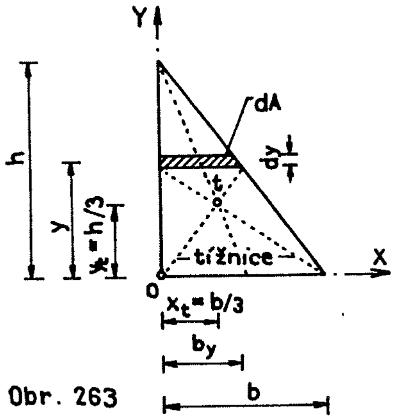
Příklad 166

Odvoďte vztahy pro polohu těžiště pravoúhlého trojúhelníka o šířce b a výšce h (obr. 263).



Obr. 263

Řešení

Vyšetřovaný trojúhelník rozdělíme na elementární proužky, rovnoběžné se souřadnicovou osou X, o plochách dA

$$dA = b_y \cdot dy \cdot \qquad (373)$$

Z úměry $h : b = (h-y) : b_y$ plyne, že

$$b_y = \frac{b}{h}\,(h-y). \qquad (374)$$

Po dosazení za b_y do vztahu (373) dostáváme plochu elementárního proužku

$$dA = \frac{b}{h}\,(h-y)\,dy. \qquad (375)$$

Plocha celého trojúhelníka A

$$A = \int_A dA = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\,dy = \frac{b}{h}\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\,bh. \qquad (376)$$

Statický moment dU_x a U_x elementárního proužku a celého trojúhelníka k ose X

$$d\,U_x = y\,dA, \qquad (377)$$

$$U_x = \int_A y\,dA = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)\,y\,dy = \frac{b}{h}\left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{6}\,bh^2. \qquad (378)$$

Souřadnice y_t těžiště t trojúhelníka podle vztahu (363)

$$y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3}. \qquad (379)$$

Obdobným způsobem stanovíme souřadnici $x_t = b/3$ trojúhelníka na obr. 263. Trojúhelník však musíme rozdělit na elementární proužky rovnoběžné se souřadnicovou osou Y.

Příklad 171

Stanovte analyticky i graficky polohu těžiště lichoběžníka na obr. 267.

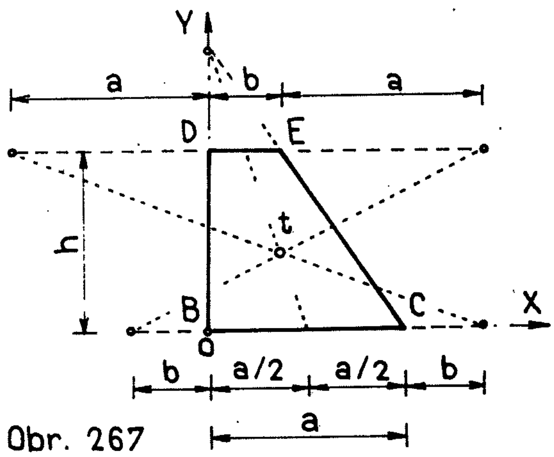
Řešení

Souřadnice x_t, y_t těžiště t

$$x_t = \frac{a^2 + ab + b^2}{3\,(a+b)}\;;\quad y_t = \frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{h}{3}. \qquad (380)$$

Graficky lze polohu těžiště t lichoběžníka na obr. 267 sestrojit takto:

Na prodlouženou horní základnu vyneseme od bodů D, E délku spodní základny a a na prodlouženou dolní základnu od bodů B, C délku horní základny b. Spojíme-li křížem koncové body těchto úseček, leží v jejich průsečíku hledané těžiště t lichoběžníka.



Obr. 267

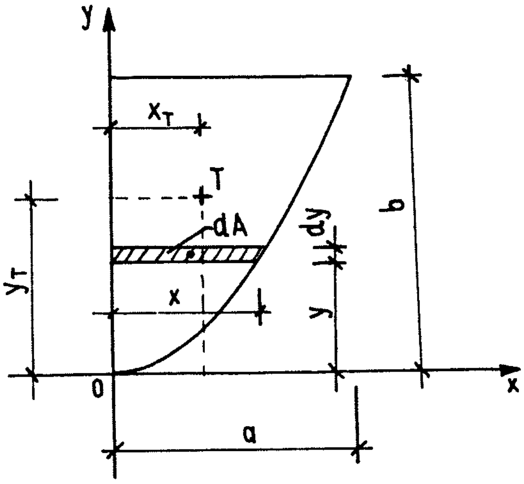
P Ř Í K L A D 2.52

Vypočtěte polohu těžiště poloviny parabolické úseče (obr. 2.90), jestliže parabola má osu v ose y a vrchol v bodě 0,

Rovnice paraboly

$$x^2 = 2p \cdot y \qquad a^2 = 2pb \qquad x^2 = \frac{a^2}{b} \cdot y \qquad y = \frac{b}{a^2} \cdot x^2$$

Diferenciál plochy



Obr. 2.90

$$dA = x \cdot dy$$

$$dy = 2 \cdot \frac{b}{a^2}\, x\, dx$$

$$dA = 2\,\frac{b}{a^2} \cdot x^2\, dx$$

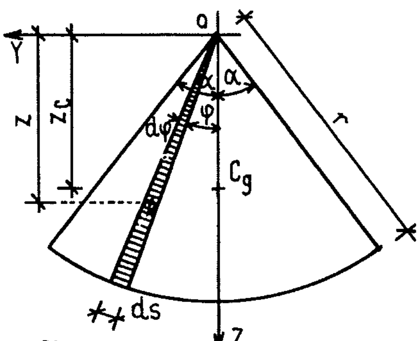
Souřadnice těžiště

$$x_T = \frac{\int_0^a \frac{x}{2} \cdot 2\frac{b}{a^2} x^2\, dx}{\int_0^a 2\frac{b}{a^2} x^2\, dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{3}{8}\,a$$

$$y_T = \frac{\int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 \cdot 2\frac{b}{a^2} x^2 dx}{\int_0^a 2\frac{b}{a^2} x^2\, dx} = \frac{\frac{b}{a^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{3}{5}\,b$$

Příklad 2.6

Z a d á n í : Určit těžiště kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu 2α (obr. 2.13).



Obr. 2.13

Ř e š e n í : Těžiště kruhové výseče leží na ose symetrie Z ve vzdálenosti

$$z_c = \frac{S_Y}{A} \qquad \text{od středu kruhu } 0\,.$$

Platí :

$$ds = r\,d\varphi\,, \qquad z = \frac{2}{3}\, r \cos\varphi$$

$$dA = \frac{1}{2}\, r\, ds = \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi$$

$$A = \int_A dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi = 2\int_0^{\alpha} \frac{1}{2}\, r^2 d\varphi = r^2\alpha$$

$$S_Y = \int_{-\alpha}^{\alpha} z\, dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3}\, r \cos\varphi\; \frac{1}{2}\, r^2 d\varphi = \frac{2}{3}\, r^3 \sin\alpha$$

$$z_c = \frac{\frac{2}{3}\, r^3 \sin\alpha}{r^2\alpha} = \frac{2}{3}\, r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,.$$

Při $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se kruhová výseč mění v půlkruh a pro z_c platí :

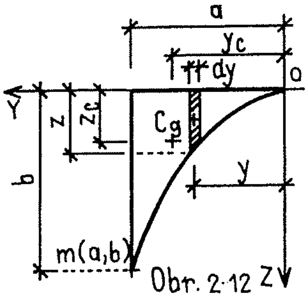
$$z_c = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin 90^\circ}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4r}{3\pi}\,, \qquad C_g\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$$

Příklad 2.5

Z a d á n í : Určit těžiště parabolického trojúhelníka (obr. 2.12) .

Ř e š e n í : Rovnice paraboly, která má vrchol v počátku a jejíž osa leží v ose Z , má v kartézských souřadnicích tvar $y^2 = 2pz$. Její ohnisko má souřadnice $(0, \frac{p}{2})$, řídící přímka má rovnici $z = -\frac{p}{2}$. Pro bod $m(a, b)$ platí

$$a^2 = 2pb \Rightarrow 2p = \frac{a^2}{b} .$$



Obr. 2.12

Rovnice paraboly má tvar

$$y^2 = \frac{a^2}{b} z$$

nebo $$z = \frac{b}{a^2} y^2 .$$

Plocha parabolického trojúhelníka

$$A = \int_0^a z\,dy = \int_0^a \frac{b}{a^2} y^2\,dy = \frac{b\,a^3}{3a^2} = \frac{ab}{3} .$$

Statický moment plochy k ose Y je

$$S_Y = \int_0^a \frac{z}{2} z\,dy = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^4} \int_0^a y^4\,dy = \frac{1}{10} ab^2 ,$$

pak $$z_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{\frac{1}{10} ab^2}{\frac{ab}{3}} = \frac{3}{10} b .$$

Statický moment plochy k ose Z je

$$S_Z = \int_0^a y\,z\,dx = \frac{b}{a^2} \int_0^a y^3\,dx = \frac{1}{4} a^2 b ,$$

pak $$y_c = \frac{S_Z}{A} = \frac{\frac{1}{4} a^2 b}{\frac{ab}{3}} = \frac{3}{4} a$$

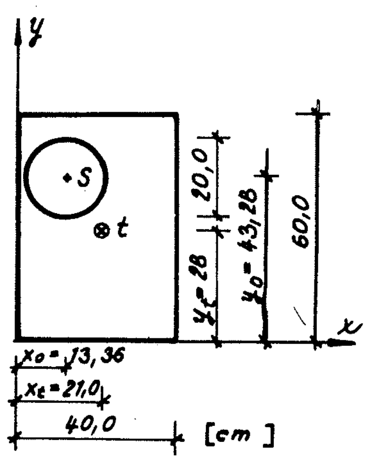
$$C_g \left(\frac{3}{4} a \;,\; \frac{3}{10} b \right) .$$

P ř í k l a d 4.8. **Kruhový otvor o průměru 20 cm umístěte do obdélníka 40/60 cm tak, aby souřadnice těžiště složeného obrazce vzhledem k osám x, y (viz obr. 4.10) byly x_t = 18 cm, y_t = 28 cm.**
Označme hledané souřadnice středu kruhového otvoru x_o, y_o

A = 240,0 − 3,1415 . 10,0^2 = 2085,8 cm^2

U_x = 40 . 60 . 30 − 3,1415 . 10^2 . y_o =
= (72 . 10^3 − 314,15 y_o) cm^3

U_y = 40 . 60 . 20 − 3,1415 . 10^2 . x_o =
= (48 . 10^3 − 314,15 x_o) cm^3



Obr. 4.10.

$$28 = \frac{72 \cdot 10^3 - 314{,}15\, y_o}{2085{,}8} \Rightarrow y_o = 43{,}28 \text{ cm}$$

$$21 = \frac{48 \cdot 10^3 - 314{,}15}{2085{,}8} \Rightarrow x_o = 13{,}36 \text{ cm}$$

Príklad 54. Dve naznačené paraboly (*I*, *II*) majú spoločný vrchol a ich osi symetrie stoja na seba kolmo. Určte ťažisko vyšrafovanej plochy, ktorú obidve paraboly spolu uzatvárajú (*obr. 54*).

Riešenie:

Táto plocha je rozdielom plochy parabolického trojuholníka F_1 a parabolického trojuholníka s plochou F_2.

$$F_1 = \frac{2}{3}\,ab; \quad F_2 = \frac{1}{3}\,ab$$

Ťažiská týchto plôch majú súradnice

$$x_1 = \frac{3}{5}\,a; \quad y_1 = \frac{3}{8}\,b$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\,a; \quad y_2 = \frac{3}{10}\,b$$

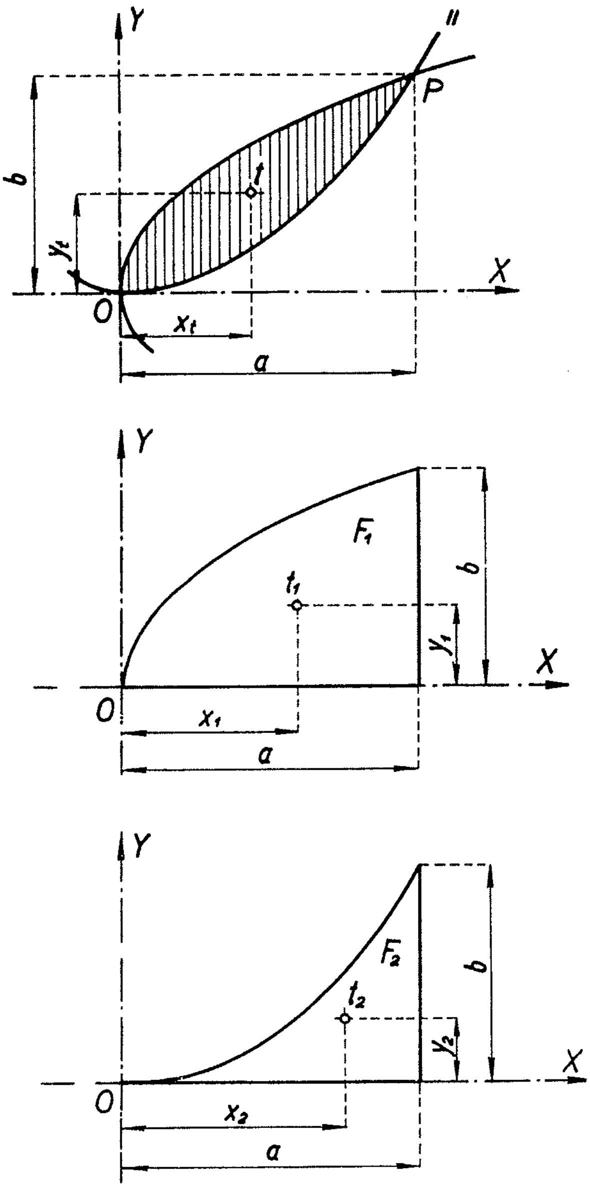
Teda súradnice hľadaného ťažiska

$$x_t = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\,ab\,\frac{3}{5}\,a - \frac{1}{3}\,ab\,\frac{3}{4}\,a}{\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}\,ab} = \frac{9}{20}\,a$$

$$y_t = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\,ab\,\frac{3}{8}\,b - \frac{1}{3}\,ab\,\frac{3}{10}\,b}{\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}\,ab} = \frac{9}{20}\,b$$



Obr. 54

P Ř Í K L A D 2.53

Vypočtěte polohu těžiště plochy dané dle obr. 2.91

Zvolíme souřadný systém 0 , x , y .
Plochu rozdělíme na dvě plochy konečné velikosti, plochu obdélníka a trojúhelníka.

Souřadnice těžišť

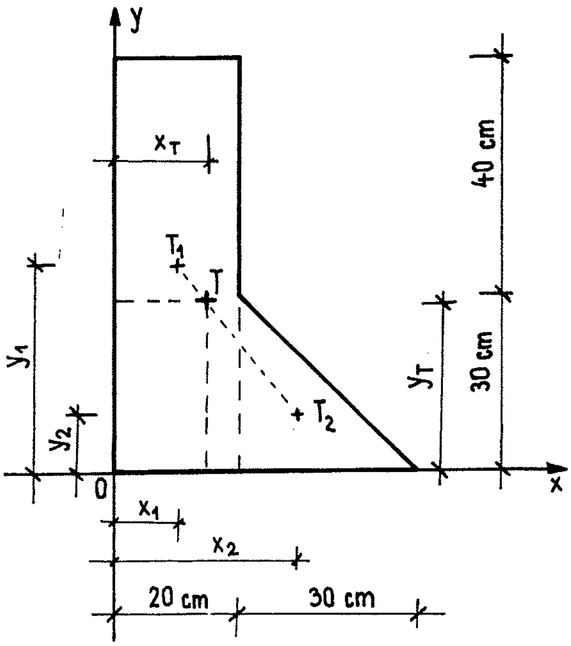
i	A [cm²]	x_i [cm]	y_i [cm]
1	1400	10	35
2	450	30	10

$$\sum_{i=1}^{2} A_i = A = 1850 \text{ cm}^2$$

Poloha těžiště

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i A_i}{A} = \frac{10.1400+30.450}{1850} = 14{,}87 \text{ cm}$$

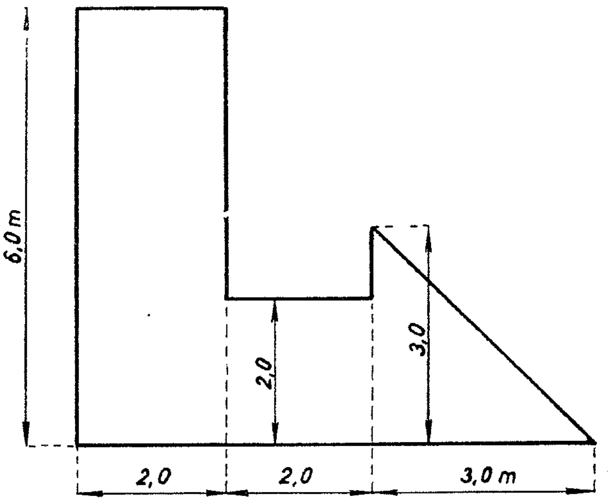
$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_i A_i}{A} = \frac{35.1400+10.450}{1850} = 28{,}92 \text{ cm}$$



Je zřejmé, že při dělení plochy (na dvě základní plochy) leží těžiště celé plochy na spojnici těžišť základních ploch.

Obr. 2.91

Príklad 49. Zistite počtársky ~~aj graficky~~ ťažisko nesymetrického prierezu naznačeného na *obr. 49.*



Riešenie:

Plochu prierezu môžeme rozložiť na plochu obdĺžnika, štvorca a trojuholníka. Nájdeme si ťažiská t_1, t_2, t_3. Zvolíme pravouhlé súradnicové osi XY a súradnice ťažiska t celého prierezu určíme z výrazov

$$x_t = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{2{,}0 \,.\, 6{,}0 \,.\, 1{,}0 + 2{,}0 \,.\, 2{,}0 \,.\, 3{,}0 + 3{,}0\frac{3{,}0}{2}5{,}0}{2{,}0 \,.\, 6{,}0 + 2{,}0 \,.\, 2{,}0 + 3{,}0\frac{3{,}0}{2}} =$$

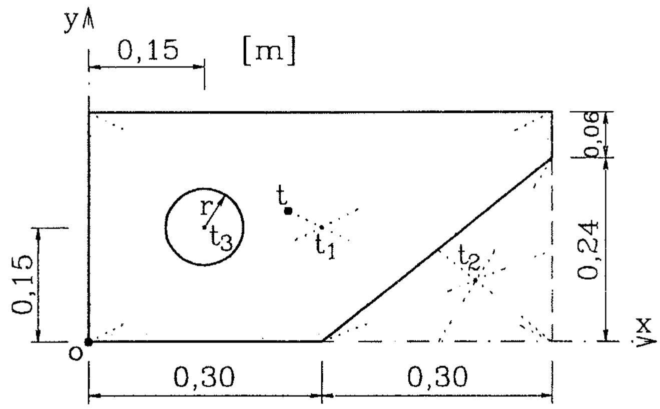
$$= \frac{12{,}0 + 12{,}0 + 22{,}5}{12{,}0 + 4{,}0 + 4{,}5} = \frac{46{,}5}{20{,}5} = \doteq 2{,}27 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{2{,}0 \,.\, 6{,}0 \,.\, 3{,}0 + 2{,}0 \,.\, 2{,}0 \,.\, 1{,}0 + 3{,}0 \,.\, 3{,}0\frac{1}{2}\, 1{,}0}{2{,}0 \,.\, 6{,}0 + 2{,}0 \,.\, 2{,}0 + 3{,}0 \,.\, 3{,}0\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{36{,}0 + 4{,}0 + 4{,}5}{20{,}5} = \frac{44{,}5}{20{,}5} \doteq 2{,}17 \text{ m}$$

PŘÍKLAD 4.2

Stanovte polohu těžiště složeného obrazce oslabeného kruhovým otvorem o poloměru $r = 0{,}05\ m$ podle obr. 4.12. Délkové rozměry jsou v metrech.



Obr. 4.12. Složený obrazec

Řešení

Složený obrazec představuje obdélník s plochou A_1 a těžištěm t_1, od něhož odpočítáme trojúhelník s plochou A_2 a těžištěm t_2 a kruhový otvor s plochou A_3 a těžištěm t_3.

Plochy jednotlivých částí obrazce

$$A_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18\ m^2,\quad A_2 = -\frac{1}{2}\,0{,}3 \cdot 0{,}24 = -0{,}036\ m^2,\quad A_3 = -3{,}142 \cdot 0{,}05^2 = -7{,}854 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

a jejich těžiště mají souřadnice

$$t_1\,(0{,}3;\,0{,}15)\ m\,,\quad t_2\,(0{,}5;\,0{,}08)\ m\,,\quad t_3\,(0{,}15;\,0{,}15)\ m\,.$$

Celková plocha složeného obrazce

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i = 0{,}18 - 0{,}036 - 7{,}854 \cdot 10^{-3} = 136{,}146 \cdot 10^{-3}\ m^2,$$

statické momenty k souřadnicovým osám x, y

$$U_x = 0{,}15 \cdot 0{,}18 - 0{,}08 \cdot 0{,}036 - 0{,}15 \cdot 7{,}854 \cdot 10^{-3} = 22{,}942 \cdot 10^{-3}\ m^3,$$

$$U_y = 0{,}3 \cdot 0{,}18 - 0{,}5 \cdot 0{,}036 - 0{,}15 \cdot 7{,}854 \cdot 10^{-3} = 34{,}822 \cdot 10^{-3}\ m^3,$$

takže souřadnice těžiště jsou

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{34{,}822 \cdot 10^{-3}}{136{,}146 \cdot 10^{-3}} = 0{,}256\ m\,,\qquad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{22{,}942 \cdot 10^{-3}}{136{,}146 \cdot 10^{-3}} = 0{,}169\ m\,.$$

Příklad 2.8

Z a d á n í : Určit polohu těžiště složeného rovinného obrazce dle obr. 2.15 .
Ř e š e n í : Za základní geometrické útvary lze volit čtverec (cdei) č.1, kruhovou výseč (ajg) č.2 a čtverec (bjfi) č.3, kde se překrývají obrazce č.1 a č.2, uvažovat jako otvor. Zvolíme souřadný systém Y , Z . Na základě symetrie obrazce platí, že $y_C = z_C$, stačí tedy určit jen jednu souřadnici. Výpočet je uspořádán v tabulce 2.2 .

$$A_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 0{,}4^2 = 0{,}1256 \ m^2$$

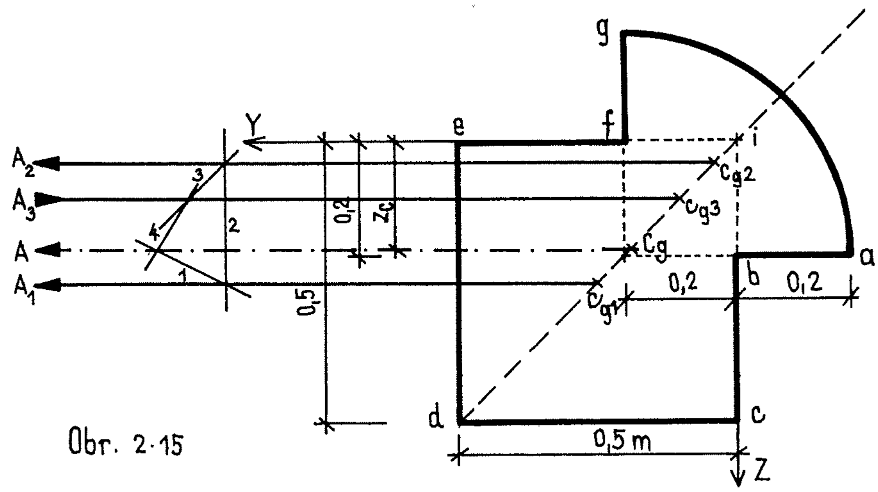
$$z_2 = 0{,}2 - 0{,}424 \cdot 0{,}4 = 0{,}03 \ m$$

$$z_C = \frac{62{,}27.10^{-3}}{33{,}56.10^{-2}} = 0{,}185 \ m$$

C_g (0,185 ; 0,185) v souřadném systému Y , Z .

TABULKA 2.2

OBR. č.	$A_j \cdot 10^2$ [m²]	$z_j \cdot 10^1$ [m]	$S_{Y_j} \cdot 10^3$ [m]
1	25,00	2,5	62,50
2	12,56	0,3	3,77
3	-4,00	1,0	-4,00
Σ	33,56		62,27



Obr. 2·15

P ř í k l a d 4.7. Určete těžiště složeného obrazce podle obr. 4.9.

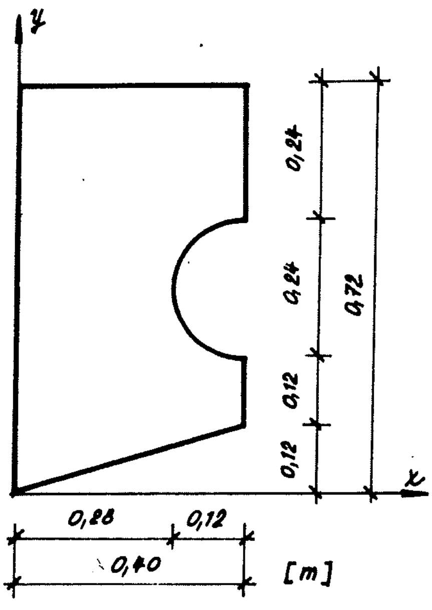
$$A = 4{,}0 \ . \ 7{,}2 \ . \ 10^{-2} - 3{,}142 \ . \ \frac{1{,}2^2}{2} - 0{,}4 \ . \ 0{,}12 \ . \ 0{,}5 = \underline{24{,}14.10^{-2} \ m}$$

$$U_x = 0{,}4 \ . \ 0{,}72 \ . \ 0{,}36 - 3{,}142 \ . \ \frac{1{,}2^2}{2} \ . \ 0{,}36 - 0{,}4 \ . \ 0{,}12 \ . \ 0{,}05 \ . \ 0{,}12 \ . \ \frac{2}{3} = \underline{\underline{93{,}62.10^{-3} m^3}}$$

$$U_y = 0{,}4 \ . \ 0{,}72 \ . \ 0{,}2 - 3{,}142 \ . \ \frac{0{,}12^2}{2} \ . \ (0{,}40 - 0{,}12 \ . \ 0{,}424) - 0{,}40 \ . \ 0{,}12 \ . \ 0{,}5 \ . \ \frac{0{,}8}{3} = \underline{\underline{43{,}30 \ . \ 10^{-3} m^3}}$$

$$x_t = \frac{43{,}30.10^{-3}}{24{,}14.10^{-2}} = \underline{\underline{0{,}179 \ m}}$$

$$y_t = \frac{93{,}62.10^{-3}}{24{,}14.10^{-2}} = \underline{\underline{0{,}388 \ m}}$$



Obr. 4.9.

Příklad 2.7

Z a d á n í : Určit polohu těžiště složeného rovinného obrazce dle obr. 2.14 .

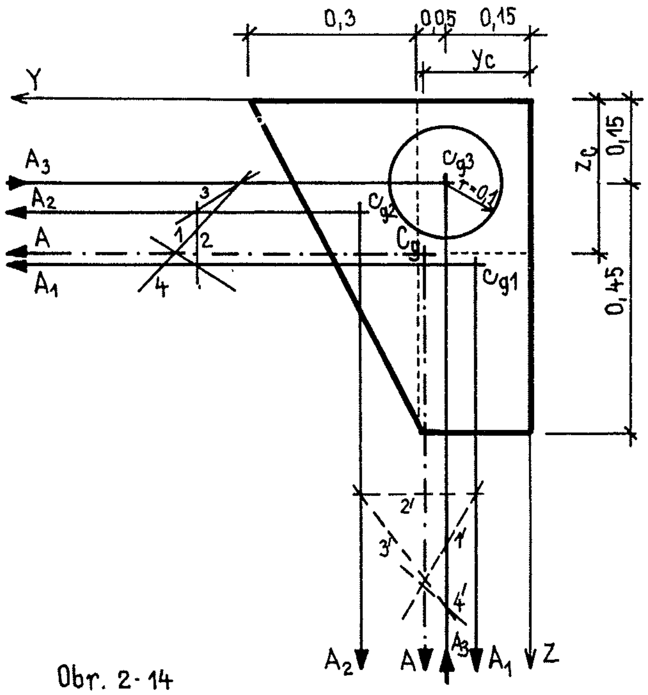
Ř e š e n í : Obrazec rozdělím na základní geometrické útvary - obdélník č.1, trojúhelník č.2 a kruhový otvor č.3 . Zvolím polohu souřadného systému Y , Z a vzhledem k němu určím souřadnice těžišť C_{gj} (y_j , z_j) a plochy A_j jednotlivých obrazců :

$$A_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}120 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}090 \text{ m}^2$$

$$A_3 = -\pi\, 0{,}1^2 = -0{,}031 \text{ m}^2$$ - otvoru přiřadíme záporný vektor

Výpočet souřadnic těžiště celého obrazce podle (2.4) lze uspořádat do tabulky - viz tabulka 2.1



Obr. 2-14

$$y_C = \frac{\sum_{j=1}^{3} S_{Z_j}}{\sum_{j=1}^{3} A_j} = \frac{0{,}034}{0{,}179} \doteq 0{,}19 \text{ m}$$

$$z_C = \frac{\sum_{j=1}^{3} S_{Y_j}}{\sum_{j=1}^{3} A_j} = \frac{0{,}049}{0{,}179} \doteq 0{,}274 \text{ m}$$

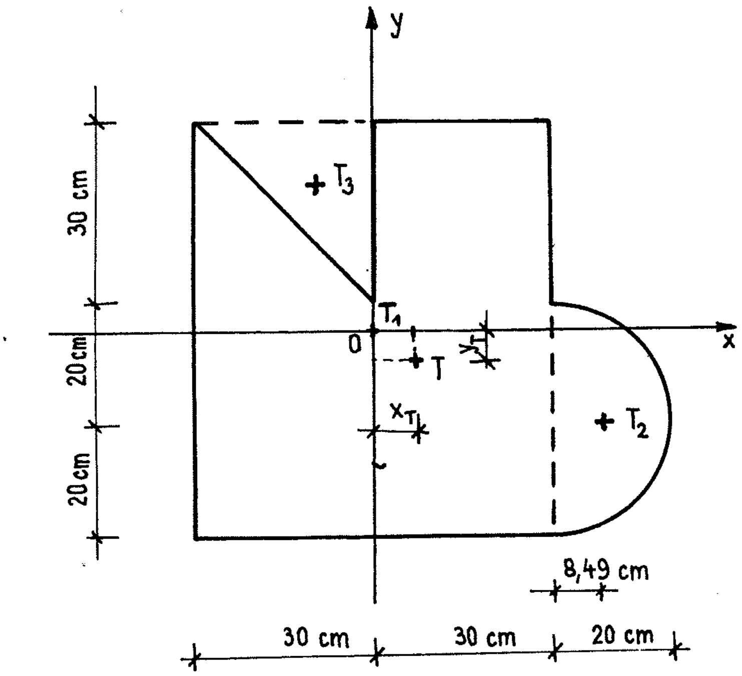
C_g (0,19 ; 0,274) m

TABULKA 2.1

OBRAZEC	OBR. č.	A_j [m²]	y_j [m]	z_j [m]	$S_{Y_j} = z_j A_j$ [m³]	$S_{Z_j} = y_j A_j$ [m³]
▭	1	0,120	0,10	0,30	0,036	0,012
◺	2	0,090	0,30	0,20	0,018	0,027
○	3	-0,031	0,15	0,15	-0,005	-0,005
	Σ	0,179			0,049	0,034

P Ř Í K L A D 2.54

Stanovte početně polohu těžiště složeného rovinného obrazce (obr. 2.92) .



Obr. 2.92

Obrazec rozdělíme na tři základní plochy. Plochu a statický moment třetího obrazce budeme odečítat, protože se o ni obrazec zmenšuje. Volíme souřadný systém 0 , x , y .

Plochy a souřadnice těžišť

	i	A_i [dm²]	x_i [dm]	y_i [dm]
	1	42	0	0
	2	6,28	3,849	-1,5
–	3	4,5	-1	2,5

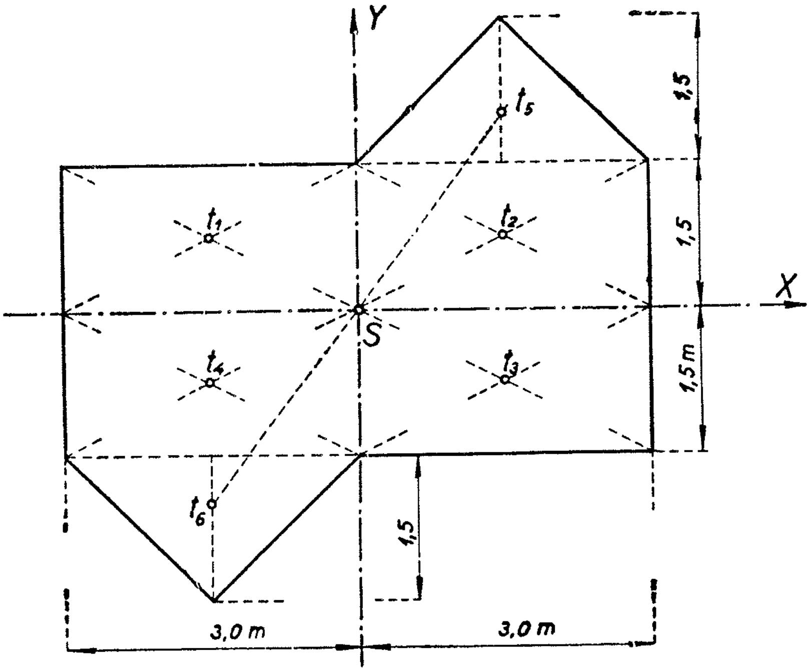
$$\sum_{i=1}^{3} A_i = A = 43,78 \text{ dm}^2$$

Poloha těžiště

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i A_i}{A} = \frac{3,849.6,28-(-1).4,5}{43,78} = 0,655 \text{ dm} = 6,55 \text{ cm}$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i A_i}{A} = \frac{(-15).6,28-2,5.4,5}{43,78} = -0,472 \text{ dm} = -4,72 \text{ cm}$$

Príklad 51. Určte ťažisko prierezu naznačeného na *obr. 51*



Obr. 51

Riešenie:

Keďže naznačené prierezy sú stredove symetrické, ťažisko leží v strede symetrie *s*. Ak celý prierez rozdelíme na časti, ktorých ťažiská ľahko určíme, potom spojnice ťažísk zodpovedajúcich plôšok vľavo a vpravo od zvislej osi *Y* sa pretínajú v jedinom bode *s*, ktorý je ťažiskom celého prierezu.

P Ř Í K L A D 2.55

Vypočtěte polohu těžiště složeného rovinného obrazce (obr. 2.93, resp. 2.94) .

a) Obrazec rozdělíme na tři základní plochy.

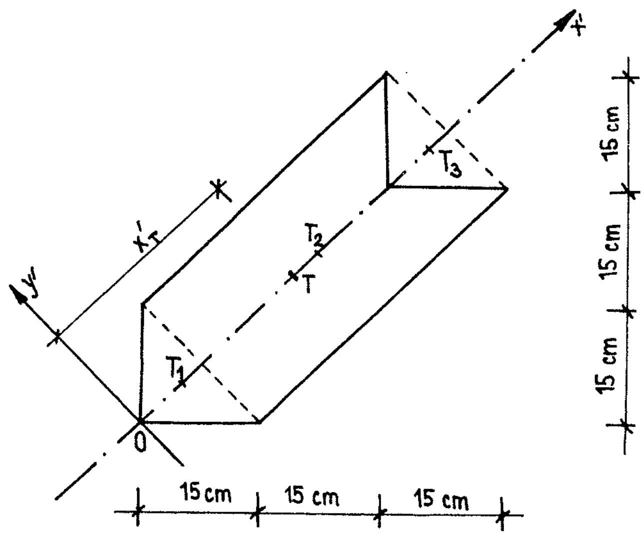
Osa x' je osou symetrie, těžiště obrazce leží na ose x', platí

$$y'_T = 0 .$$

Plochy a souřadnice těžišť

i	A_i [dm²]	x'_i [dm]
1	1,125	0,707
2	9,00	3,182
– 3	1,125	4,95

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = A = 9\ \mathrm{dm}^2$$



Obr. 2.93

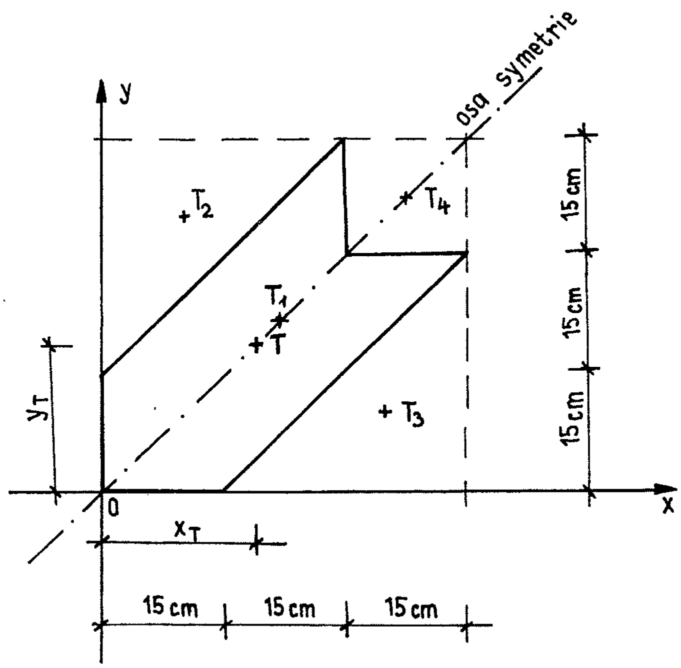
$$x'_T = \frac{0{,}707.1{,}125+3{,}182.9-4{,}95.1{,}125}{9} = 2{,}65\ \mathrm{dm} = 26{,}5\ \mathrm{cm}$$

b) Obrazec rozdělíme na čtyři základní plochy.

Plochy a souřadnice těžišť

i	A_i [dm²]	x_i [dm]
1	20,25	2,25
– 2	4,5	1
– 3	4,5	3,5
– 4	2,25	3,75

$$\sum_{i=1}^{4} A_i = A = 9\ \mathrm{dm}^2$$



Obr. 2.94

$$x_T = \frac{2{,}25.20{,}25-1.4{,}5-3{,}5.4{,}5-3{,}75.2{,}25}{9} = 1{,}874\ \mathrm{dm} = 18{,}74\ \mathrm{cm} = y_T$$

Příklad 167

Stanovte polohu těžiště t složeného rovinného obrazce na obr. 264 s trojúhelníkovým a půlkruhovým otvorem.

Řešení

Vyšetřovaný složený rovinný obrazec se skládá z parabolické úseče 1 a obdélníka 2, který je oslaben trojúhelníkem 3 a kruhovou výsečí – – půlkruhem 4. Trojúhelník a kruhová výseč představují ve složeném rovinném obrazci otvory a jejich plochy bereme se znaménkem mínus.

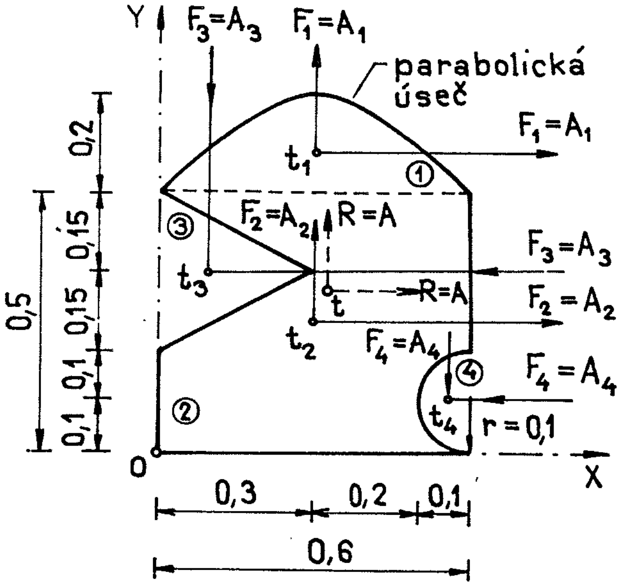
Plochy jednotlivých částí

$$A_1 = \frac{2}{3} l_1 v_1 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 . 0{,}2 = 0{,}08\ m^2,$$

$$A_2 = b_2 h_2 = 0{,}6 . 0{,}5 = 0{,}30\ m^2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} b_3 h_3 = -\frac{1}{2}\, 0{,}3 . 0{,}3 = -0{,}045\ m^2,$$

$$A_4 = -\frac{1}{2} \pi r^2 = -\frac{1}{2}\, \pi . 0{,}1^2 = -0{,}0157\ m^2.$$



Obr. 264

Plocha složeného obrazce A

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i = 0{,}08 + 0{,}30 - 0{,}045 - 0{,}0157 = 0{,}319\ m^2.$$

Souřadnice x_{t_i}, y_{t_i} těžišť t_i jednotlivých částí $i = 1, 2, 3, 4$ ve zvoleném pravoúhlém souřadnicovém systému X, Y.

Parabolická úseč 1 (viz příklad 174):

$$x_{t_1} = \frac{l_1}{2} = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3\ m;\ y_{t_1} = 0{,}5 + \frac{2}{5} v_1 = 0{,}5 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}2 = 0{,}58\ m;\quad t_1\,(0{,}3;\ 0{,}58)\ m;$$

obdélník 2 :

$$x_{t_2} = 0{,}5\, b_2 = 0{,}5 . 0{,}6 = 0{,}3\ m,\ y_{t_2} = 0{,}5\, h_2 = 0{,}5 . 0{,}5 = 0{,}25\ m,\quad t_2\,(0{,}3;\ 0{,}25)\ m;$$

trojúhelník 3 (viz příklad 166):

$$x_{t_3} = \frac{1}{3} h_3 = \frac{1}{3}\, 0{,}3 = 0{,}1\ m,\ y_{t_3} = 0{,}2 + \frac{1}{2} b_3 = 0{,}2 + \frac{1}{2}\, 0{,}3 = 0{,}35\ m,\ t_3\,(0{,}1;\ 0{,}35)\ m;$$

kruhová výseč (viz příklad 165 a rov. 371):

$$x_{t_4} = 0{,}6 - \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = 0{,}6 - \frac{4}{3} \cdot \frac{0{,}1}{\pi} = 0{,}557\ m,\ y_{t_4} = r = 0{,}1\ m,\quad t_4\,(0{,}557;\ 0{,}1)\ m.$$

Statické momenty U_X a U_Y rovinného obrazce k osám X a Y

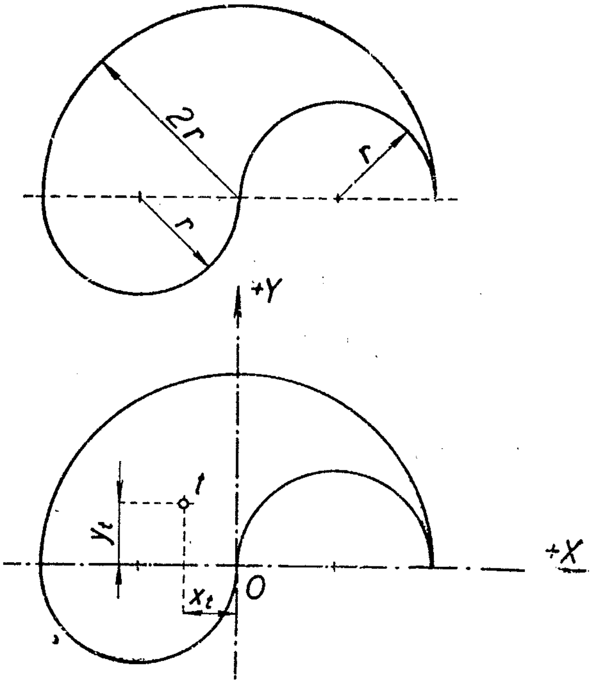
$$U_X = \sum_{i=1}^{4} U_i y_i = 0{,}08 . 0{,}58 + 0{,}30 . 0{,}25 + (-0{,}045)\, 0{,}35 + (-0{,}0157) . 0{,}1 = 0{,}104\ m^3,$$

$$U_Y = \sum_{i=1}^{4} U_i x_i = 0{,}08 . 0{,}3 + 0{,}30 . 0{,}3 + (-0{,}045)\, 0{,}1 + (-0{,}0157) \cdot 0{,}557 = 0{,}1008\ m^3.$$

Souřadnice x_t, y_t těžiště t složeného obrazce (rov. 365)

$$x_t = \frac{U_Y}{A} = \frac{0{,}1008}{0{,}319} = 0{,}315\ m;\quad y_t = \frac{U_X}{A} = \frac{0{,}104}{0{,}319} = 0{,}326\ m.$$

Príklad 53. Vypočítajte ťažisko prierezu naznačeného na *obr. 53.* Nech $r = 1{,}0$ m.



Obr. 53

Riešenie:

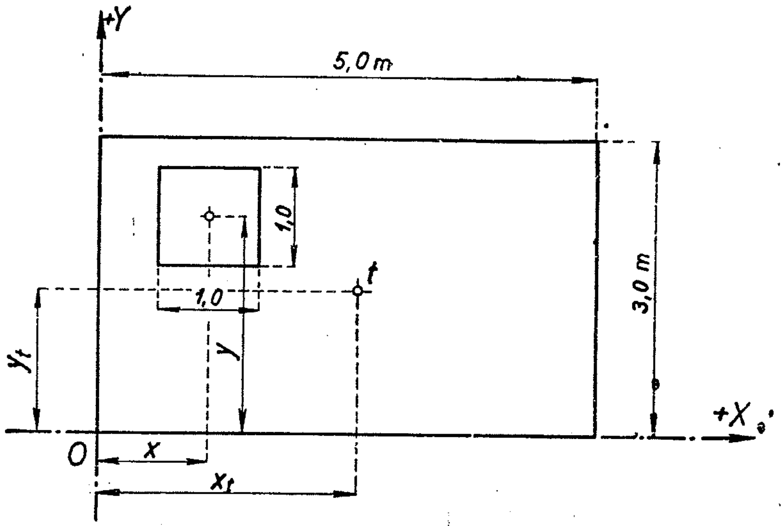
Nakreslíme pravouhlé súradnicové osi a súradnice ťažiska zistíme z výrazov

$$x_t = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{\frac{-\pi r^2}{2} r + \frac{\pi r^2}{2}(-r)}{\frac{\pi (2r)^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}} = -\frac{r}{2} = -0{,}5 \text{ m}$$

$$y_t = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{\frac{\pi(2r)^2}{2} \cdot \frac{4 \,.\, 2r}{3\pi} + \frac{\pi r^2}{2}\left(-\frac{4r}{3\pi}\right) - \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi}}{\frac{\pi(2r)^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}} =$$

$$= \frac{2r}{\pi} = \frac{2 \,.\, 1{,}0}{3{,}14} \doteq 0{,}64 \text{ m}$$

Príklad 50. Zo známej obdĺžnikovej steny (rozmerov 5/3) máme vyrezať štvorec *(obr. 50)* s danou stranou $a = 1{,}0$ m tak, aby ťažisko steny bolo v udanom bode $t(x_t = 2{,}6,\ y_t = 1{,}45$ m).



Obr. 50

Riešenie:

Vyjdeme zo vzťahov pre polohu ťažiska:

$$x_t = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}; \quad y_t = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i}$$

do ktorých dosadíme za známe súradnice ťažiska:

$$2{,}6 = \frac{5{,}0 \cdot 3{,}0 \cdot 2{,}5 - 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot x}{5{,}0 \cdot 3{,}0 - 1{,}0 \cdot 1{,}0}$$

z čoho vypočítame x:

$$2{,}6 = \frac{37{,}5 - x}{14{,}0}; \quad x = 1{,}1 \text{ m}$$

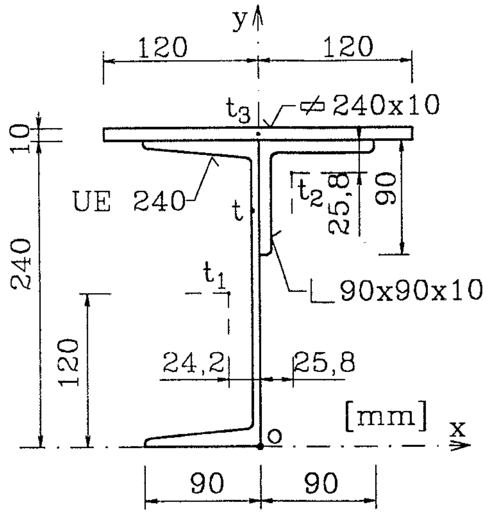
podobne platí:

$$1{,}45 = \frac{5{,}0 \cdot 3{,}0 \cdot 1{,}5 - 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot y}{5{,}0 \cdot 3{,}0 - 1{,}0 \cdot 1{,}0}$$

$$1{,}45 = \frac{22{,}5 - y}{14{,}0}; \quad y = 2{,}2 \text{ m}$$

PŘÍKLAD 4.3

Stanovte polohu těžiště průřezu složeného z profilu UE 240, profilu rovnoramenného úhelníku └ 90 × 90 × 10 a z pásnice 240 × 10 *mm* podle obr. 4.13.



Obr. 4.13. Průřez z válcovaných profilů

Řešení

Velikosti ploch a polohy těžišť válcovaných profilů zjistíme z tabulek, např. [2]. Polohy těžišť jsou okótovány na obr. 4.13. Plochy válcovaných profilů převzaté z tabulek

$$A_1 = 3060\,mm^2, \qquad A_2 = 1710\,mm^2$$

a plochu pásnice dopočítáme

$$A_3 = 240 \cdot 10 = 2400\,mm^2.$$

Souřadnice těžišť jednotlivých částí ve zvoleném souřadnicovém systému jsou

$$t_1\,(-24{,}2;\,120)\,mm, \qquad t_2\,(25{,}8;\,214{,}2)\,mm, \qquad t_3\,(0;\,245)\,mm.$$

Celková plocha obrazce

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i = 3060 + 1710 + 2400 = 7170\,mm^2,$$

statické momenty k souřadnicovým osám *x, y*

$$U_x = 120 \cdot 3060 + 214{,}2 \cdot 1710 + 245 \cdot 2400 = 1\,321\,482\,mm^3,$$

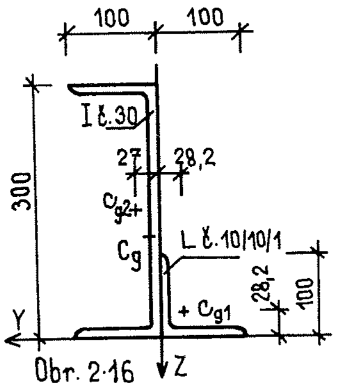
$$U_y = -24{,}2 \cdot 3060 + 25{,}8 \cdot 1710 + 0 \cdot 2400 = -29\,934\,mm^3$$

a souřadnice těžiště

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{-29\,934}{7170} = -4{,}17\,mm, \qquad y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{1\,321\,482}{7170} = 184{,}31\,mm.$$

Příklad 2.9

Z a d á n í : Určit polohu těžiště složeného rovinného obrazce z válcovaných profilů [č.30 a Lč.10/10/1 dle obr. 2.16 .



Obr. 2.16

Ř e š e n í : Profil L bereme jako obrazec č.1 a [profil jako obrazec č.2. Zvolíme souřadný systém a z tabulek např. /3/ kótujeme polohy těžišť C_{gj} najdeme plochy A_j jednotlivých profilů.
Výpočet podle (2.4) je sestaven v tabulce 2.3 .

TABULKA 2.3

OBR. č.	$A_j \cdot 10^{2}$ [mm²]	$y_j \cdot 10^{-1}$ [mm]	$z_j \cdot 10^{-1}$ [mm]	$S_{Yj} \cdot 10^{-3}$ [mm³]	$S_{Zj} \cdot 10^{-3}$ [mm³]
1	19,2	-2,82	-2,82	-54,144	-54,144
2	58,8	2,70	-15,00	-882,000	158,760
Σ	78,0			-936,144	104,616

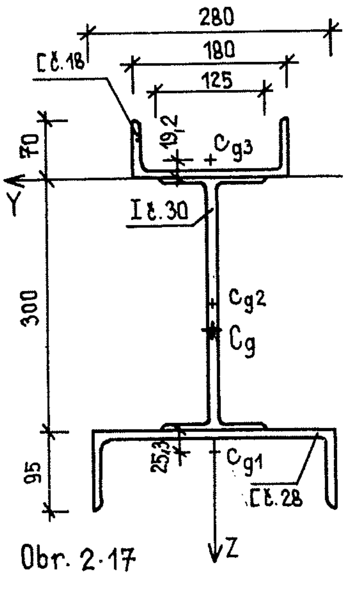
$$y_C = \frac{S_Z}{A} = \frac{104{,}616.10^3}{78{,}0.10^2} = +13{,}41 \text{ mm}$$

$$z_C = \frac{S_Y}{A} = -\frac{936{,}144.10^3}{78{,}0.10^2} = -120{,}02 \text{ mm}$$

C_g (+13,41 ; -120,02) mm .

Příklad 2.10

Z a d á n í : Určit polohu těžiště složeného obrazce dle obr. 2.17 .
Ř e š e n í : [č.28 obrazec č.1, I č.30 obrazec č.2, [č.18 obrazec č.3 .



Obr. 2.17

Zvolíme souřadný systém vzhledem k symetrii složeného obrazce. Osa Z je totožná s osou symetrie, proto hledáme jen souřadnici těžiště z_C (y_C = 0).
Poloha těžišť C_{gj} a velikosti ploch A_j určeny např. z /3/.
Výpočet podle (2.4) je sestaven v tabulce 2.4 .

TABULKA 2.4

OBR. č.	$A_j \cdot 10^{-2}$ /mm²/	$z_j \cdot 10^{-1}$ /mm/	$S_{Yj} \cdot 10^{-3}$ /mm³/
1	53,3	32,53	1 733,849
2	69,1	15,00	1 036,500
3	28,0	-1,92	-53,760
Σ	150,4		2 716,589

$$z_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{2\,716{,}589\ .\ 10^3}{150{,}4.10^2} = 180{,}62 \text{ mm}$$

C_g (0 ; 180,62) mm