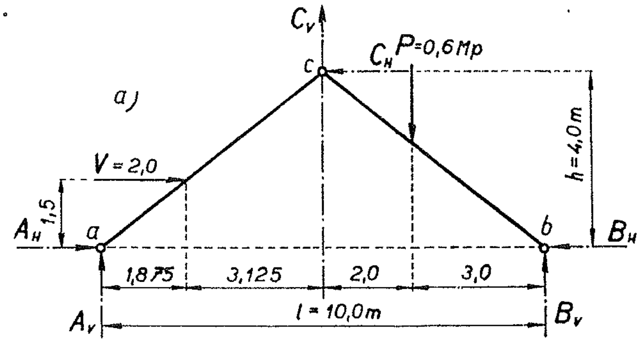
Príklad 176. Je daný súmerný trojkĺbový lomený nosník, zaťažený na ľavej doske vodorovnou silou $V = 2{,}0$ Mp a na pravej doske zvislou silou $P = 0{,}6$ Mp. Určte vonkajšie a vnútorné reakcie. Nech $l = 10{,}0$ m, $h = 4{,}0$ m *(obr. 176a)*.



Obr. 176a

Riešenie:

Zvislé zložky A_V, B_V šikmých reakcií A, B vypočítame z momentových podmienok k podperám a, b:

$$A_V l + V \,.\, 1{,}5 - P \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$A_V = \frac{-2{,}0 \,.\, 1{,}5 + 0{,}6 \,.\, 3{,}0}{10{,}0} = -0{,}12 \text{ Mp}$$

$$B_V l - P \,.\, 7{,}0 - V \,.\, 1{,}5 = 0$$

$$B_V = \frac{0{,}6 \,.\, 7{,}0 + 2{,}0 \,.\, 1{,}5}{10{,}0} = 0{,}72 \text{ Mp}$$

Vodorovné zložky reakcií zistíme z momentovej podmienky k bodu c:

$$A_V 5{,}0 - A_H h - V \,.\, 2{,}5 = 0$$

$$A_H = \frac{-0{,}12 \,.\, 5{,}0 - 2{,}0 \,.\, 2{,}5}{4{,}0} = -1{,}4 \text{ Mp}$$

$$B_V 5{,}0 - B_H h - P \,.\, 2{,}0 = 0$$

$$B_H = \frac{0{,}72 \,.\, 5{,}0 - 0{,}6 \,.\, 2{,}0}{4{,}0} = 0{,}6 \text{ Mp}$$

Správnosť výpočtu kontrolujeme napísaním súčtových podmienok *(obr. 176b)*.

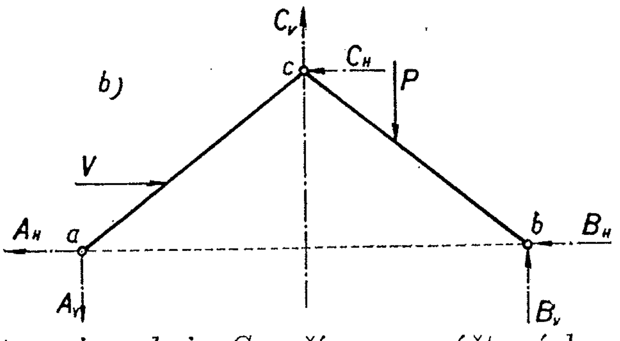
$$A_V + B_V - P = 0$$

$$-0{,}12 + 0{,}72 - 0{,}6 = 0$$

$$A_H + B_H + V = 0$$

$$-1{,}4 - 0{,}6 + 2{,}0 = 0$$

Výsledok je teda správny.



Obr. 176b

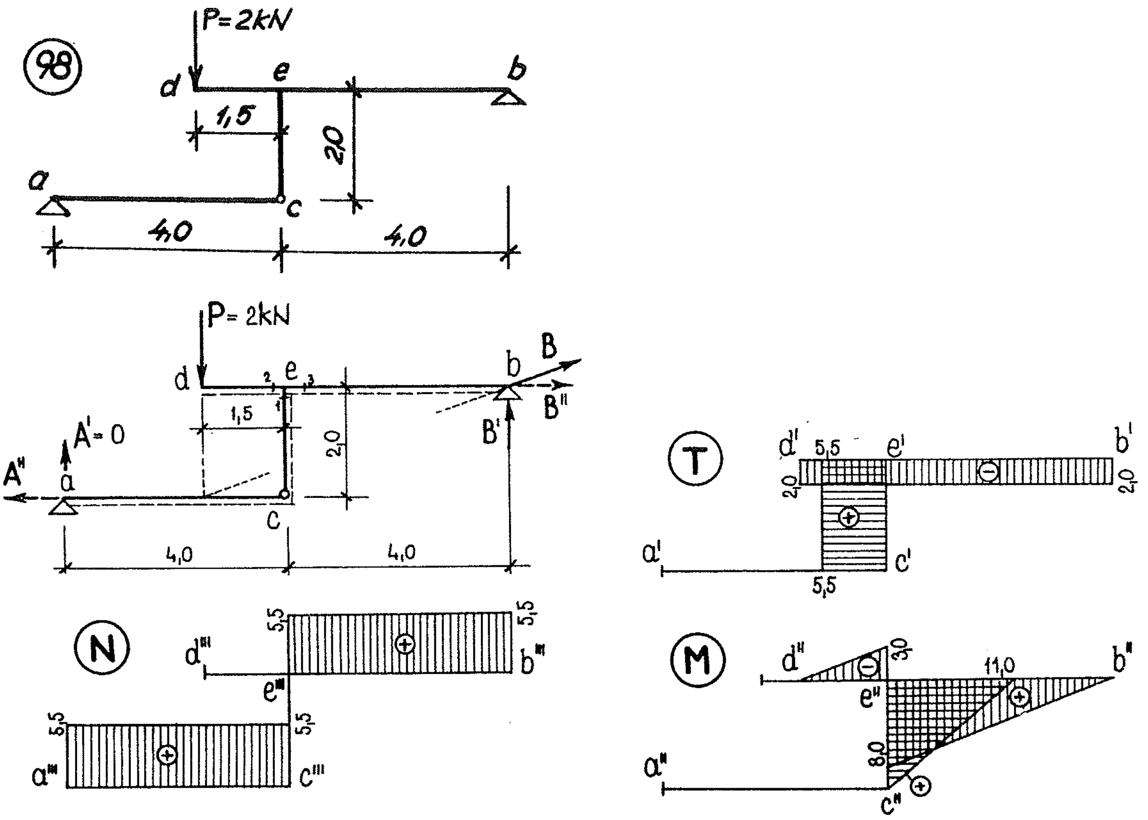
Zložky vnútornej reakcie C určíme zo súčtových podmienok rovnováhy vo zvislom a vodorovnom smere:

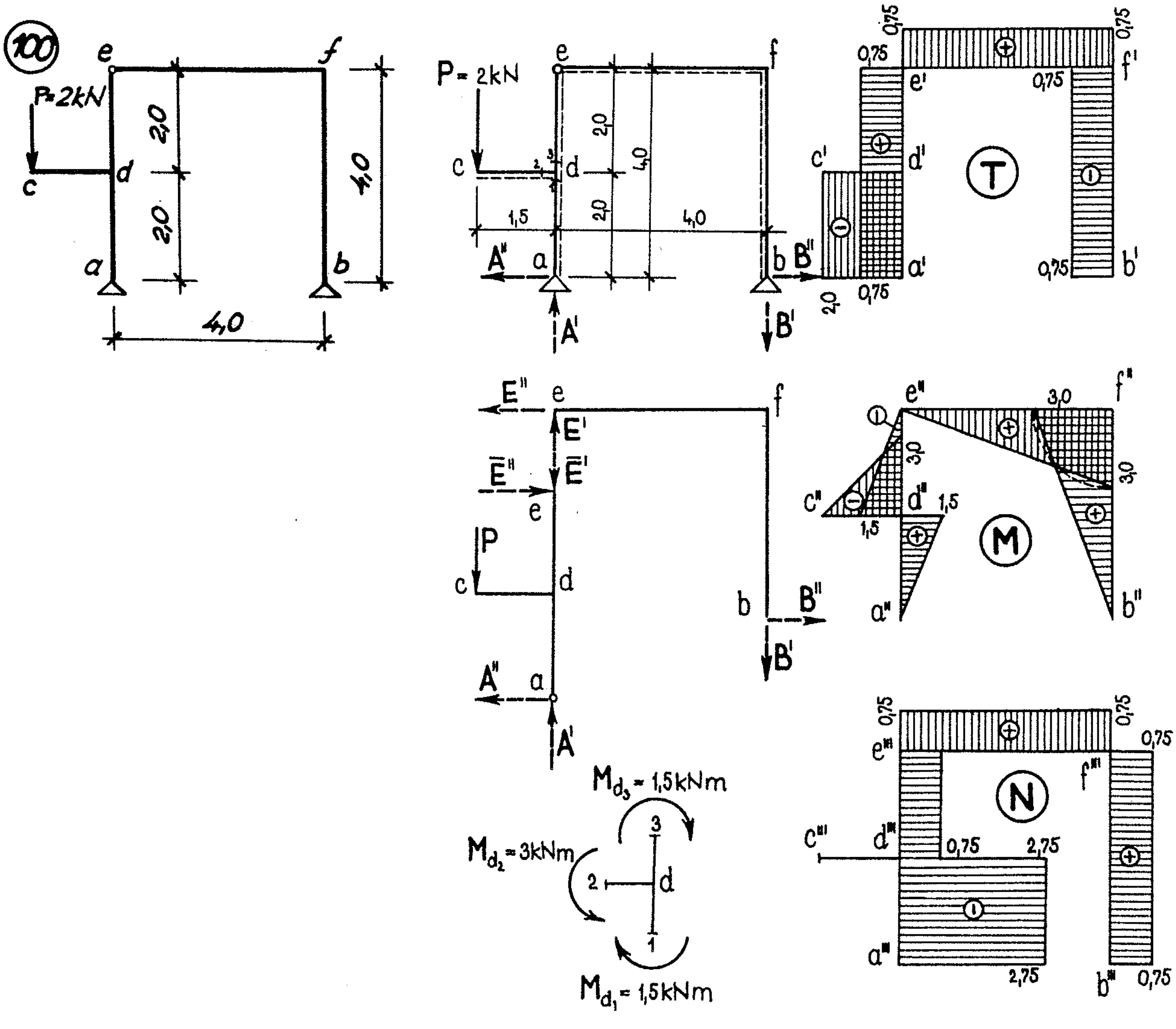
$$A_V + C_V = 0$$

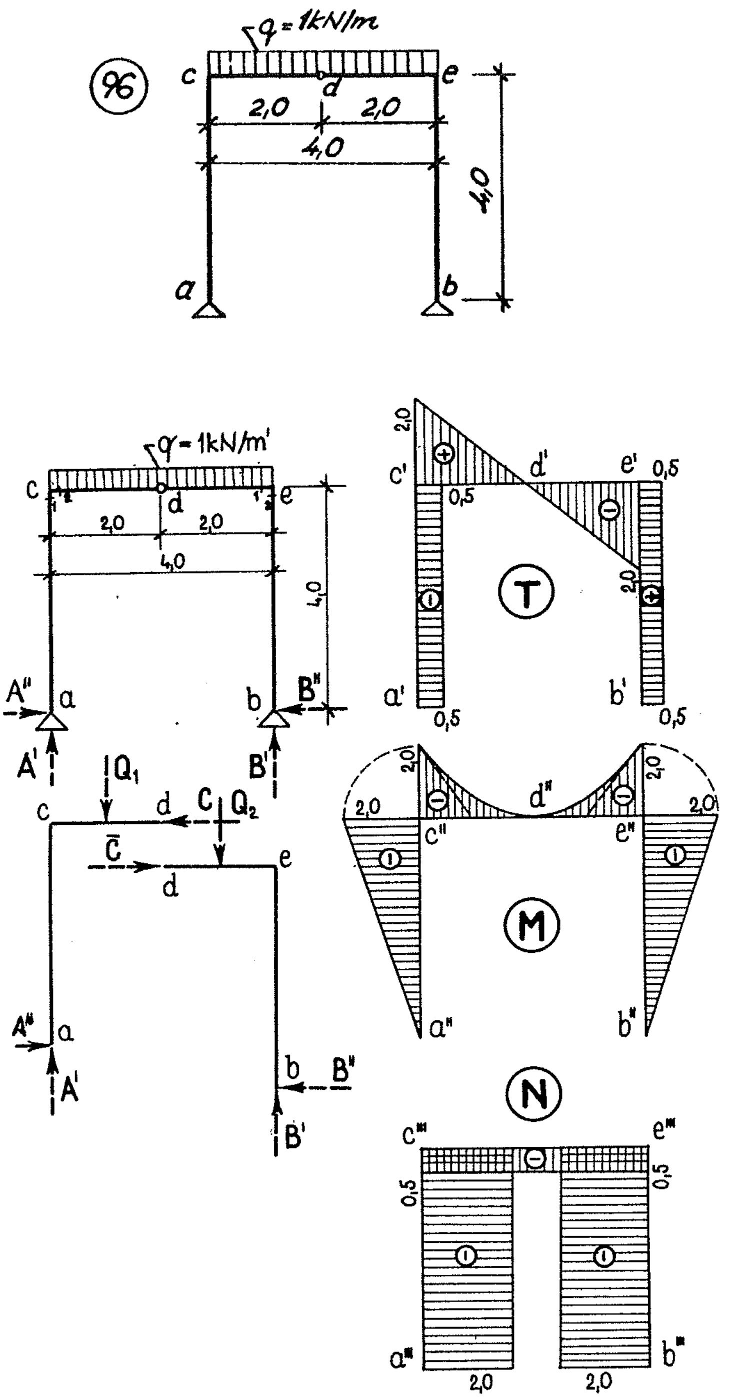
$$C_V = -A_V = 0{,}12 \text{ Mp} \leftarrow$$

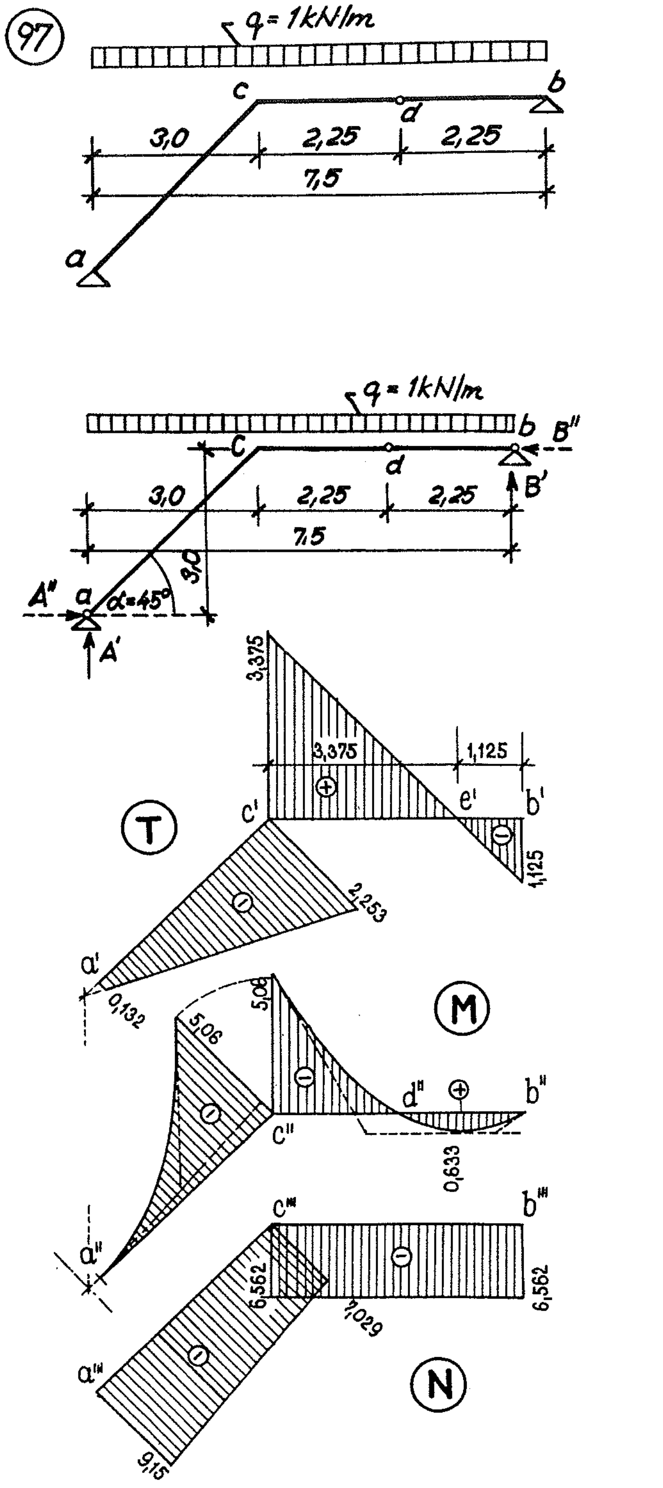
$$A_H + V - C_H = 0$$

$$C_H = A_H + V = -1{,}4 + 2{,}0 = 0{,}6 \text{ Mp} \leftarrow$$


98
P=2kN
A'=0
B
T
N
M


100
P=2kN
T
M
N
M_{d_3} = 1,5kNm
M_{d_2} = 3kNm
M_{d_1} = 1,5kNm


96
q = 1kN/m
c
d
e
a
b
2,0
2,0
4,0
4,0
q = 1kN/m'
A"
A'
B"
B'
Q1
Q2
C
C̄
T
M
N
2,0
0,5
c'
d'
e'
a'
b'
c"
d"
e"
a"
b"
c'''
e'''
a'''
b'''


97
q = 1kN/m
c
d
b
a
3,0
2,25
2,25
7,5
A"
A'
B"
B'
α=45°
3,375
1,125
2,253
0,132
5,06
0,633
6,562
7,029
9,15
T
M
N

PŘÍKLAD 8.1

N, Q, M na trojkloubovém lomeném nosníku na obr. 8.1a zatíženém $F = 2\ kN$, $M_g = 2\ kNm$, $q = 2\ kNm^{-1}$.

Řešení

Uvolněné části (levá i pravá) trojkloubového nosníku s příslušnými reakcemi vnějších vazeb H_a, V_a, H_b, V_b a interakcemi vnitřní vazby (kloubu *c*) H_c,V_c jsou znázorněny na obr. 8.1b, c.

Náhradní břemena $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$ od spojitého příčného zatížení *q* na délkách $\overline{de}$, $\overline{dc}$, $\overline{ce}$ mají velikosti

$$\tilde{Q} = 2 \cdot 4 = 8\,kN\,, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 2 \cdot 2 = 4\,kN\,.$$

Složky reakcí vnějších vazeb z momentových podmínek rovnováhy (8.2)

$$1)\ \sum M_{ib} = 0\ :\ -H_a(h_2 - h_1) - V_a l + \tilde{Q}\,\frac{l}{2} + F h_2 - M_g = 0\,,$$

$$2)\ \sum M_{ia} = 0\ :\ -H_b(h_2 - h_1) + V_b l - \tilde{Q}\,\frac{l}{2} + F h_1 - M_g = 0\,,$$

$$3)\ \sum {}^{l}M_{ic} = 0\ :\ H_a h_1 - V_a\,\frac{l}{2} + \tilde{Q}_1\,\frac{l}{4} - M_g = 0\,,$$

$$4)\ \sum {}^{p}M_{ic} = 0\ :\ -H_b h_2 + V_b\,\frac{l}{2} - \tilde{Q}_2\,\frac{l}{4} = 0\,;$$

po dosazení a úpravě

$$1)\ -H_a(4-3) - V_a \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 2 = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad H_a + 4\,V_a = 22\,,$$

$$2)\ -H_b(4-3) + V_b \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad -H_b + 4\,V_b = 12\,,$$

$$3)\ H_a \cdot 3 - V_a \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 3\,H_a - 2\,V_a = -2\,,$$

$$4)\ -H_b \cdot 4 + V_b \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -4\,H_b + 2\,V_b = 4$$

obdržíme řešení:

$$H_a = 2{,}57\,kN\ (\rightarrow)\,, \quad V_a = 4{,}86\,kN\ (\uparrow)\,, \quad H_b = 0{,}57\,kN\ (\leftarrow)\,, \quad V_b = 3{,}14\,kN\ (\uparrow)\,.$$

Kontrola:

$$\sum F_{ix} = 0\ :\ H_a - H_b - F = 0\,, \quad \sum F_{iy} = 0\ :\ V_a + V_b - \tilde{Q} = 0\,.$$

Složky reakcí vnitřního kloubu *c* z podmínek rovnováhy (8.4) sil na uvolněné levé části (obr. 8.1b) nosníku

$$5)\ \sum {}^{l}F_{ix} = 0\ :\ H_a - H_c = 0\ \Rightarrow\ H_c = H_a = 2{,}57\,kN\ (\leftarrow)\,,$$

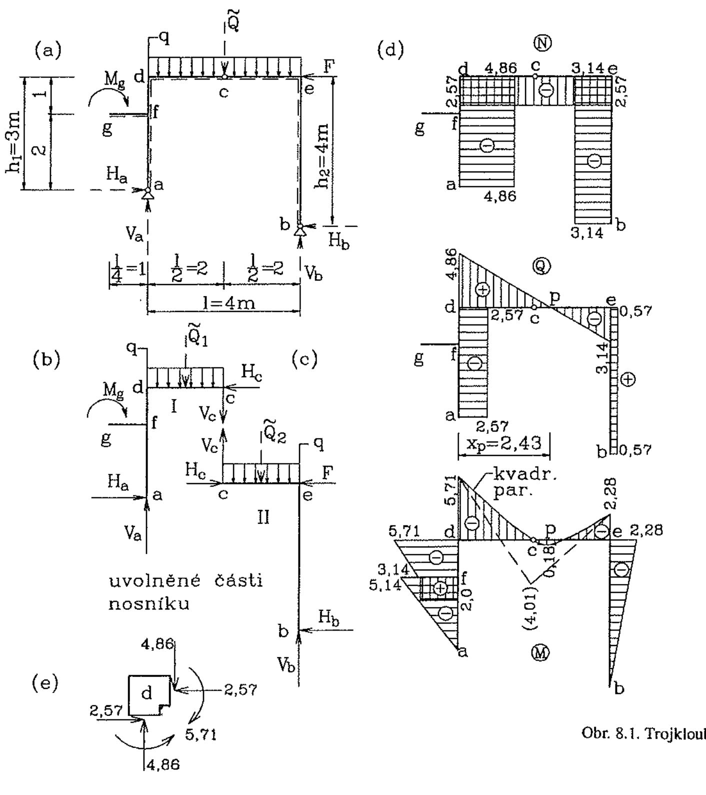
$$6)\ \sum {}^{l}F_{iy} = 0\ :\ V_a - V_c - \tilde{Q}_1 = 0\ \Rightarrow\ V_c = V_a - \tilde{Q}_1 = 0{,}86\,kN\ (\downarrow)\,.$$

Kontrola H_c, V_c z rovnováhy sil na uvolněné pravé části nosníku

$$\sum {}^{p}F_{ix} = 0\ :\ H_c - H_b - F = 0\ \Rightarrow\ H_c = H_b + F = 2{,}57\,kN\ (\rightarrow)\,,$$

$$\sum {}^{p}F_{iy} = 0\ :\ V_c + V_b - \tilde{Q}_2 = 0\ \Rightarrow\ V_c = \tilde{Q}_2 - V_b = 0{,}86\,kN\ (\uparrow)\,.$$

Průběhy složek vnitřních sil *N, Q, M* na lomeném trojkloubovém nosníku, určené postupem uvedeným v odstavci 7.6.6, jsou nakresleny na obr. 8.1d. Rovnovážnou soustavu vnitřních sil působících na uvolněný uzel *d* nosníku znázorňuje obr. 8.1e.



Obr. 8.1. Trojkloubový lomený nosník bez táhla

Příklad 92

Trojkloubový lomený nosník s konzolou, s kloubem v bodě e, zatížený dvěma osamělými břemeny a ve vodorovné části rovnoměrně podle obr. 132. $P_1 = 2$ kN, $P_2 = 3$ kN, $q = 1$ kN/m.

a) Výpočet reakcí

Mom. výminka celku k b

$-A'.4 + P_1.5,5 + Q.2 - P_2.2 = 0$

$$A' = \frac{2.5,5 + 4.2 - 3.2}{4} = \underline{3,25 \text{ kN}}$$

Mom. výminka celku k a

$B'.4 - Q.2 + P_1.1,5 - P_2.2 = 0$

$$B' = \frac{4.2 - 2.1,5 + 3.2}{4} = \underline{2,75 \text{ kN}}$$

Mom. výminka levé č. k e

$-A''.4 + P_1.1,5 = 0, \quad A'' = \underline{0,75 \text{ kN}}$

Mom. výminka pravé č. k e

$B'.4 - B''.4 + P_2.2 - Q.2 = 0$

$$B'' = \frac{2,75.4 + 3.2 - 4.2}{4} = \underline{2,25 \text{ kN}}$$

Kontrola:

Y : $A' + B' - P_1 - Q = 3,25 + 2,75 - 2 - 4 = 0$

X : $-A'' - B'' + P_2 = -0,75 - 2,25 + 3 = 0$

Poznámka: Vnitřní složky reakce E nepotřebujeme pro určování vnitřních sil znát, proto není nutné je počítat.

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{cd} = -P_1 = \underline{-2 \text{ kN}}$

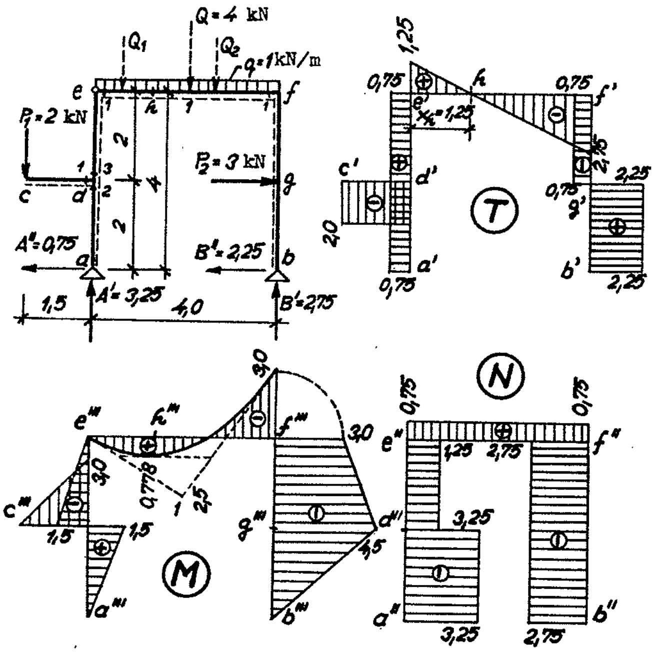
$T_{ae} = A'' = \underline{0,75 \text{ kN}}$

$T_{e2} = A' - P_1 = 3,25 - 2 = \underline{1,25 \text{ kN}}$

$T_{f1} = A' - P_1 - Q = 3,25 - 2 - 4 = \underline{-2,75 \text{ kN}}$

$T_{bg} = B'' = \underline{2,25 \text{ kN}}$

$T_{gf} = B'' - P_2 = 2,25 - 3 = \underline{-0,75 \text{ kN}}$



OBR. 132

c) Výpočet normálných sil

$N_{cd} = 0$

$N_{ad} = -A' = \underline{-3,25 \text{ kN}}$

$N_{de} = -A' + P_1 = -3,25 + 2 = \underline{-1,25 \text{ kN}}$

$N_{ef} = A'' = \underline{0,75 \text{ kN}}$

$N_{bf} = -B' = \underline{-2,75 \text{ kN}}$

d) Výpočet ohybových momentů

$M_c = M_a = M_b = 0$

$M_{d1} = -P_1.1,5 = \underline{-3 \text{ kNm}}$

$M_{d2} = A''.2 = 0,75.2 = \underline{1,5 \text{ kNm}}$

$M_{d3} = A''.2 - P_1.1,5 = 0,75.2 - 2.1,5 = \underline{-1,5 \text{ kNm}}$

Ohybový moment M_{d3} lze počítat také zprava, bez ohledu na to, že v bodě e je kloub (podle postupu řešení uvedeného v odst. 2.2), tedy

$$M_{d3} = B'.4 - B''.2 - Q.2 = 2,75.4 - 2,25.2 - 4.2 = 11 - 4,5 - 8 = \underline{-1,5 \text{ kNm}}$$

Podobně M_h můžeme počítat zleva

$$M_h = A'.1,25 + A''.4 - P_1.2,75 - Q_1.0,625 = 3,25.1,25 + 0,75.4 - 2.2,75 - 1,25.0,625 = \underline{0,778 \text{ kNm}}$$

Počítáno zprava

$$M_h = B'.2,75 - B''.4 - P_2.2 - Q_2.1,375 = 2,75.2,75 - 2,25.4 + 3.2 - 2,75.1,375 = \underline{0,778 \text{ kNm}}$$

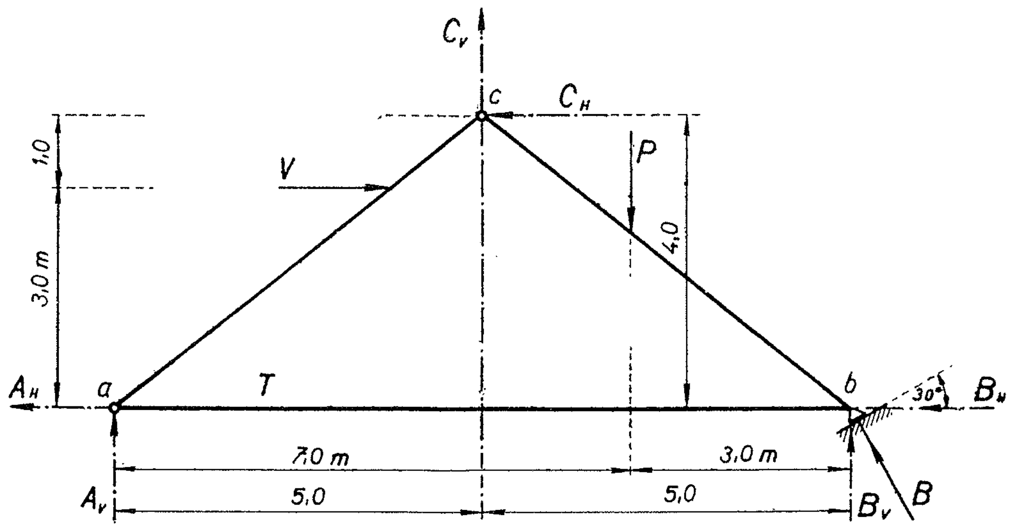
$M_e = A''.4 - P_1.1,5 = 3 - 3 = 0$ (kontrola)

$M_f = -B''.4 + P_2.2 = -2,25.4 + 3.2 = -9 + 6 = \underline{-3 \text{ kNm}}$

$M_g = -B''.2 = -2,25.2 = \underline{-4,5 \text{ kNm}}$

$(M_1) = A'.2 + A''.4 - P_1.3,5 = 3,25.2 + 0,75.4 - 2.3,5 = \underline{2,5 \text{ kNm}}$

Príklad 178. Trojkĺbový lomený nosník s ťahadlom je zaťažený vodorovným a zvislým bremenom. Ťahadlo spája obe podpery, z ktorých klzná je odklonená od vodorovnej o uhol 30°. Nech $V = 1{,}5$ Mp, $P = 3{,}0$ Mp. Určte reakcie a silu v ťahadle *(obr. 178)*.



Obr. 178

Riešenie:

Najprv vypočítame zvislé zložky vonkajších reakcií:

$$A_V \,.\, 10{,}0 + 1{,}5 \,.\, 3{,}0 - 3{,}0 \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$A_V = \frac{-4{,}5 + 9{,}0}{10{,}0} = 0{,}45 \text{ Mp}$$

$$B_V \,.\, 10{,}0 - 3{,}0 \,.\, 7{,}0 - 1{,}5 \,.\, 3{,}0 = 0$$

$$B_V = \frac{21{,}0 + 4{,}5}{10{,}0} = 2{,}55 \text{ Mp}$$

Potom zistíme vodorovné zložky reakcií:

$$B_H = B_V \operatorname{tg} 30° = 2{,}55 \,.\, 0{,}577\,35 = 1{,}472 \text{ Mp}$$

$$A_H + V - B_H = 0; \qquad A_H = -1{,}5 + 1{,}472 = -0{,}028 \text{ Mp}$$

Ak uvoľníme ľavú dosku, z momentovej podmienky ku kĺbu c vypočítame osovú silu v ťahadle:

$$A_V \,.\, 5{,}0 + A_H \,.\, 4{,}0 - T \,.\, 4{,}0 - V \,.\, 1{,}0 = 0$$

$$T = \frac{0{,}45 \,.\, 5{,}0 + 0{,}028 \,.\, 4{,}0 - 1{,}5 \,.\, 1{,}0}{4{,}0} = 0{,}215\,5 \text{ Mp}$$

Táto sila v ťahadle je v našom prípade ťahom.

Zložky reakcie C, pôsobiace v kĺbe c:

$$A_V + C_V = 0$$

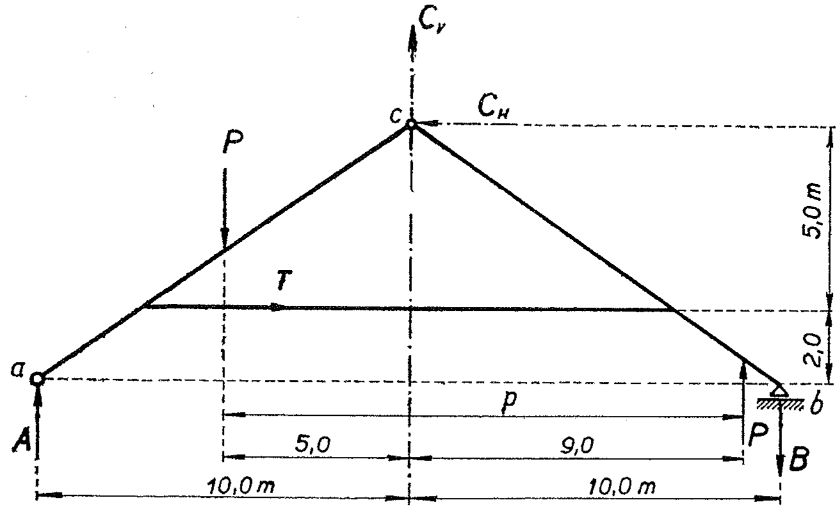
$$C_V = -A_V = -0{,}45 \text{ Mp}$$

(ide v opačnom zmysle, než je naznačené na *obr. 178*)

$$-A_H - C_H + V = 0$$

$$C_H = V - A_H = 1{,}5 - 0{,}028 = 1{,}472 \text{ Mp} = B_H$$

Príklad 179. Trojkĺbový lomený nosník s ťahadlom je zaťažený dvojicou síl podľa naznačeného *obr. 179.* Zistite veľkosť reakcií. Nech sily $P = 2{,}0$ Mp a ich vzdialenosť $p = 14{,}0$ m.



Obr. 179

Riešenie:

Keďže reakcia B musí ísť zvisle (kolmo na smer posunu), aj reakcia A pri zvislom zaťažení musí ísť zvisle. Reakcie vytvoria dvojicu síl s rovnakým momentom, ako je moment zaťažovacej dvojice $M_1 = -Pp = -2{,}0 \,.\, 14{,}0 = -28{,}0$ Mpm, ale opačného znamienka. Reakcia B preto musí mať záporné znamienko (smeruje dolu), čo ľahko dokážeme výpočtom:

$$A \,.\, 20{,}0 - 2{,}0(15{,}0 - 1{,}0) = 0$$

$$A = \frac{28{,}0}{20{,}0} = 1{,}4 \text{ Mp}$$

$$B \,.\, 20{,}0 + P(19{,}0 - 5{,}0) = 0$$

$$B = \frac{-2{,}0 \,.\, 14{,}0}{20{,}0} = -1{,}4 \text{ Mp} = -A$$

Reakcie vytvoria dvojicu síl s momentom

$$M_2 = A \,.\, 20{,}0 = 1{,}4 \,.\, 20{,}0 = 28{,}0 \text{ Mpm} = -M_1$$

teda zrušia moment zaťažovacej dvojice.

Uvoľníme napr. ľavú dosku a potom z momentovej podmienky ku kĺbu c vypočítame osovú silu T v ťahadle:

$$1{,}4 \,.\, 10{,}0 - 2{,}0 \,.\, 5{,}0 - T \,.\, 5{,}0 = 0$$

$$T = \frac{14{,}0 - 10{,}0}{5{,}0} = 0{,}8 \text{ Mp}$$

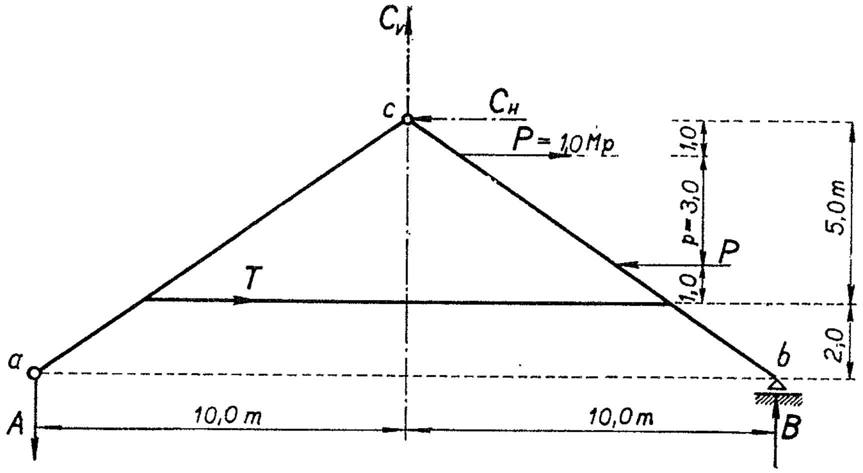
(v ťahadle je ťahová sila).

Zo súčtových podmienok vo zvislom a vodorovnom smere pri ľavej doske určíme veľkosti zložiek reakcie C:

$$A - P + C_V = 0; \quad C_V = 2{,}0 - 1{,}4 = 0{,}6 \text{ Mp (ide hore)}$$
$$T - C_H = 0; \quad C_H = T = 0{,}8 \text{ Mp}$$

Vodorovná zložka C_H reakcie C pôsobí v pôvodne naznačenom zmysle (vľavo).

Príklad 180. Trojkĺbový lomený nosník s ťahadlom je zaťažený dvojicou síl $M = Pp = 1{,}0$ Mp . 3,0 m = 3,0 Mpm, ako je naznačené na *obr. 180.* Vypočítajte reakcie.



Obr. 180

Riešenie:

Z momentovej podmienky vonkajších síl k podperovému bodu *b* (*a*) zistíme veľkosť reakcie *A* (*B*):

$$A \,.\, 20{,}0 + P(6{,}0 - 3{,}0) = 0$$

$$A = \frac{-1{,}0 \,.\, 3{,}0}{20{,}0} = -0{,}15 \text{ Mp}$$

$$B \,.\, 20{,}0 + 1{,}0(3{,}0 - 5{,}0) = 0$$

$$B = \frac{3{,}0}{20{,}0} = 0{,}15 \text{ Mp} = -A$$

Zaťažovací moment

$$M_1 = Pp = 1{,}0 \text{ Mp} \,.\, 3{,}0 \text{ m} = 3{,}0 \text{ Mpm}$$

je zrušený momentom reakcií

$$M_2 = A \,.\, 20{,}0 = -0{,}15 \text{ Mp} \,.\, 20{,}0 \text{ m} = -3{,}0 \text{ Mpm}$$

Ak uvoľníme napr. ľavú dosku, z momentovej podmienky ku kĺbu *c* určíme osovú silu T v ťahadle:

$$-0{,}15 \,.\, 10{,}0 - T \,.\, 5{,}0 = 0$$

$$T = \frac{-1{,}5}{5{,}0} = -0{,}3 \text{ Mp}$$

Ťahadlo je teda namáhané tlakom.

Veľkosť zložiek reakcie C určíme zo súčtových podmienok vo zvislom a vodorovnom smere napr. pri ľavej doske:

$$A + C_V = 0; \qquad C_V = -A = 0{,}15 \text{ Mp}$$

$$T - C_H = 0; \qquad C_H = T = -0{,}3 \text{ Mp}$$

Vodorovná zložka C_H reakcie C teda smeruje vpravo (ide v opačnom zmysle, než je naznačené na *obr. 180).*

PŘÍKLAD 8.2

N, Q, M na trojkloubovém lomeném nosníku s táhlem (obr. 8.2a) zatíženém $F = 2\ kN$, $M_g = 2\ kNm$, $q = 2\ kNm^{-1}$.

Řešení

Náhradní břemena od spojitých příčných zatížení q na délkách $\overline{de}$, $\overline{dc}$, $\overline{ce}$

$$\tilde{Q} = 2 \cdot 4 = 8\,kN\,, \quad \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_2 = 2 \cdot 2 = 4\,kN\,.$$

Složky reakcí vnějších vazeb R_a, H_b, V_b nosníku (obr. 8.2a) z podmínek rovnováhy (8.6)

$$\sum F_{ix} = 0 \;:\; H_b - F = 0 \;\Rightarrow\; H_b = F = 2\,kN \;\; (\rightarrow)\,,$$

$$\sum M_{ia} = 0 \;:\; H_b \cdot 1 + V_b \cdot 4 - \tilde{Q} \cdot 2 + F \cdot 3 - M_g = 0 \;\Rightarrow\; V_b = 2{,}5\,kN \;\; (\uparrow)\,,$$

$$\sum M_{ib} = 0 \;:\; -R_a \cdot 4 + \tilde{Q} \cdot 2 + F \cdot 4 - M_g = 0 \;\Rightarrow\; R_a = 5{,}5\,kN \;\; (\uparrow)\,.$$

Kontrola:

$$\sum F_{iy} = 0 \;:\; R_a + V_b - \tilde{Q} = 0\,.$$

Složky reakcí vnitřních vazeb H_c, V_c, N_t z podmínek rovnováhy (8.8) na levé uvolněné části nosníku (obr. 8.2b)

$$\sum {}^{l}M_{ic} = 0 \;:\; -R_a \cdot 2 + N_t \cdot 3 + \tilde{Q}_1 \cdot 1 - M_g = 0 \;\Rightarrow\; N_t = 3\,kN \;\; (\rightarrow)\,,$$

$$\sum {}^{l}F_{ix} = 0 \;:\; N_t - H_c = 0 \;\Rightarrow\; H_c = N_t = 3\,kN \;\; (\leftarrow)\,,$$

$$\sum {}^{l}F_{iy} = 0 \;:\; R_a - V_c - \tilde{Q}_1 = 0 \;\Rightarrow\; V_c = R_a - \tilde{Q}_1 = 1{,}5\,kN \;\; (\downarrow)$$

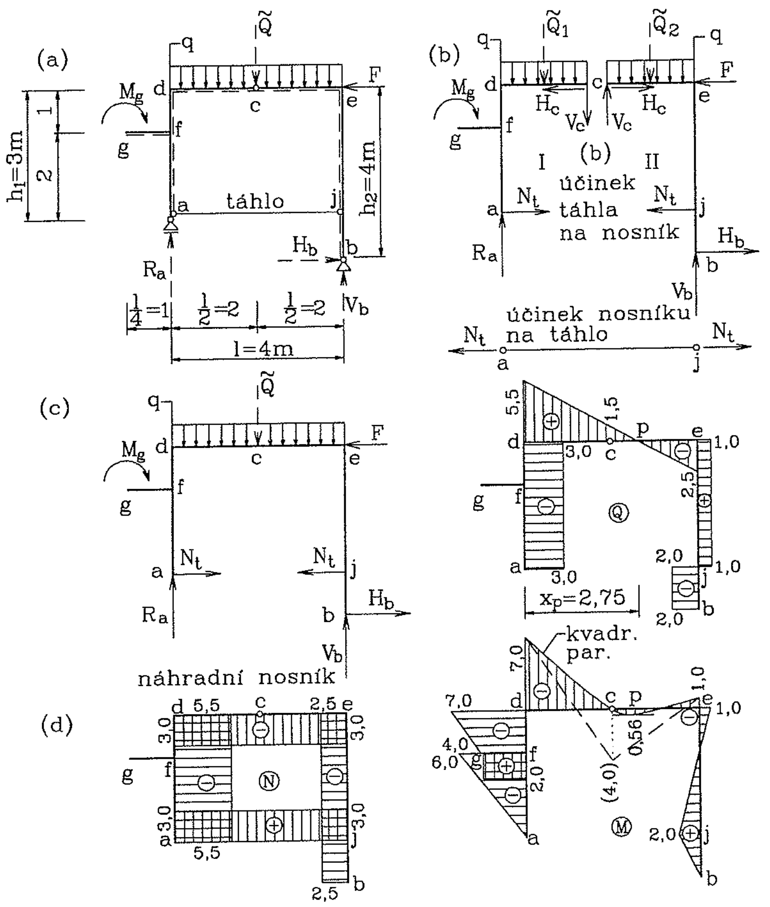
a jejich kontrola z podmínek rovnováhy pravé části nosníku

$$\sum {}^{p}M_{ic} = 0 \;:\; H_b \cdot 4 + V_b \cdot 2 - N_t \cdot 3 - \tilde{Q}_2 \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; N_t = 3\,kN \;\; (\leftarrow)\,,$$

$$\sum {}^{p}F_{ix} = 0 \;:\; H_b + H_c - N_t - F = 0 \;\Rightarrow\; H_c = N_t + F - H_b = 3\,kN \;\; (\rightarrow)\,,$$

$$\sum {}^{p}F_{iy} = 0 \;:\; V_b + V_c - \tilde{Q}_2 = 0 \;\Rightarrow\; V_c = \tilde{Q}_2 - V_b = 1{,}5\,kN \;\; (\uparrow)\,.$$

V kyvném prutu - táhle $\overline{aj}$ vzniká tahová osová síla N_t. Složky vnitřních sil N, Q, M řešíme na náhradním lomeném nosníku (obr. 8.2c) postupem uvedeným v odstavci 7.6.6. Výsledné průběhy N, Q, M na trojkloubovém lomeném nosníku s táhlem jsou nakresleny na obr. 8.2d.



Obr. 8.2. Trojkloubový lomený nosník s táhlem

Příklad 93

Trojkloubový lomený nosník s táhlem a konzolou, s kloubem v bodě d, zatížený částečně rovnoměrně a osamělým břemenem podle obr. 133 ; $q = 1{,}0\ \mathrm{kN/m}$, $P = 2{,}0\ \mathrm{kN}$.

$Q_1 = q.3 = 1.3 = 3{,}0\ \mathrm{kN}$

$Q_2 = q_1.1 = 1.1 = 1{,}0\ \mathrm{kN}$

$Q = Q_1 + Q_2 = 4{,}0\ \mathrm{kN}$

Mom.v.celku k b

a) $+A'.4 - Q.2 - P.1{,}5 = 0$

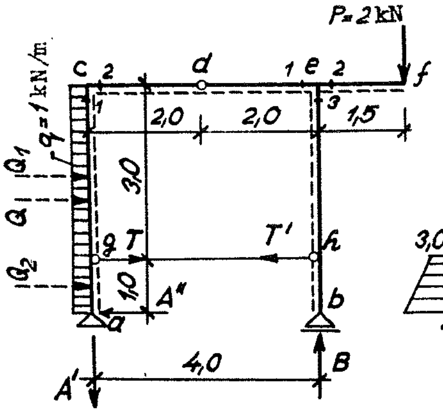
$A' = \underline{2{,}75\ \mathrm{kN}}$

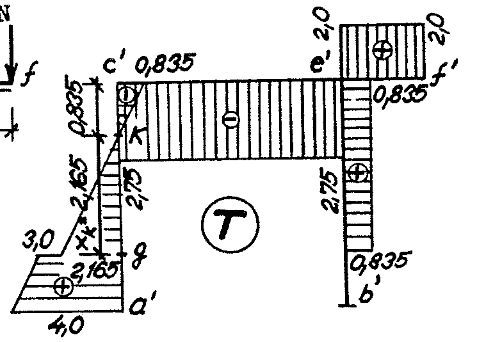
$B - A' - P = 0$;

$B = A' + P = 2{,}75 + 2 = $

$= \underline{4{,}75\ \mathrm{kN}}$

$-A'' + Q = 0;\ A'' = Q = \underline{4{,}0\ \mathrm{kN}}$



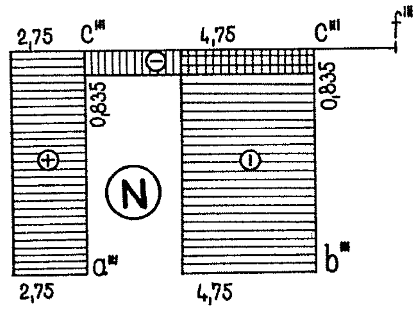


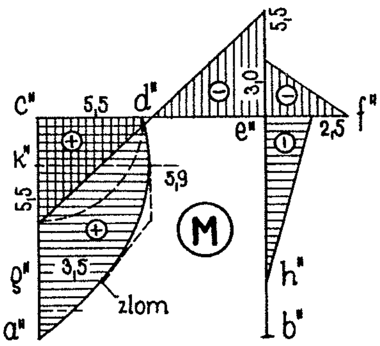
Mom.v.levé č. k d

$+T.3 - A''.4 + A'.2 +$

$+ Q.2 = 0$

$T = \underline{0{,}835\ \mathrm{kN}}$





b) $T_a = A'' = \underline{4{,}0\ \mathrm{kN}}$

$T_{g1} = A'' - Q_2 = 4 - 1 =$

$= \underline{3{,}0\ \mathrm{kN}}$

$T_{g2} = T_{g1} - T =$

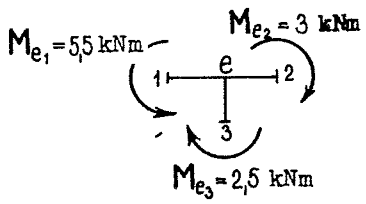
$= 3 - 0{,}835 = \underline{2{,}165\ \mathrm{kN}}$

$T_{c1} = T_{g2} - Q_1 = 2{,}165 - 3 = \underline{-0{,}835\ \mathrm{kN}}$

$T_{bh} = 0$; $T_{he} = T = \underline{0{,}835\ \mathrm{kN}}$; $T_{ef} = P = \underline{2{,}0\ \mathrm{kN}}$

$T_{ce} = -A' = \underline{-2{,}75\ \mathrm{kN}}$

$x'_k = \dfrac{T_{c1}}{q} = \dfrac{0{,}835}{1} = \underline{0{,}835\ \mathrm{m}}$



OBR. 133

c) $M_a = M_b = M_f = M_d = 0$

$M_g = A''.1 - Q_2.0{,}5 = 4.1 - 1.0{,}5 = 3{,}5\ \mathrm{kNm}$; $M_c = A''.4 - Q.2 - T.3 = 4.4 - 4.2 - 0{,}835.3 = \underline{5{,}5\ \mathrm{kNm}}$

$M_{e1} = A''.4 - A'.4 - Q.2 - T.3 = 4.4 - 2{,}75.4 - 4.2 - 0{,}835.3 = \underline{-5{,}5\ \mathrm{kNm}}$

$M_{e2} = -P.1{,}5 = -2.1{,}5 = \underline{-3{,}0\ \mathrm{kNm}}$; $M_{e3} = -T'.3 = -0{,}835.3 = \underline{-2{,}5\ \mathrm{kNm}}$

$M_k = A''.(1 + x_k) - T.x_k - q\dfrac{(1 + x_k)^2}{2} = 4.3{,}165 - 0{,}835.2{,}165 - 1\dfrac{3{,}165^2}{2} =$

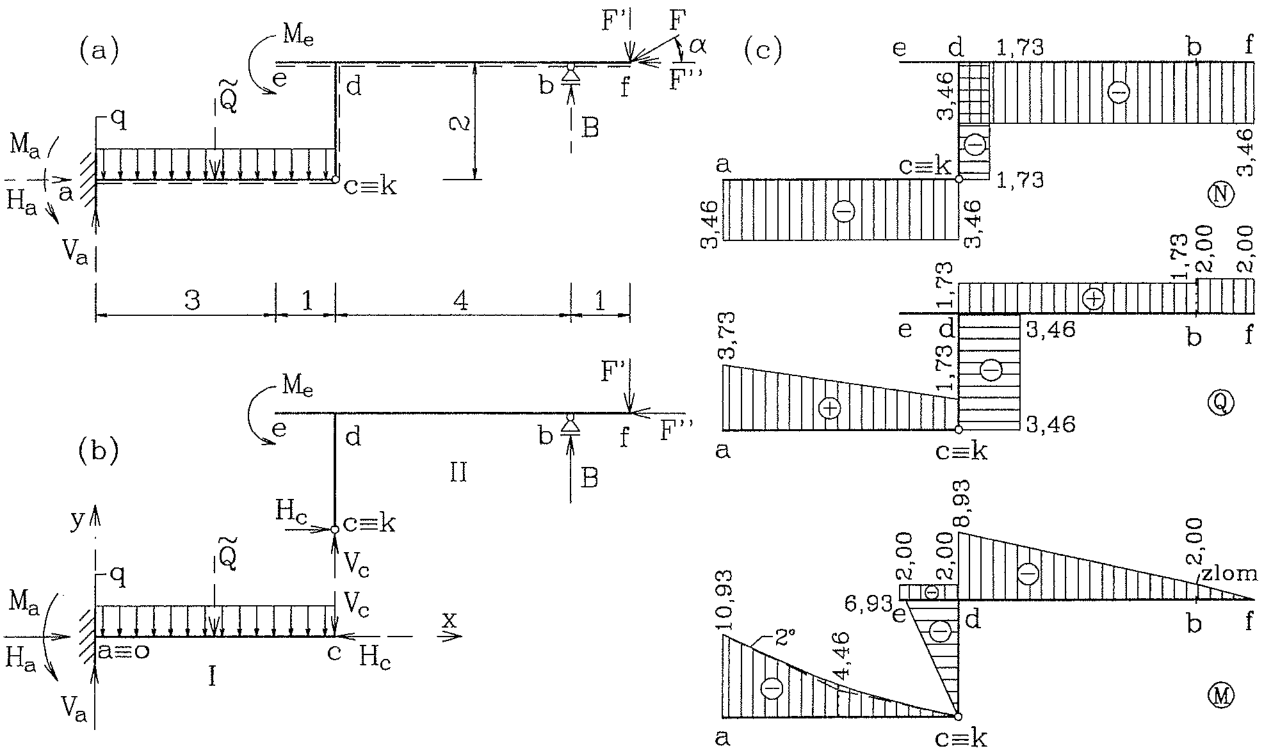
$= \underline{5{,}9\ \mathrm{kNm}}$

d) $N_{ac} = A' = \underline{2{,}75\ \mathrm{kN}}$

$N_{ce} = A'' - Q - T = 4 - 4 - 0{,}835 = \underline{-0{,}835\ \mathrm{kN}}$; $N_{be} = -B = \underline{-4{,}75\ \mathrm{kN}}$

PŘÍKLAD 8.5

Stanovte průběh N, Q, M na složené rovinné nosníkové soustavě (obr. 8.8a) pro zatížení $F = 4\ kN$, $\alpha = 30^o$, $M_e = 2\ kNm$, $q = 0{,}5\ kNm^{-1}$.



Obr. 8.8. Obecná složená nosníková soustava

Řešení

Rozčlenění složené soustavy na základní část *I* (vodorovný konzolový nosník $\overline{ac}$) a vedlejší část *II* (lomený nosník $\overline{bc}$ s převislými konci) je provedeno na obr. 8.8b.

Náhradní břemeno $\tilde{Q} = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ kN$ a pravoúhlé složky síly F mají velikosti

$$F' = 4 \cdot \sin 30^o = 2\ kN, \quad F'' = 4 \cdot \cos 30^o = 3{,}46\ kN.$$

Výpočet složek reakcí začínáme na *vedlejší části II* z podmínek rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0 : H_c - F'' = 0, \quad H_c = F'' = 3{,}46\ kN\ (\rightarrow),$$

$$\sum M_{ib} = 0 : -V_c \cdot 4 + H_c \cdot 2 + M_e - F' \cdot 1 = 0, \quad V_c = 1{,}73\ kN\ (\uparrow),$$

$$\sum M_{ic} = 0 : B \cdot 4 - F' \cdot 5 + F'' \cdot 2 + M_e = 0, \quad B = 0{,}27\ kN\ (\uparrow)$$

a končíme ho na *základní části I* z rovnic

$$\sum F_{ix} = 0 : H_a - H_c = 0, \quad H_a = H_c = 3{,}46\ kN\ (\rightarrow),$$

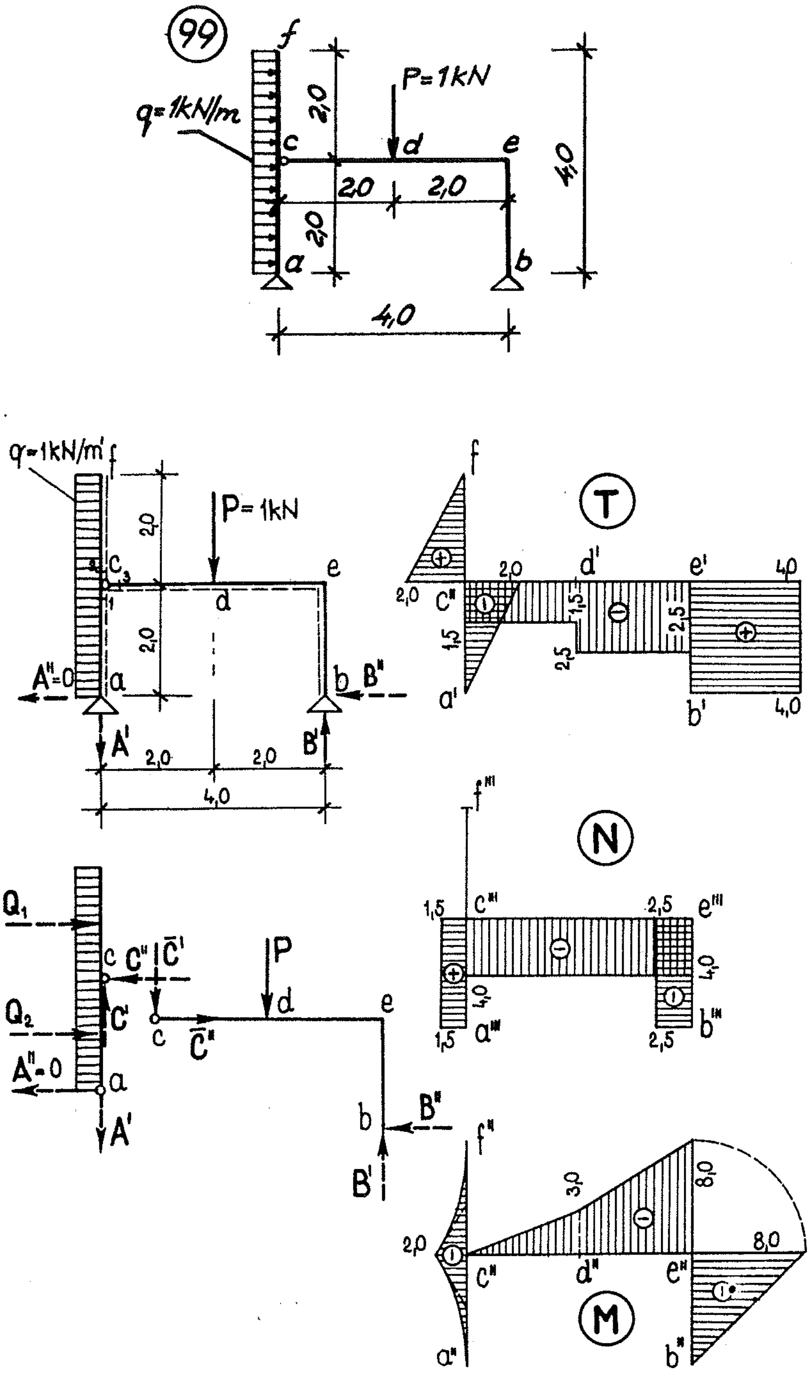
$$\sum F_{iy} = 0 : V_a - \tilde{Q} - V_c = 0, \quad V_a = 3{,}73\ kN\ (\uparrow),$$

$$\sum M_{ia} = 0 : M_a - \tilde{Q} \cdot 2 - V_c \cdot 4 = 0, \quad M_a = 10{,}93\ kNm\ (\circlearrowright).$$

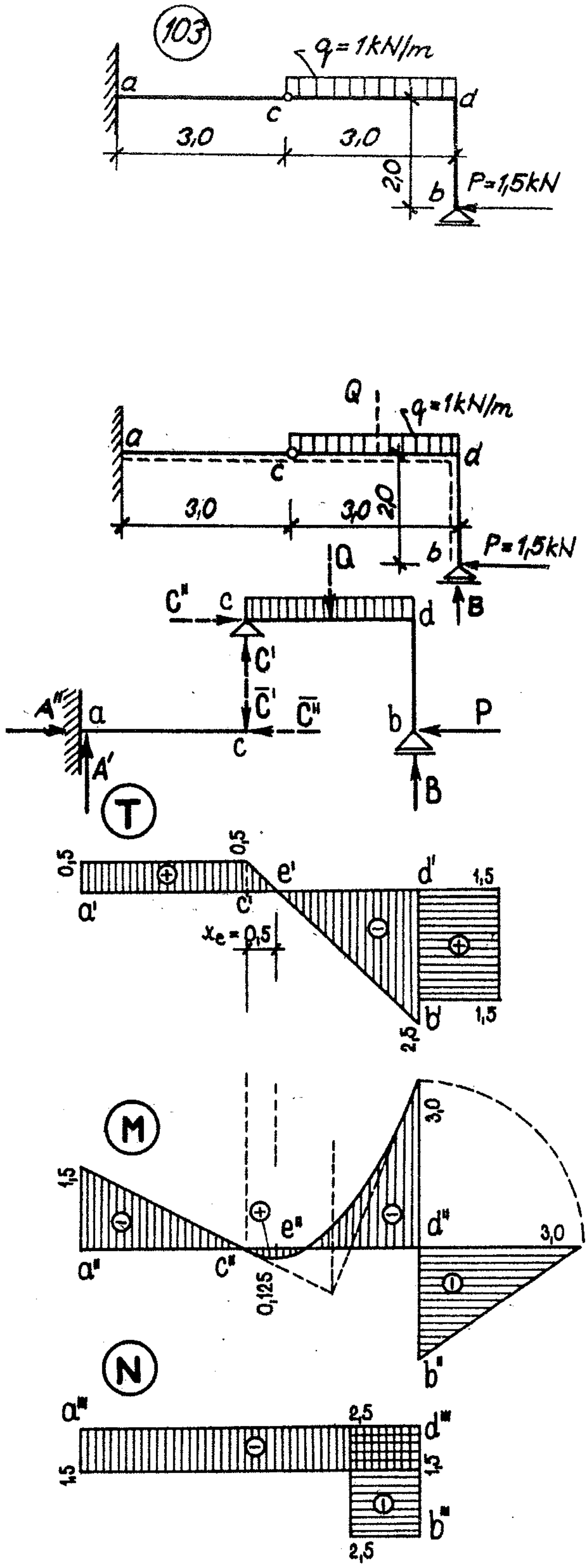
Kontrola rovnováhy složené nosníkové soustavy

$$\sum F_{iy} = 0 : V_a + B - \tilde{Q} - F' = 0.$$

Dané zatížení a jím vyvozené složky reakcí vnějších vazeb H_a, V_a, M_a, B vyvolávají na rovinném lomeném nosníku (obr. 8.8a) průběhy N, Q, M nakreslené na obr. 8.8c.



99
q=1kN/m
P=1kN
f
c
d
e
a
b
2,0
4,0
A"=0
A'
B'
B"
Q1
Q2
C"
C'
T
N
M



103
q=1kN/m
P=1,5kN
a
c
d
b
3,0
2,0
Q
A"
A'
B
C"
C'
P
T
x_e = 0,5
M
0,125
N

PŘÍKLAD 8.3

Stanovte průběh N, Q, M na spojitém nosníku s vnitřními klouby (obr. 8.6a) zatíženém $F = 30\ kN$, $M_k = 5\ kNm$, $n = q = 10\ kNm^{-1}$.

Řešení

Vyšetřovaný Gerberův nosník je staticky i kinematicky určitý, neboť je splněna rovnice (6.13):

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1,$$

$$9 = 9.$$

Náhradní břemena od spojitých zatížení

$$\tilde{Q}_1 = 2 \cdot 10 = 20\ kN,$$

$$\tilde{Q}_2 = 1 \cdot 10 = 10\ kN,$$

$$\tilde{Q}_3 = 3 \cdot 10 = 30\ kN,$$

$$\tilde{N} = 1 \cdot 10 = 10\ kN.$$

Vodorovná složka reakce H_a vetknutí a z podmínky rovnováhy (8.10)

$$\sum F_{ix} = 0 : -H_a + \tilde{N} = 0,$$

$$H_a = \tilde{N} = 10\ kN\ (\leftarrow).$$

Řešení složek reakcí vnějších a vnitřních vazeb podle statického schéma na obr. 8.6b.

Vedlejší část $III \equiv \overline{ec}$:

$$\sum M_{ic} = 0: -V_e \cdot 5 + \tilde{Q}_3 \cdot 3{,}5 + M_k = 0,$$

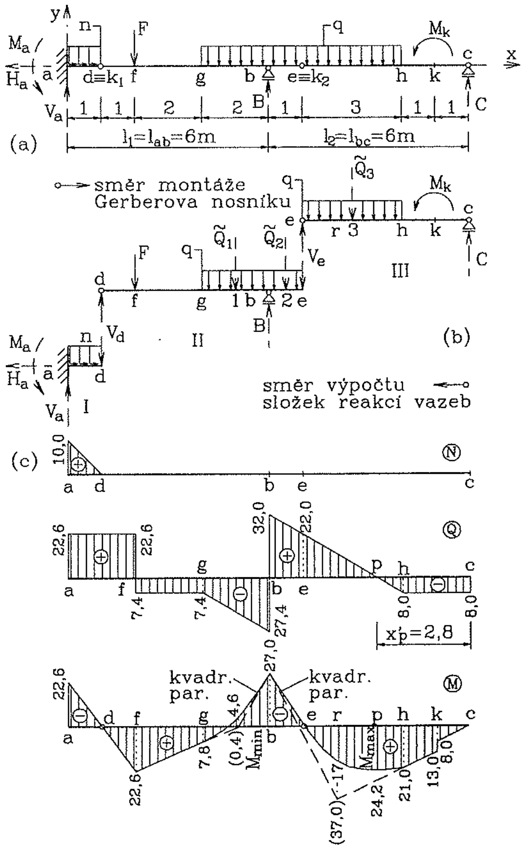
$$V_e = 22\ kN\ (\uparrow),$$

$$\sum M_{ie} = 0 : C \cdot 5 - \tilde{Q}_3 \cdot 1{,}5 + M_k = 0,$$

$$C = 8\ kN\ (\uparrow).$$

Kontrola

$$\sum F_{iy} = 0 : V_e + C - \tilde{Q}_3 = 0.$$



Obr. 8.6. Gerberův nosník o dvou polích s vetknutým koncem

Vedlejší část $II \equiv \overline{db}$:

$$\sum M_{ib} = 0 : -V_d \cdot 5 + F \cdot 4 + \tilde{Q}_1 \cdot 1 - \tilde{Q}_2 \cdot 0{,}5 - V_e \cdot 1 = 0, \quad V_d = 22{,}6\ kN\ (\uparrow),$$

$$\sum M_{id} = 0 : B \cdot 5 - F \cdot 1 - \tilde{Q}_1 \cdot 4 - \tilde{Q}_2 \cdot 5{,}5 - V_e \cdot 6 = 0, \quad B = 59{,}4\ kN\ (\uparrow).$$

Kontrola

$$\sum F_{iy} = 0 : V_d + B - F - \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2 - V_e = 0.$$

Základní část $I \equiv \overline{ad}$:

$$\sum F_{iy} = 0 : V_a - V_d = 0, \quad V_a = V_d = 22{,}6\ kN\ (\uparrow),$$

$$\sum M_{ia} = 0 : M_a - V_d \cdot 1 = 0, \quad M_a = 22{,}6\ kNm\ (\circlearrowleft).$$

Kontrola svislých složek reakcí vnějších vazeb Gerberova nosníku

$$\sum F_{iy} = 0 : V_a + B + C - F - \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_2 - \tilde{Q}_3 = 0.$$

Složky vnitřních sil:

Normálové síly

$$N_a = H_a = 10\ kN, \quad N_d = H_a - n \cdot 1 = 0, \quad N_{cd} = 0.$$

Posouvající síly

$$Q_{af} = V_a = 22{,}6\ kN, \quad Q_{fg} = V_a - F = -7{,}4\ kN = Q_g, \quad Q_{bg} = Q_g - \tilde{Q}_1 = 27{,}4\ kN,$$

$$Q_{be} = Q_{bg} + B = 32{,}0\ kN, \quad Q_e = Q_{be} - \tilde{Q}_2 = 22{,}0\ kN, \quad Q_h = Q_e - \tilde{Q}_3 = -8{,}0\ kN = Q_{ch};$$

poloha přechodného průřezu p v poli $\overline{bc}$

$$Q_p = -C + q\,(x_p' - 2) = 0 \Rightarrow x_p' = (C + 2\,q)/q = 2{,}8\ m.$$

Ohybové momenty

$$M_a = -22{,}6\ kNm, \quad M_{k_1} = V_a \cdot 1 - M_a = 0, \quad M_f = V_a \cdot 2 - M_a = 22{,}6\ kNm,$$

$$M_g = V_a \cdot 4 - M_a - F \cdot 2 = 7{,}8\ kNm, \quad M_b = V_a \cdot 6 - M_a - F \cdot 4 - \tilde{Q}_1 \cdot 1 = -27{,}0\ kNm,$$

$$M_1 = V_a \cdot 5 - M_a - F \cdot 3 - q \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -4{,}6\ kNm, \quad (M_1) = V_a \cdot 5 - M_a - F \cdot 3 = 0{,}4\ kNm,$$

$$M_{k_2} = C \cdot 5 + M_k - \tilde{Q}_3 \cdot 1{,}5 = 0, \quad M_h = C \cdot 2 + M_k = 21{,}0\ kNm,$$

$$M_r = C \cdot 4 + M_k - q \cdot 2 \cdot 1 = 17{,}0\ kNm, \quad (M_r) = C \cdot 4 + M_k = 37{,}0\ kNm,$$

$$M_{\max} = M_p = C \cdot 2{,}8 + M_k - q \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 24{,}2\ kNm,$$

$$M_{kh} = C \cdot 1 + M_k = 13{,}0\ kNm, \quad M_{kc} = C \cdot 1 = 8{,}0\ kNm, \quad M_c = 0.$$

Průběh N, Q, M je nakreslen na obr. 8.6c. Extrémní hodnoty ohybových momentů: $M_{max} = M_p = 24{,}2\ kNm$, $M_{min} = M_b = -27{,}0\ kNm$.

PŘÍKLAD 8.4

Stanovte N, Q, M na spojitém nosníku s vnitřními klouby (obr. 8.7a) zatíženém $F_1 = F_2 = 20\ kN$, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $F_3 = 30\ kN$, $q = 10\ kNm^{-1}$.

Řešení

Rozčlenění staticky i kinematicky určitého Gerberova nosníku na části základní $I \equiv \overline{ae}$, $II \equiv \overline{fd}$ a část vedlejší $III \equiv \overline{ef}$ je provedeno na obr. 8.7b.

Složku reakce H_a pevného kloubu a stanovíme z rovnováhy osových sil celého nosníku (obr. 8.7a)

$$\sum F_{ix} = 0\ :\ H_a + F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 = 0\,,\quad H_a = 7{,}3\ kN\ (\rightarrow)\,.$$

Zbývající složky reakcí vnějších a vnitřních vazeb nosníku určíme z rovnováhy sil na jednotlivých uvolněných částech.

Vedlejší část $III \equiv \overline{ef}$:

$$V_e = V_f = 0{,}5\,\tilde{Q}_3 = 10\ kN\ (\uparrow)\,.$$

Základní část $II \equiv \overline{fd}$:

$$C = 40\ kN\ (\uparrow)\,,\quad D = 10\ kN\ (\uparrow)\,,\quad \sum F_{iy} = C + D - F_3 - \tilde{Q}_2 - V_f = 0\,.$$

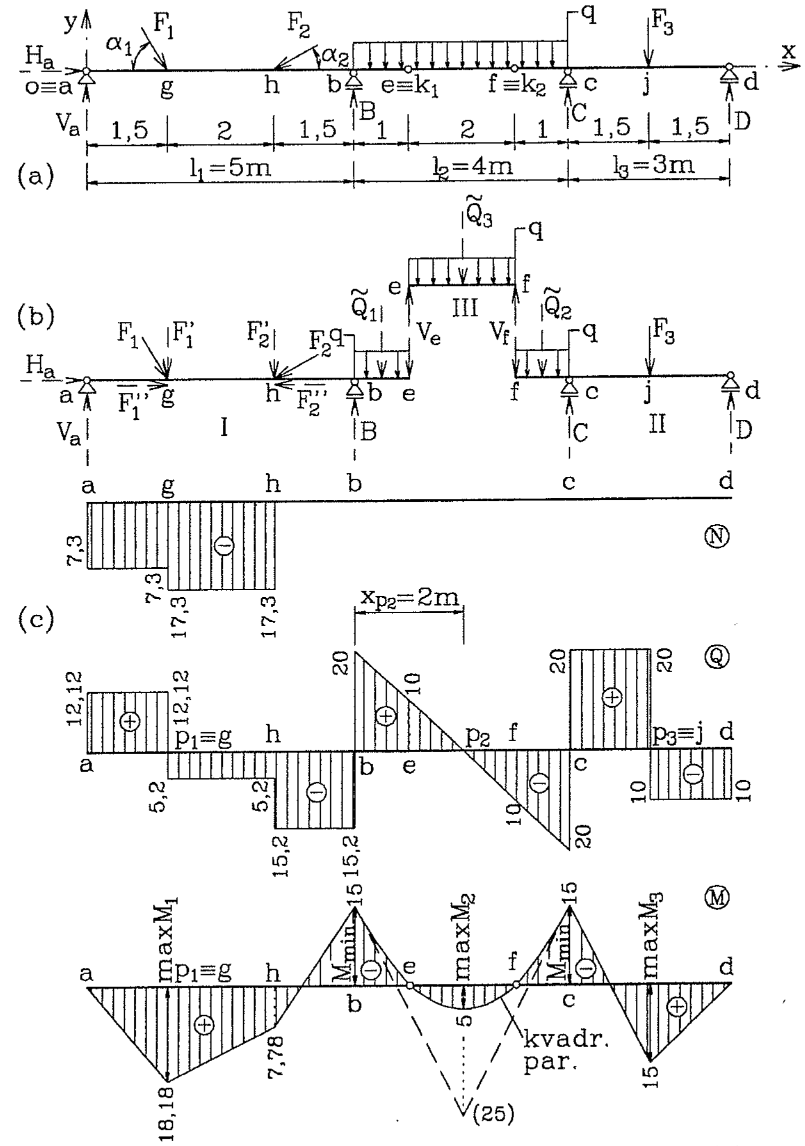
Základní část $I \equiv \overline{ae}$:

$$V_a = 12{,}12\ kN\ (\uparrow)\,,\quad B = 35{,}20\ kN\ (\uparrow)\,,\quad \sum F_{iy} = V_a + B - F_1' - F_2' - \tilde{Q}_1 - V_e = 0\,.$$

Kontrola rovnováhy celého nosníku ve svislém směru

$$\sum F_{iy} = V_a + B + C + D - F_1' - F_2' - F_3 - \tilde{Q} = 0\,.$$

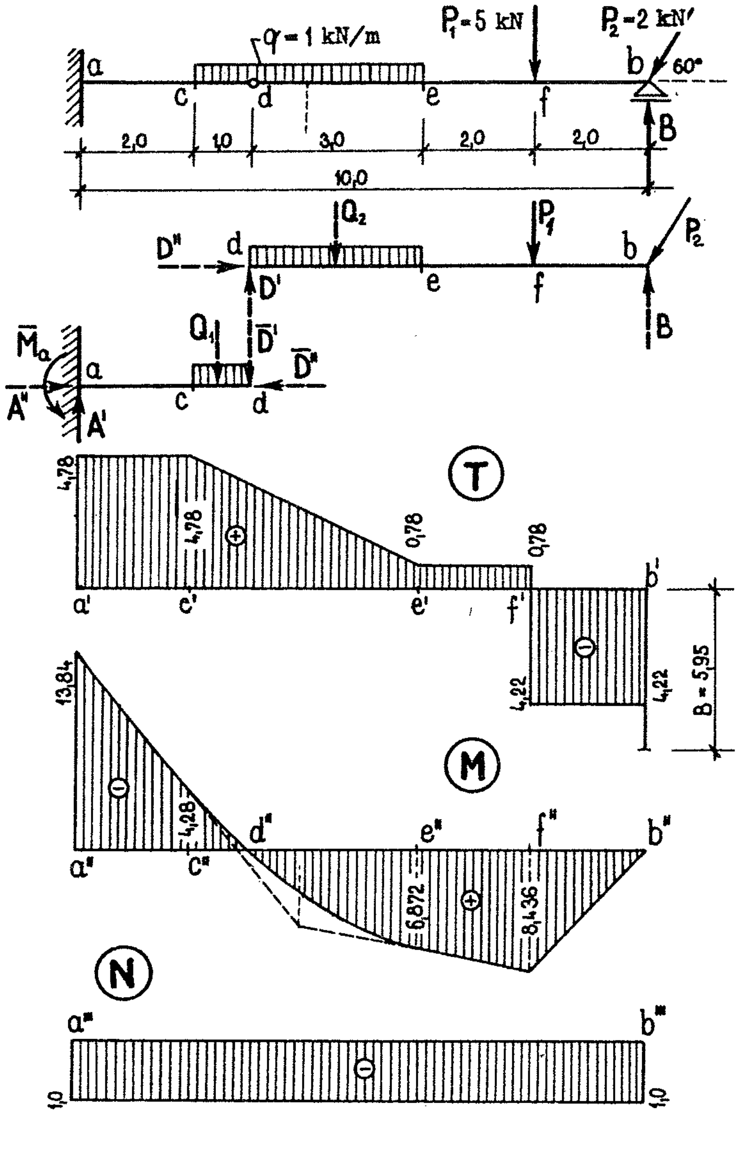
Průběh N, Q, M je nakreslen na obr. 8.7c s $M_{\max} = M_g = 18{,}18\ kNm$ a $M_{\min} = M_b = M_c = -15\ kNm$.



Obr. 8.7. Gerberův nosník o třech polích z příkladu 8.4

Příklad 94

Gerberův nosník o jednom poli, vetknutý na levém konci do podpory a zatížený částečně rovnoměrně a dvěma osamělými břemeny podle obr.134; $q = 1{,}0$ kN/m, $P_1 = 5{,}0$ kN, $P_2 = 2{,}0$ kN.



OBR. 134

$Q_1 = 1{,}0$ kN $Q_2 = 3{,}0$ kN;
$Q = 4{,}0$ kN

$P_2' = P_2 \sin 60^\circ = 2 . 0{,}866 = 1{,}732$ kN
$P_2'' = P_2 \cos 60^\circ = 1{,}0$ kN

a) Pravá část nosníku

$-D' . 7 + Q_2 . 5{,}5 + P_1 . 2 = 0$
$D' = \underline{3{,}782 \text{ kN}} = \overline{D}'$

$+B . 7 - Q_2 . 1{,}5 - P_1 . 5 - P_2' . 7 = 0$
$B = \underline{5{,}95 \text{ kN}}$

Kontrola:
$D' + B - Q_2 - P_1 - P_2' =$
$= 3{,}782 + 5{,}95 - 3 - 5 -$
$- 1{,}732 = 0$

$D'' - P_2'' = 0; \quad D'' = P_2'' = \underline{1{,}0 \text{ kN}}$

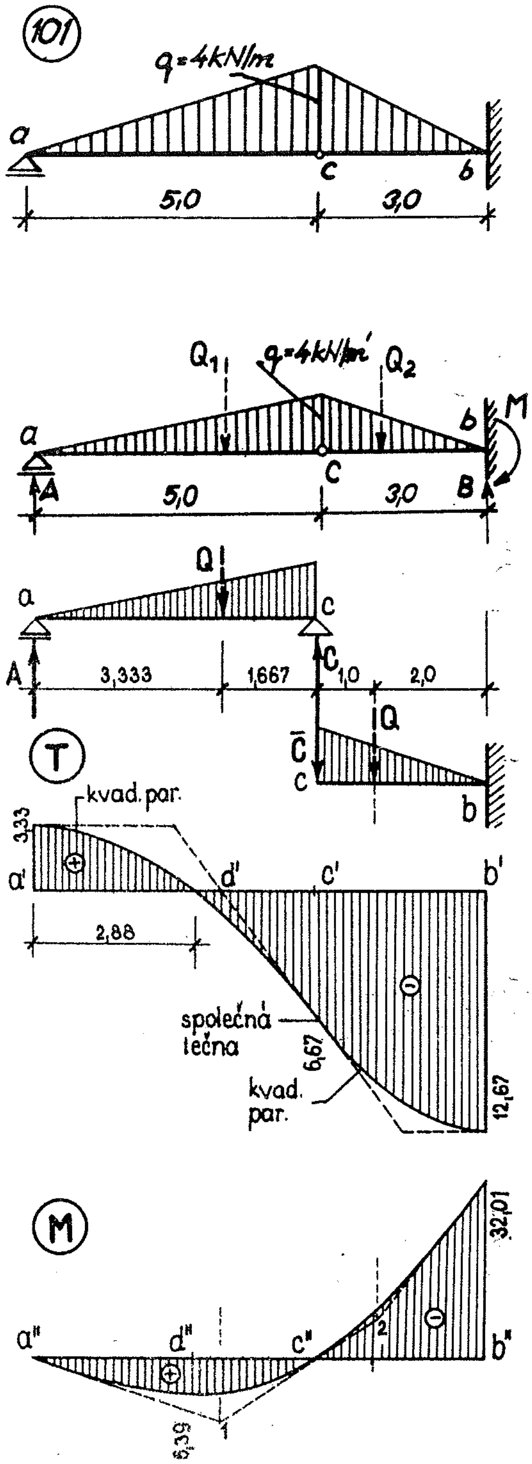
Levá část nosníku

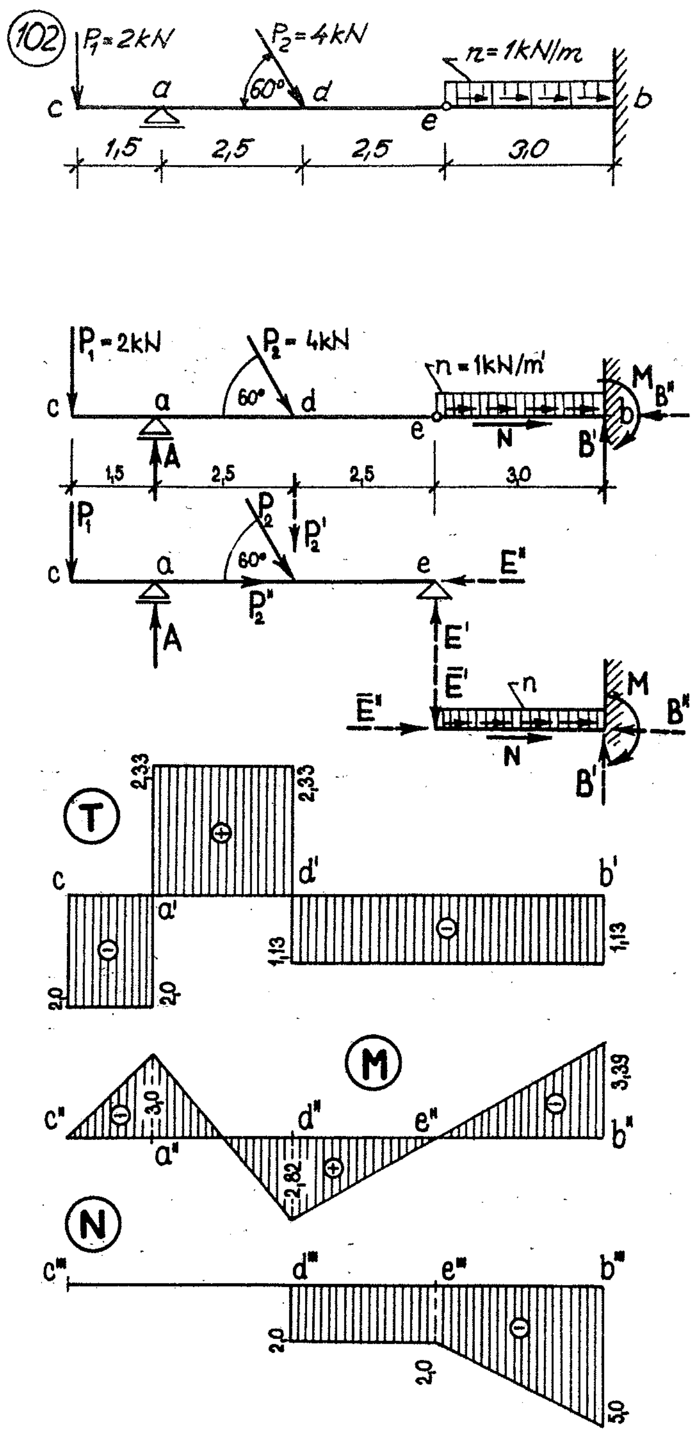
$\overline{M}_a = -\overline{D}' . 3 - Q_1 . 2{,}5 =$
$= \underline{13{,}84 \text{ kNm}}$
$A' = \overline{D}' + Q_1 = 3{,}78 + 1 = \underline{4{,}78 \text{ kN}}$
$A'' = P_2'' = \underline{1{,}0 \text{ kN}}$

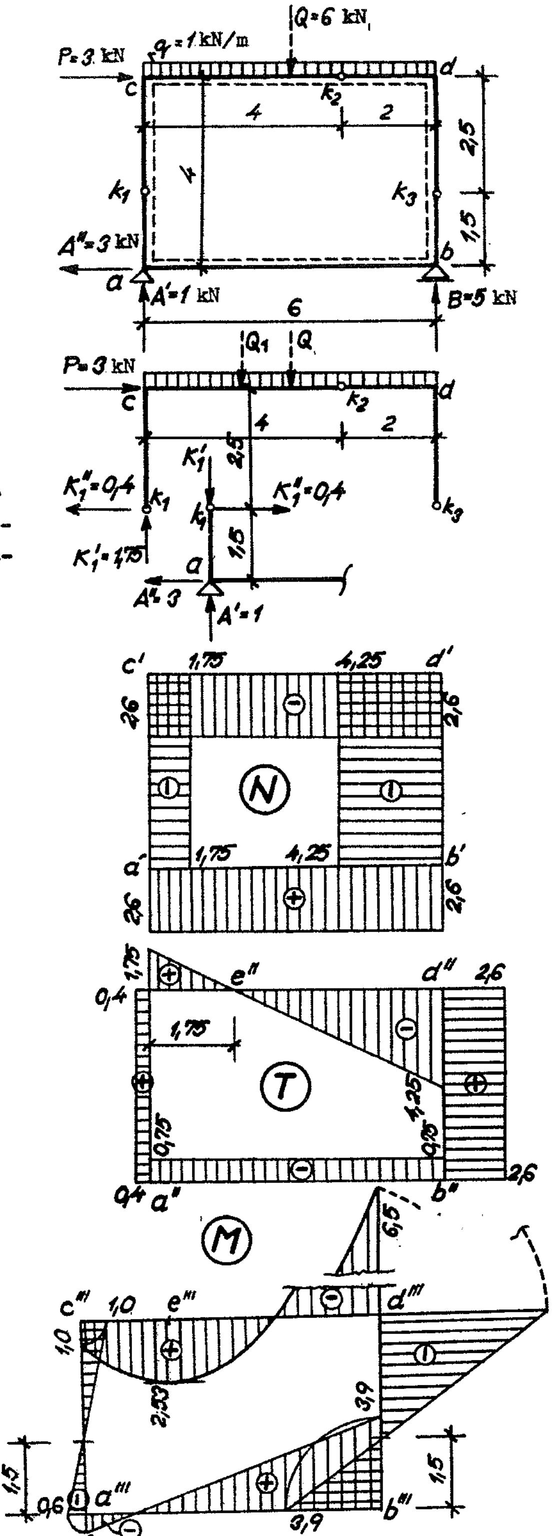
b) $T_{ac} = A' = \underline{4{,}78 \text{ kN}}$
$T_{ef} = T_{ac} - Q = 4{,}78 - 4 =$
$= \underline{0{,}78 \text{ kN}}$
$T_{fb} = T_{ef} - P_1 = 0{,}78 - 5 =$
$= \underline{-4{,}22 \text{ kN}}$

c) $M_a = -\overline{M}_a = \underline{-13{,}84 \text{ kNm}}$
$M_c = -\overline{M}_a + A' . 2 = -13{,}84 +$
$+ 4{,}78 . 2 = \underline{-4{,}28 \text{ kNm}}$
$M_d = 0$
$M_e = -P_1 . 2 - P_2' . 4 + B . 4 =$
$= -5 . 2 - 1{,}732 . 4 +$
$+ 5{,}95 . 4 = \underline{6{,}872 \text{ kNm}}$
$M_f = -P_2' . 2 + B . 2 = -1{,}732 . 2 +$
$+ 5{,}95 . 2 = \underline{8{,}436 \text{ kNm}}$
$M_b = 0$

d) $N_{ab} = -A'' = -P'' = \underline{-1{,}0 \text{ kN}}$


101
q=4kN/m
a
c
b
5,0
3,0
Q1
q=4kN/m'
Q2
M
A
C
B
3,333
1,667
1,0
2,0
T
kvad. par.
3,33
a'
d'
c'
b'
2,88
společná tečna
6,67
kvad. par.
12,67
M
a"
d"
c"
b"
6,39
32,01


102
P1=2kN
P2=4kN
n=1kN/m
60°
c
a
d
e
b
1,5
2,5
2,5
3,0
A
N
B'
MB"
E"
E'
B"
M
T
2,33
2,0
1,13
M
3,0
2,82
3,39
N
5,0



OBR. 135

Příklad 95

Určete průběh vnitřních sil uzavřené (cyklické) soustavy, složené z prostého lomeného nosníku a trojkloubového nosníku, o rozměrech a zatížení podle obr. 135 ; $P = 3$ kN, $q = 1$ kN/m .

a) Posouzení statické určitosti

$3n = \alpha + \beta$, $9 = 3 + 6$, $9 = 9$

b) Výpočet reakcí

$- A'.6 - P.4 + Q.3 = 0$, $\underline{A' = 1 \text{ kN}}$

$B.6 - P.4 - Q.3 = 0$, $\underline{B = 5 \text{ kN}}$

$A'' = P = \underline{3 \text{ kN}}$

c) Abychom mohli vyšetřovat vnitřní síly "náhradního nosníku" (bez vložených kloubů), určíme nejdříve vnitřní reakce například v kloubu k_1:

Pro trojkloubový nosník k_1, k_2, k_3 platí:

M_{k3}: $- K_1'.6 - P.2,5 + Q.3 = 0$
(celku) $K_1' = \underline{1,75 \text{ kN}}$

M_{k2}: $- K_1''.2,5 - K_1'.4 + Q_1.2 = 0$
(levé části) $K_1'' = \underline{0,4 \text{ kN}}$

d) $N_{k1c} = N_{k1a} = - K_1' = \underline{- 1,75 \text{ kN}}$

$N_{cd} = K_1'' - P = 0,4 - 3 = \underline{- 2,6 \text{ kN}}$

$N_{bd} = + K_1' - Q = 1,75 - 6 = \underline{- 4,25 \text{ kN}}$

$N_{ab} = - K_1'' + A'' = -0,4 + 3 = \underline{2,6 \text{ kN}}$

e) $T_{k1c} = T_{k1a} = K_1'' = \underline{0,4 \text{ kN}}$ $\qquad T_{c2} = K_1' = \underline{1,75 \text{ kN}}$

$T_{d1} = K_1' - Q = 1,75 - 6 = \underline{- 4,25 \text{ kN}}$ $\qquad T_{db} = - K_1'' + P = - 0,4 + 3 = \underline{2,6 \text{ kN}}$

$T_{ab} = - K_1' + A' = - 1,75 + 1 = \underline{-0,75 \text{ kN}}$

f) $M_a = - K_1'' . 1,5 = - 0,4 . 1,5 = \underline{-0,6 \text{ kNm}}$, $M_c = K_1'' . 2,5 = 0,4 . 2,5 = \underline{1,0 \text{ kNm}}$

$M_e = K_1' . 1,75 + K_1'' . 2,5 - q \dfrac{1,75^2}{2} = 1,75 . 1,75 + 0,4 . 2,5 - 1.1,53 = \underline{2,53 \text{ kNm}}$

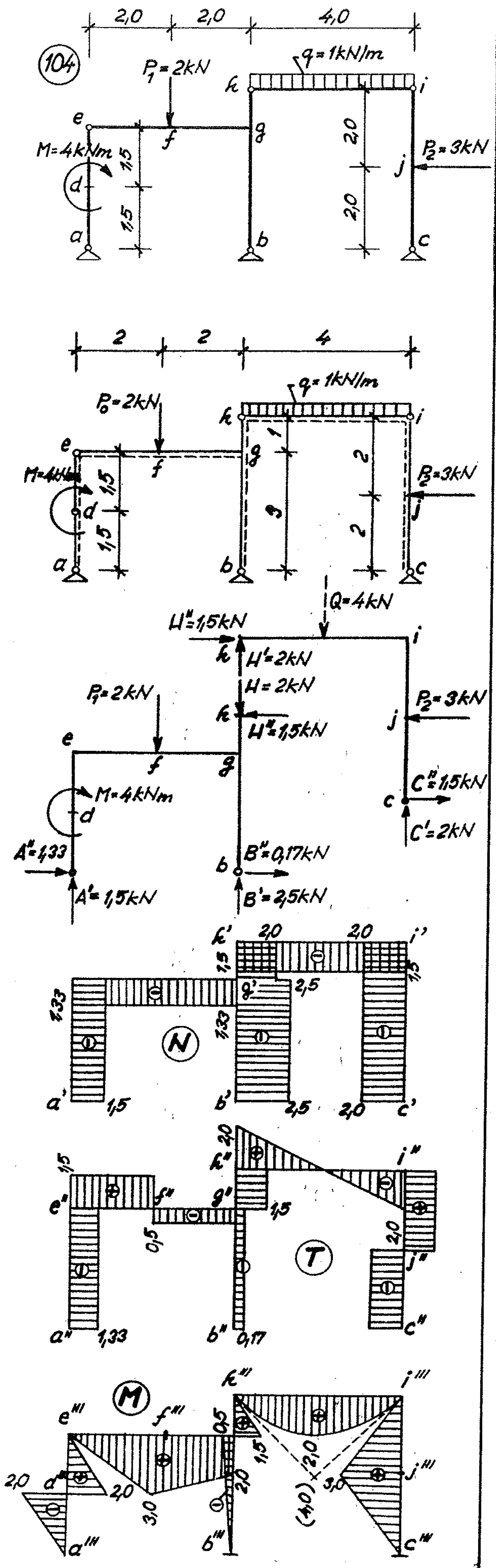
$M_d = K_1' . 6 + K_1'' . 2,5 - Q . 3 = 1,75 . 6 + 0,4 . 2,5 - 6 . 3 = \underline{- 6,5 \text{ kNm}}$

$M_b = - K_1'' . 1,5 + K_1' . 6 - A' . 6 = -0,4 . 1,5 + 1,75 . 6 - 1 . 6 = \underline{3,9 \text{ kNm}}$

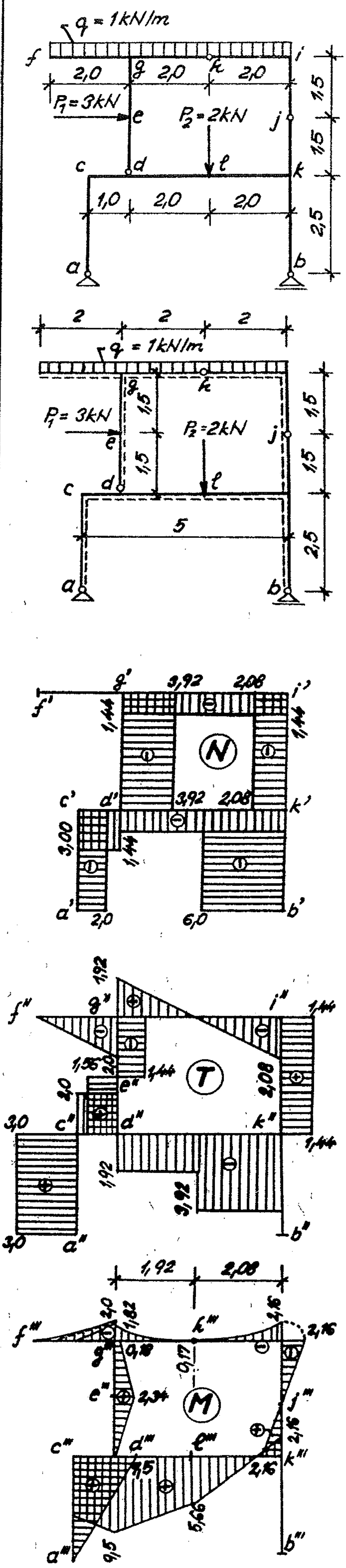
Kontrola ze druhé strany :

$M_b = K_1' . 6 - K_1'' . 1,5 + P . 4 - Q . 3 = \underline{3,9 \text{ kNm}}$

104


q = 1kN/m
P1 = 2kN
P2 = 3kN
M = 4kNm
Q = 4kN
H'' = 1,5kN
H' = 2kN
H = 2kN
C'' = 1,5kN
C' = 2kN
A'' = 1,33
A' = 1,5kN
B'' = 0,17kN
B' = 2,5kN
N
T
M

105


q = 1kN/m
P1 = 3kN
P2 = 2kN
N
T
M