Cvičení 1.: Opakování vnitřních sil a průřezových charakteristik

Pružnost a pevnost/BDA002

Ing. Ondřej Holiš

Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební VUT v Brně

2024/2025

Obsah

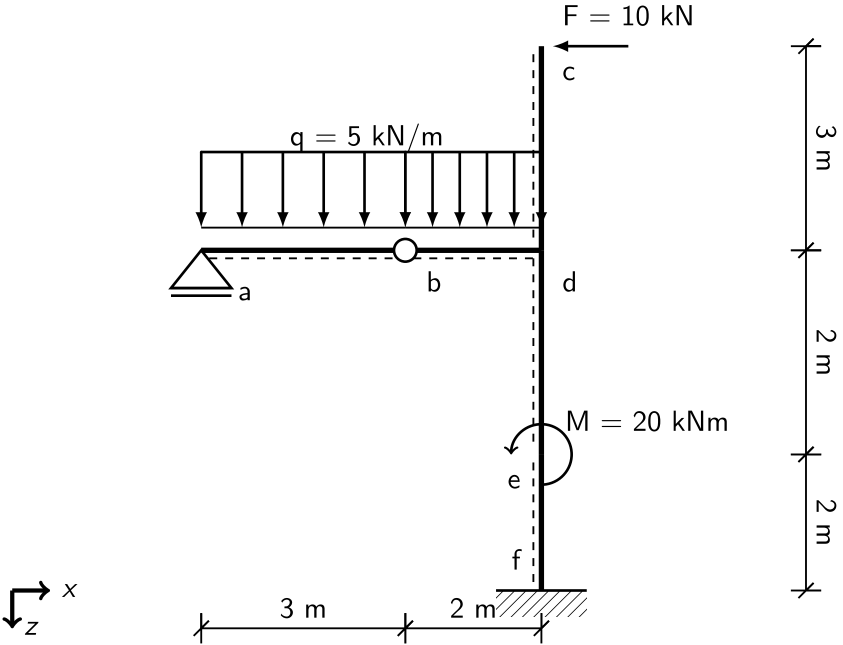
Staticky určitý nosník

Zadání I

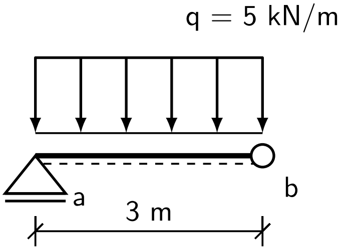
Příklad 1.

Na zadaném nosníku vypočtěte hodnoty reakcí a vykreslete diagramy vnitřních sil a ohybových momentů.

Zadání II



Výpočet reakcí I



Výpočet reakcí

$$\sum M_{i,a} = 0 :$$

$$R_{b,z} \cdot 3 - (3 \cdot 5) \cdot 5 = 0$$

$$R_{b,z} = 22,5/3 = 7,5kN$$

$$\sum F_{i,z} = 0 :$$

$$R_{a,z} + R_{b,z} - 3 \cdot 5 = 0$$

$$R_{a,z} = 15 - 7,5 = 7,5kN$$

Výpočet reakcí II

Výpočet reakcí

$$\sum F_{i,z} = 0:$$

$$R_{f,z} - 7,5 - 10 = 0$$

$$R_{f,z} = 17,5 kN$$

$$\sum F_{i,x} = 0:$$

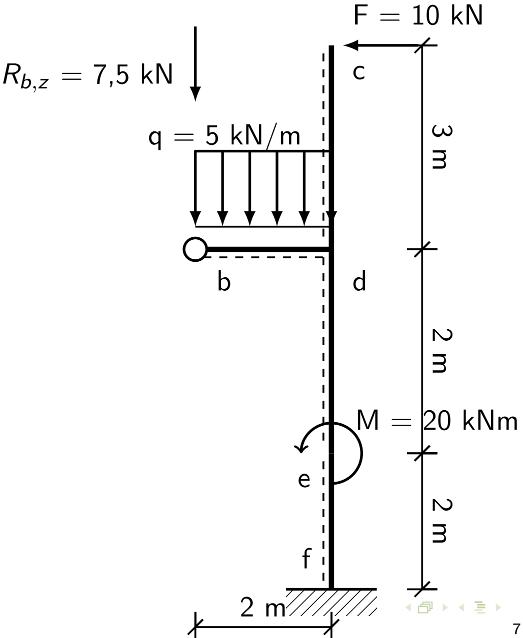
$$R_{f,x} - 10 = 0$$

$$R_{f,x} = 10 kN$$

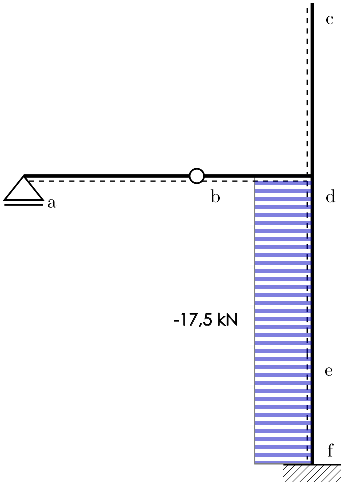
$$\sum M_f = 0:$$

$$M_f + 20 + 10 + 7,5 \cdot 2 + 10 \cdot 7 = 0$$

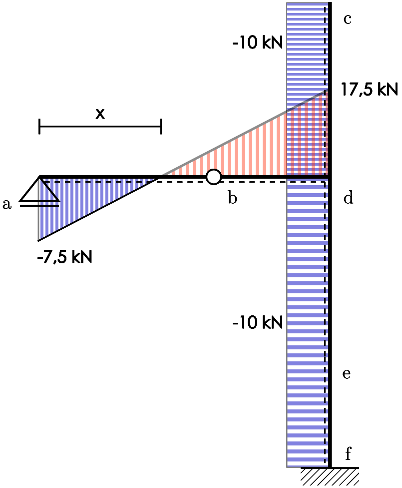
$$M_f = -115 kNm$$



Normálové a posouvající síly



Obrázek: Normálové síly.



Obrázek: Posouvající síly.

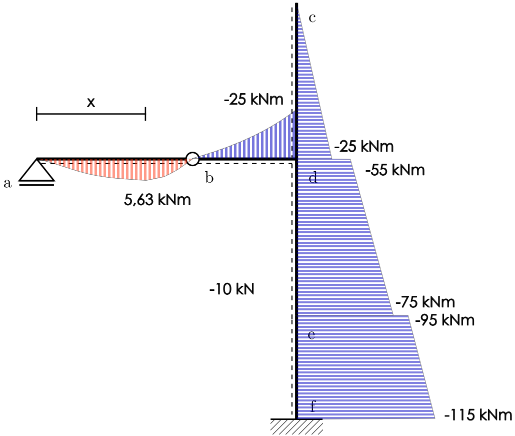
Výpočet vzdálenosti x a momentový diagram

Délka x a maximální ohybový moment

$$x = 7,5/q = 7,5/5 = 1,5m$$

$$M_{max} = 7,5 \cdot 1,5 \cdot -5 \cdot 1,5^2 \cdot 0,5$$

$$M_{max} = 5,625kNm$$



Obrázek: Ohybové momenty

Průřezové charakteristiky

Těžiště průřezu

Je takový bod tělesa nebou soustavy těles, který se pohybuje tak, jakoby v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa či soustavy a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso.

Těžiště složených rovinných obrazců

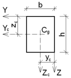
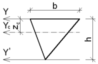
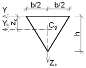
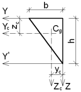
$$y_t = \frac{U_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad z_t = \frac{U_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Součinitel A_i zančí těžiště jednotlivých obrazců, y_i, z_i vzdálenost těžšiť obrazců k osám y, z, U_y, U_z statické momenty a y_t, z_t vzdálenost těžiště složeného obrazce od hlavních os.

Kvadratické momenty jednoduchých obrazců

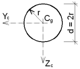
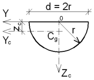
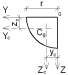
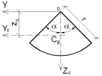
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Geometrické charakteristiky rovinných obrazců

Tvar obrazce	Plocha A	Souřadnice těžiště	Axiální momenty setrvačnosti	Deviační momenty setrvačnosti
	$A = bh$	$y_c = \frac{b}{2}$ $z_c = \frac{h}{2}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \frac{bh^3}{12}, \quad \boldsymbol{I}_{zC} = \frac{hb^3}{12}$ $I_y = \frac{bh^3}{3}, \quad I_z = \frac{hb^3}{3}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = 0$ $D_{yz} = \frac{b^2h^2}{4}$
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_C = \frac{h}{3}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{bh^3}{4}$	
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_C = \frac{h}{3}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \frac{bh^3}{36}, \quad \boldsymbol{I}_{zC} = \frac{hb^3}{48}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$ $z_c = \frac{h}{3}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \frac{bh^3}{36}, \quad \boldsymbol{I}_{zC} = \frac{hb^3}{36}$ $I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad I_z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{bh^3}{4}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $D_{yz} = \frac{b^2h^2}{24}$ $D_{y'z} = -\frac{b^2h^2}{8}$ Znaménka!

(pokračování na další stránce)

(pokračování tabulky)

Tvar obrazce	Plocha A	Souřadnice těžiště	Axiální momenty setrvačnosti	Deviační momenty setrvačnosti
	$A = \pi r^2$ $= \frac{\pi d^2}{4}$		$\boldsymbol{I}_y C = \boldsymbol{I}_z C = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $= \frac{\pi d^2}{8}$	$z_C = \frac{4r}{3\pi}$ $= \frac{2d}{3\pi}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 =$ $\doteq 0,1098 r^4$ $\boldsymbol{I}_{zC} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$ $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $= \frac{\pi d^2}{16}$	$y_C = z_C =$ $= \frac{4r}{3\pi}$ $= \frac{2d}{3\pi}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = \boldsymbol{I}_{zC} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$ $\doteq 0,0549 r^4$ $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{16}$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} =$ $= \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$ $\doteq -0,0165 r^4$ $D_{y'z} = \frac{r^4}{8}$ Znaménka!
	$A = \widehat{\alpha} r^2$ $= \mathrm{arc}\alpha\ r^2$ $= \frac{\alpha^o}{180^o}\pi r^2$	$z_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\widehat{\alpha}}$	$\boldsymbol{I}_{yC} = r^4 \left(\frac{2\widehat{\alpha} + \sin 2\alpha}{8} - \right.$ $\left. - \frac{4 \sin^2\alpha}{9\widehat{\alpha}}\right)$ $\boldsymbol{I}_{zC} = \frac{r^4}{8}\left(2\widehat{\alpha} - \sin 2\alpha\right)$ $\boldsymbol{I}_y = \frac{r^4}{8}\left(2\widehat{\alpha} + \sin 2\alpha\right)$	$\boldsymbol{D}_{yCzC} = 0$

(pokračování na další stránce)

Transformace k rovnoběžným osám

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Steinerova věta

$$I_y = I_{y_t} + Ac^2$$

$$I_z = I_{z_t} + Ad^2$$

Kde I_y, I_z značí momenty setrvačnosti rovnoběžných hlavních os, I_{y_t}, I_{z_t} momenty setrvačnosti pro původní osy těžiště, A plocha průřezu, c, d vzdálenosti jednotlivých os mezi sebou.

Momenty setrvačnosti složených průřezů

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} (I_{y_i} + A_i c_i^2)$$

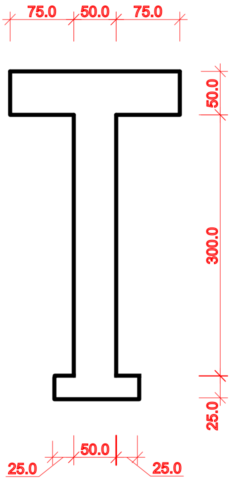
$$I_z = \sum_{i=1}^{n} (I_{z_i} + A_i d_i^2)$$

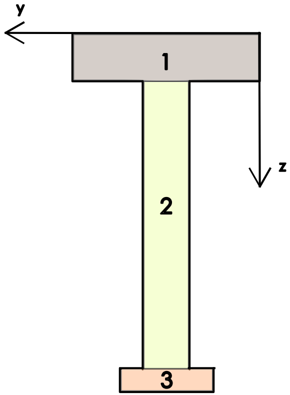
V případě, že se jedná o prázdný otvor je příspěvek momentu setrvačnosti i součinu plochy se souřadnicemi záporný. Hodnoty $c_i = z_{t\,i} - z_c$, kde první z hodnot je těžiště části průřezu, druhá celkové těžiště. Pro d platí obdobně.

Příklad II

Těžiště a kvadratické momenty

Na uvedeném průřezu vypočítejte polohu těžiště a vypočtěte hlavní kvadratické momenty k těžištním osám.





Příklad II

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Plocha a souřadnice těžišť

$$A_1 = 10000mm^2$$
$$A_2 = 15000mm^2$$
$$A_3 = 2500mm^2$$

$$z_1 = 25mm$$
$$z_2 = 200mm$$
$$z_3 = 362,5mm$$
$$y_1 = y_2 = y_3 = 100mm$$

Souřadnice těžiště složeného průřezu

$$z_t = \frac{10000 \cdot 25 + 25000 \cdot 200 + 2500 \cdot 32,5}{10000 + 15000 + 2500}$$
$$z_t = 151,13mm$$
$$z_y = 100mm$$

Příklad II

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Momety setrvačnosti průřezů a vzdálenosti těžišť

$$I_{y1} = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 50^3 = 2,08 \cdot 10^6 mm^4$$

$$I_{y2} = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 200^3 = 112,5 \cdot 10^6 mm^4$$

$$I_{y3} = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 25^3 = 0,13 \cdot 10^6 mm^4$$

$$c_1 = 25 - 151,13 = -126,13 mm$$

$$c_2 = 200 - 151,13 = 48,87 mm$$

$$c_3 = 362,5 - 151,13 = 211,37 mm$$

Moment setrvačnosti složeného průřezu

$$I_y = 2,08 \cdot 10^6 + 10000 \cdot (-126,13)^2 + 112,5 \cdot 10^6 + 15000 \cdot 48,87^2 + 0,1310^6 + 2500 \cdot 211,37^2$$

$$I_y = 421,315 \cdot 10^6 mm^4$$

$$I_z = 38,54 \cdot 10^6 mm^4$$