16} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1-s}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{19-4r+s} & \frac{16}{19-4r+s} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{10-2r}{19-4r+s} & \frac{2s-2}{19-4r+s} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{19-4r+s} & \frac{16}{19-4r+s} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{19-4r+s} \begin{bmatrix} 5-r & s-1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 96 & -10 \\ -40 & 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5134 & -0.0535 \\ -0.2139 & 0.8556 \end{bmatrix}$$

■

11 Izoparametrické prvky II

Příklad 11.1 Pro prvek z příkladu 10.3 vypočítejte ve stejném bodě deformaci.

Řešení Potřebujeme vypočíst derivace \mathbf{u} podle \mathbf{x} .

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}$$

Musíme nejprve sestavit Jacobiho matici a její inverzi. To jsme ale již učinili v příkladu 10.4. Dále potřebujeme derivaci posunu podle \mathbf{r} . Máme tedy

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{r} u_i \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{s} u_i \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{r} v_i \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{s} v_i$$

což lze zapsat maticově takto

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+s & -1-s & -1+s & 1-s \\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{Bmatrix}^T \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+s & -1-s & -1+s & 1-s \\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Bmatrix}^T \end{aligned}$$

My ovšem potřebujeme derivace podle \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2(19-4r+s)} \begin{bmatrix} 5-r & s-1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+s & -1-s & -1+s & 1-s \\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2(19-4r+s)} \begin{bmatrix} 5-r & s-1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+s & -1-s & -1+s & 1-s \\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Vektor deformace lze pak zapsat takto

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}$$

kde $\hat{\mathbf{u}} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4]^T$ a

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2(19-4r+s)} \begin{bmatrix} 4-2r+6s & 0 & -6+2r-4s & 0 \\ 0 & 6+8r-2s & 0 & 10-8r+2s \\ 6+8r-2s & 4-2r+6s & 10-8r+2s & -6+2r-4s \\ -4+4s & 0 & 6-6s & 0 \\ 0 & -6+8r-2s & 0 & -10-8r+2s \\ -6+8r-2s & -4+4s & -10-8r+2s & 6-6s \end{bmatrix}$$

Po dosazení uzlových posunů do $\hat{\mathbf{u}}$ a bodu $[r, s] = [1/5, 1/2]$ do matice B dostáváme

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.1765 & 0 & -0.2032 & 0 & -0.0535 & 0 & 0.0802 & 0 \\ 0 & 0.1765 & 0 & 0.2513 & 0 & -0.1444 & 0 & -0.2834 \\ 0.1765 & 0.1765 & 0.2513 & -0.2032 & -0.1444 & -0.0535 & -0.2834 & 0.0802 \end{bmatrix} \text{ m}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ 0.1 \quad -0.2 \quad 0.15 \quad -0.1 \quad 0.1 \quad -0.15 \quad 0.2 \quad -0.2 \right\}^T \text{ m}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -0.00214 \\ 0.01791 \\ -0.03877 \end{Bmatrix}$$

■

Příklad 11.2 Pro prvek z příkladu 10.3 vypočítejte matici tuhosti pomocí čtyřbodové Gaussovy integrace, uvažujte rovinnou napjatost a modul pružnosti $E = 30 \text{ GPa}$, Poissonovo číslo $\nu = 0.2$ a tloušťku $t = 1 \text{ m}$.

Řešení Potřebujeme vypočítat integrál v globální souřadnicovém systému xy , ale pomocí determinantu Jacobiho matice (Jacobiánu) jej převedeme do lokálního souřadnicového systému prvku rs

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV = \iint_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dx \, dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) \, dr \, ds$$

Jediné, co neznáme, je elastická matice \mathbf{C} a také ještě nemáme vypočtený Jacobián. Budeme uvažovat rovinnou napjatost, pro kterou platí (4)

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Determinant Jacobiho matice je

$$\det(\mathbf{J}) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & \frac{1-s}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5-r}{4} \end{bmatrix} \right) = 2 \cdot \frac{5-r}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-s}{4} = \frac{s-4r+19}{8}$$

Nyní je potřeba provést numerickou integraci. Označme

$$F(r, s) = t \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det(\mathbf{J})$$

Pro čtyřbodovou Gaussovu integraci platí (podle Tab. 2 na straně 51, 2×2 body)

$$\mathbf{K} \approx 1 \cdot F \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \cdot F \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \cdot F \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 1 \cdot F \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Výsledná matice tuhosti je následující

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 11.232 & 1.935 & -3.171 & -0.663 & -2.627 & -3.707 & -5.435 & 2.435 \\ 1.935 & 16.061 & 2.462 & 5.688 & -3.707 & -3.376 & -0.690 & -18.373 \\ -3.171 & 2.462 & 17.643 & -7.817 & -2.306 & -1.334 & -12.166 & 6.689 \\ -0.663 & 5.688 & -7.817 & 26.494 & 1.7917 & -13.761 & 6.689 & -18.421 \\ -2.627 & -3.707 & -2.306 & 1.791 & 8.885 & 2.418 & -3.953 & -0.502 \\ -3.707 & -3.376 & -1.334 & -13.761 & 2.418 & 12.602 & 2.623 & 4.535 \\ -5.435 & -0.690 & -12.166 & 6.689 & -3.953 & 2.623 & 21.554 & -8.622 \\ 2.435 & -18.373 & 6.689 & -18.421 & -0.502 & 4.535 & -8.622 & 32.260 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ N/m}$$

Výsledek není přesná hodnota integrálu, ačkoliv aproximační funkce jsou lineární a jejich součin je pouze kvadratický. Inverze Jacobiánu do výrazu přidává členy r^{-1} či s^{-1} a podobné, které Gaussova integrace nepokrývá. Můžeme tedy pro zajímavost zkusit integraci pomocí devíti bodů (opět podle Tab. 2, 3×3 body)

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \approx & \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ & + \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} F(0, 0) + \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ & + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \end{aligned}$$

Výsledná matice tuhosti je následující

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 11.265 & 1.928 & -3.192 & -0.659 & -2.602 & -3.711 & -5.471 & 2.442 \\ 1.928 & 16.136 & 2.466 & 5.641 & -3.711 & -3.321 & -0.683 & -18.456 \\ -3.192 & 2.466 & 17.656 & -7.819 & -2.321 & -1.331 & -12.143 & 6.685 \\ -0.659 & 5.641 & -7.819 & 26.524 & 1.794 & -13.796 & 6.685 & -18.369 \\ -2.602 & -3.711 & -2.321 & 1.794 & 8.903 & 2.415 & -3.979 & -0.497 \\ -3.711 & -3.321 & -1.331 & -13.796 & 2.415 & 12.641 & 2.628 & 4.476 \\ -5.471 & -0.683 & -12.143 & 6.685 & -3.979 & 2.628 & 21.594 & -8.630 \\ 2.442 & -18.456 & 6.685 & -18.369 & -0.497 & 4.476 & -8.630 & 32.349 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ N/m}$$

Oproti čtyřbodové integraci získáváme maximální rozdíl asi 1.6%. Ani tato matice však není přesná. Oproti 25 bodové (a stále nepřesné) integraci je maximální změna 0.025%. Přesnou čtyřbodovou integraci bychom získali např. pro konstantní Jacobiho matici, kterou obdržíme např. při zachování obdélníkového tvaru prvku. ■

Příklad 11.3 Pro prvek z příkladu 10.3 vypočítejte zatěžovací vektor způsobený vlastní tíhou ve směru $-y$. Uvažujte hustotu materiálu $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ a gravitační zrychlení $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Řešení Opět potřebujeme vypočíst integrál v globálním souřadnicovém systému, který nahradíme integrálem v lokálním souřadnicovém systému prvku pomocí determinantu Jacobiho matice

$$\mathbf{R} = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f} dV = \iint_V \mathbf{H}^T \mathbf{f} dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{H}^T \mathbf{f} \det(\mathbf{J}) dr ds$$

Matice \mathbf{H} vyjadřuje posuny v závislosti na parametrech deformačního stavu, tedy podle rovnice (49)

$$\mathbf{H}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1+s) \\ (1-r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1-s) \end{bmatrix}$$

a vektor \mathbf{f} je pak měrná objemová síla ve směru x a y

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}$$

Nyní je potřeba provést numerickou integraci. Označme

$$F(r, s) = t \mathbf{H}^T \mathbf{f} \det(\mathbf{J})$$

potom pro čtyřbodovou Gaussovu integraci platí

$$\mathbf{R} \approx 1 \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Výsledný zatěžovací vektor je následující

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -55.18 \\ 0 \\ -63.36 \\ 0 \\ -61.31 \\ 0 \\ -53.14 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Tentokrát je řešení přesné, protože výraz obsahuje pouze polynomy v r a s do stupně 3 včetně. Kontrola je možná tím, že sečteme síly ve směru y , a ty by se měly rovnat součinu objemu prvku, hustoty a zrychlení. Plocha prvku je přesně $S = 9.5 \text{ m}^2$

$$55.18 + 63.36 + 61.31 + 53.14 = 232.99 \text{ kN}$$

$$St\rho g = 9.5 \cdot 1 \cdot 2500 \cdot 9.81 = 232.99 \text{ kN}$$

■

Použitá literatura

- Jiří Benda, Energetické variační metody v teorii pružnosti prutových konstrukcí, Brno, 2002.
- Svatopluk Šmiřák, Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, VUT v Brně, Brno, 1998.
- Vladimír Kolář, Jiří Kratochvíl, František Leitner & Alexandr Ženíšek, Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, 2. vydání, 1979, SNTL.
- Klaus Jürgen Bathe, Finite Element Procedures, 1996.
- Jacob Fish & Ted Belytschko, A first course in finite elements, Wiley, 2007.
- Ted Belytschko, Wing Kam & Brian Moran, Nonlinear finite elements for continua and structures, Wiley, 2006.

Náměty na doplnění

- příklad s nenulovou kinematickou okrajovou podmínkou a s teplotním zatížením
- vyřešit značení, kdy t je současně tloušťka a povrchová síla (traction)
- teorie o konvergenci MKP
- smykové zamykání

Poděkování, opravy

Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám a cvičením z předmětu Stavební mechanika (BD006) pro studenty Stavební fakulty VUT v Brně. Dokument je průběžně aktualizován a i přes veškerou mou snahu bude obsahovat nepřesnosti a chyby. Pokud v textu najdete chybu, nepřesnost či budete mít námět na doplnění textu, napište mi, prosím, na jan.elias@vut.cz.

- Děkuji Romanu Gratzovi za podklady, diskuzi a řadu oprav v textu.
- Děkuji Josefu Květoňovi za opravu několika chyb v první kapitole.
- Děkuji Petře Eliášové za důkladné přečtení celého dokumentu a odhalení nespočtu překlepů a chyb v rovnicích a textech.