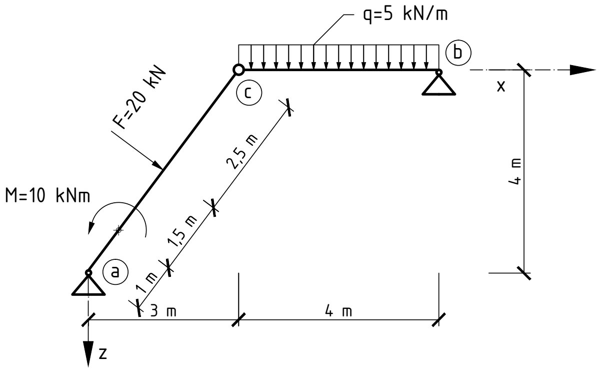
Vzorový příklad č. 1

Rovinný lomený trojkloubový nosník

Zadání

Pro daný rovinný lomený trojkloubový nosník a uvedené zatížení na obrázku 1 vypočítejte velikost reakcí vnějších vazeb R_{ax}, R_{az}, R_{bx}, R_{bz} a stanovte průběhy vnitřních sil *N*, *V*, *M*.



Obrázek 1: Zadání

Řešení

Řešení reakcí

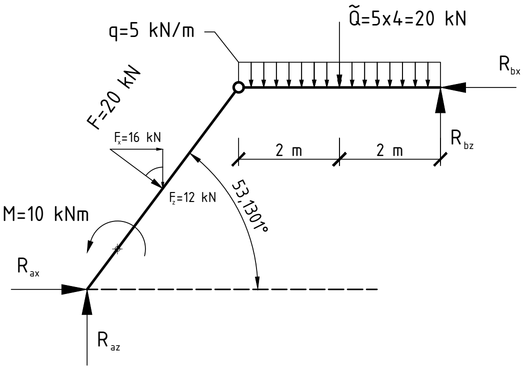
Pro vyřešení reakcí na zadaném rovinném lomeném nosníku je třeba nejprve provést uvolnění nosníku z vnějších vazeb a účinek těchto vnějších vazeb[1] nahradit složkami reakcí R_{ax}, R_{az}, R_{bx}, R_{bz}. Smysl složek reakcí lze libovolně zvolit a při následujícím výpočtu se jejich orientace buď potvrdí (znaménko $\oplus$) nebo obrátí (znaménko $\ominus$). Uvolněním nosníku a nahrazením vazeb složkami reakcí vznikne soustava sil v rovině. Tato soustava má být v rovnováze a tak vyřešíme velikosti složek reakcí z podmínek rovnováhy. V řešeném případě trojkloubového nosníku se využije 3 momentových podmínek rovnováhy a to k podpoře ⓐ , ke kloubu ⓒ **zleva**, ke kloubu ⓒ **zprava** a jedné silové ve směru osy x.

(a) $\sum M_{i,c}^{P} = 0 : [\circlearrowleft \oplus]$

$$R_{bz} - 0,5q \cdot l^2 = 0$$

$$R_{bz} = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 4^2}{4} = \underline{10,0}\,\text{kN}\,[\uparrow]✓$$

[1] *Vnější vazba* neboli *podpora* zamezuje pohybu (posunu či rotaci) konstrukce. Říkáme, že konstrukci odebírá stupně volnosti. Podle počtu odebraných stupňů volnosti rozlišujeme (v rovině) vazby jednonásobné, dvojnásobné a trojnásobné.



Obrázek 2: Nosník uvolněný z vazeb, reakce

(b) $\sum M_{i,a} = 0 : [\circlearrowleft \oplus]$

$$R_{bz} \cdot 7 + R_{bx} \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot (0,5 \cdot 4 + 3) - F \cdot 2,5 + M = 0$$

$$R_{bx} = \frac{q \cdot 4 \cdot 5 + F \cdot 2,5 - M - R_{bz} \cdot 7}{4}$$

$$R_{bx} = \frac{5 \cdot 20 + 20 \cdot 2,5 - 10 - 10 \cdot 7}{4} = \underline{17,5}\,\text{kN}\,[\leftarrow]✓$$

(c) $\sum F_{i,x} = 0 : [\rightarrow \oplus]$

$$R_{ax} + F\sin\alpha - R_{bx} = 0$$

$$R_{ax} = -F\sin\alpha + R_{bx}$$

$$R_{ax} = -16 + 17,5 = \underline{1,5}\,\text{kN}\,[\rightarrow]✓$$

(d) $\sum M_{i,c}^{L} = 0 : [\circlearrowleft \oplus]$

$$R_{az} \cdot 3 - R_{ax} \cdot 4 - F \cdot 2,5 - M = 0$$

$$R_{az} = \frac{R_{ax} \cdot 4 + F \cdot 2,5 + M}{3}$$

$$R_{ax} = \frac{1,5 \cdot 4 + 20 \cdot 2,5 + 10}{3} = \underline{22,0}\,\text{kN}\,[\uparrow]✓$$

Kontrola

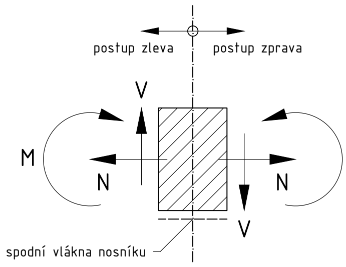
Pro kontrolu lze využít zbývající silové podmínky do svislé osy z.

$\sum F_{i,z} = 0 : [\uparrow \oplus]$

$$R_{az} + R_{bz} - q \cdot 4 - F\cos\alpha = 22 + 10 - 5 \cdot 4 - 12 = 0\,\text{kN}\,✓$$

Řešení průběhů vnitřních sil N, V, M

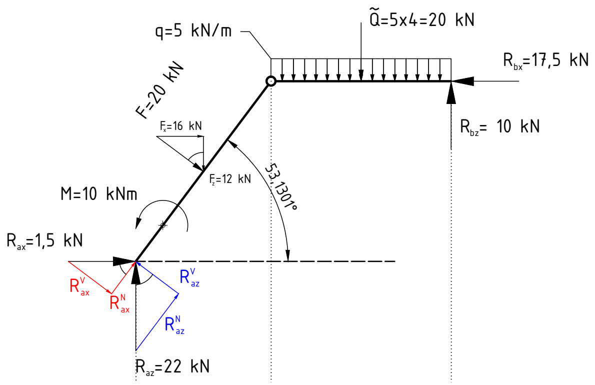
Při řešení průběhů vnitřních sil se uplatňuje následující konvence pro složky výslednice vnitřních sil: **Kladné** normálové síly N vyvozují v uvažovaném řezu **tah**, **kladné** posouvající síly V se snaží otočit řezem **ve směru chodu hodinových ručiček** [$\circlearrowright$] a **kladný** moment M **natahuje spodní vlákna** nosníku. Uvedenou konvenci dokumentuje níže uvedený obrázek 3.



Obrázek 3: Konvence složek výslednice vnitřních sil

Rozklad reakcí v podpoře ⓐ

Pro rozklad reakcí R_{ax} a R_{az} se použijí goniometrické funkce.[2]



Obrázek 4: Rozklad reakcí v ⓐ

Hodnoty sil v obrázku lze získat následujícím způsobem:

$$R^N_{ax} = R_{ax} \cos\alpha = 1,5 cos\alpha = \underline{0,9\ \mathrm{kN}}$$

$$R^V_{ax} = R_{ax} \sin\alpha = 1,5 cos\alpha = \underline{1,2\ \mathrm{kN}}$$

$$R^N_{az} = R_{az} \sin\alpha = 22,0 sin\alpha = \underline{17,6\ \mathrm{kN}}$$

$$R^V_{az} = R_{az} \cos\alpha = 22,0 cos\alpha = \underline{13,2\ \mathrm{kN}}$$

Ohybové momenty M

Ohybové momenty se vždy určují jako součet statických momentů všech sil, osamělých momentů i reakcí k danému řezu. Vykreslení ohybových momentů se řídí následující konvencí: **hodnota momentu se vynáší na stranu tažených vláken, kladné pod základní čáru, záporné nad základní čáru!**. Ke správnému určení tvaru momentového obrazce lze použít integračně derivační schéma uvedené na obrázku 5.

[2] Horní index N označuje příspěvek do normálových sil a horní index V označuje příspěvek reakce do posouvajících sil

(A) šikmý prut („sloup" – index s)

$$M_{a,s} = \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M^L_{1,0m,s} = (-R^V_{ax} + R^V_{az}) \cdot 1,0 = 12 \cdot 1,0 = \\ = \underline{12,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M^P_{1,0m,s} = (-R^V_{ax} + R^V_{az}) \cdot 1,0 - M = 12 \cdot 1,0 - 10 = \\ \underline{2,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{2,5m,s} = (-R^V_{ax} + R^V_{az}) \cdot 2,5 - M = 12 \cdot 2,5 - 10 = \\ \underline{20,0}\ \mathrm{kNm}$$

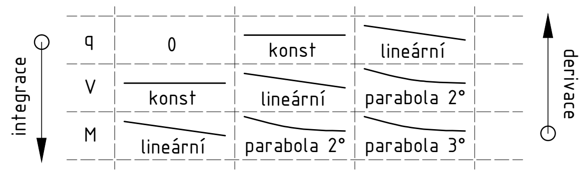
$$M_{5,0,s} = (-R^V_{ax} + R^V_{az}) \cdot 5,0 - M - F \cdot 2,5 \\ = 12 \cdot 5,0 - 10 - 20 \cdot 2,5 = \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

(B) vodorovný prut („příčel" – index p)

$$M^P_{0m,p} = R_{bz} \cdot 4,0 - 0,5q \cdot l^2 = 10 \cdot 4,0 - 0,5 \cdot 5 \cdot 4^2 = \\ \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{4m,p} = M_{b,p} = \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

Podoba momentové křivky lze odvodit z *derivačně-integračního schématu* na obrázku 5. Konstantní posouvající síly způsobují lineární průběh momentů a posouvající síly s průběhem v podobě přímky vedou na momenty ve tvaru paraboly 2. stupně.



Obrázek 5: Derivačně-integrační schéma

Stanovení velikosti M_x

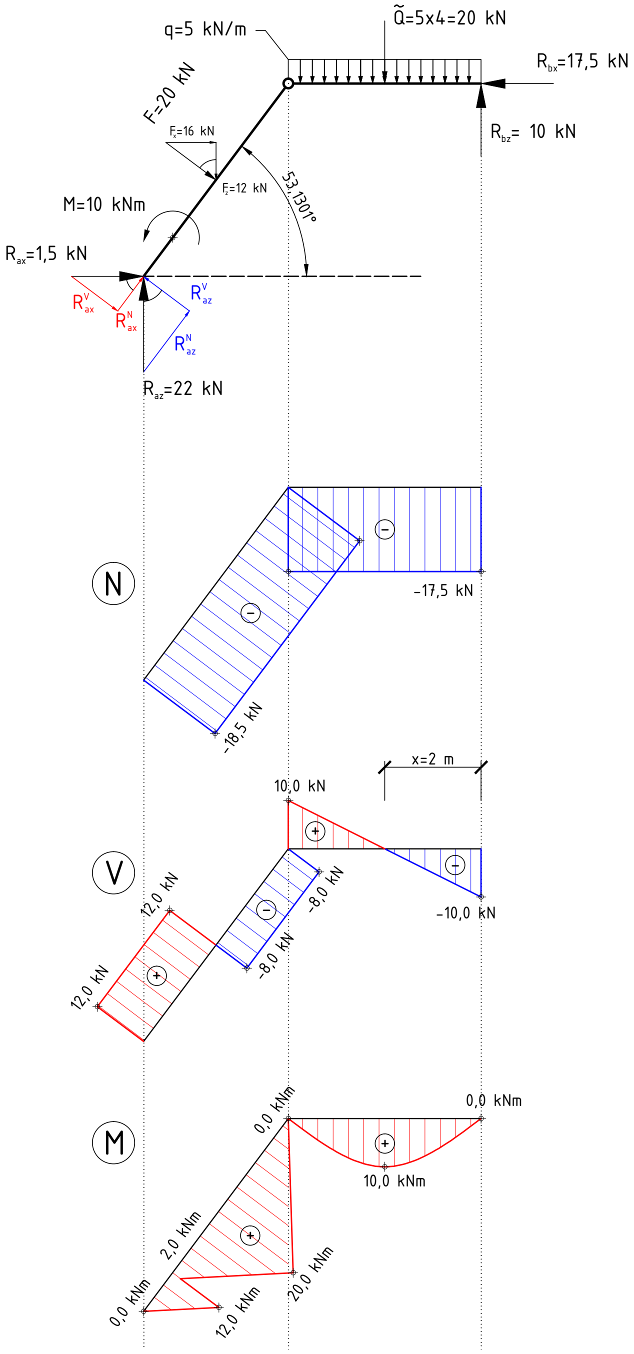
Pro stanovení velikosti maximálního ohybového momentu na příčli se musí nejprve určit poloha tzv. *přechodového průřezu*. Tímto průřezem se myslí místo, v němž je hodnota posouvající síly rovna **nule**. V zadaném případě se poloha přechodového průřezu určí z následující rovnice:

$$V_b + q \cdot x = 0$$

$$x = \frac{-V_b}{q} = \frac{10}{5} = 2,0\ \mathrm{m}$$

Hodnotu maximálního momentu M_x lze pak určit postupem zprava takto:

$$M_{max} = R_{bz} \cdot x - 0,5q \cdot x^2 = 10 \cdot 2 - 0,5 \cdot 5 \cdot 2^2 = \underline{10,0}\ \mathrm{kNm}$$



Obrázek 6: Průběhy vnitřních sil