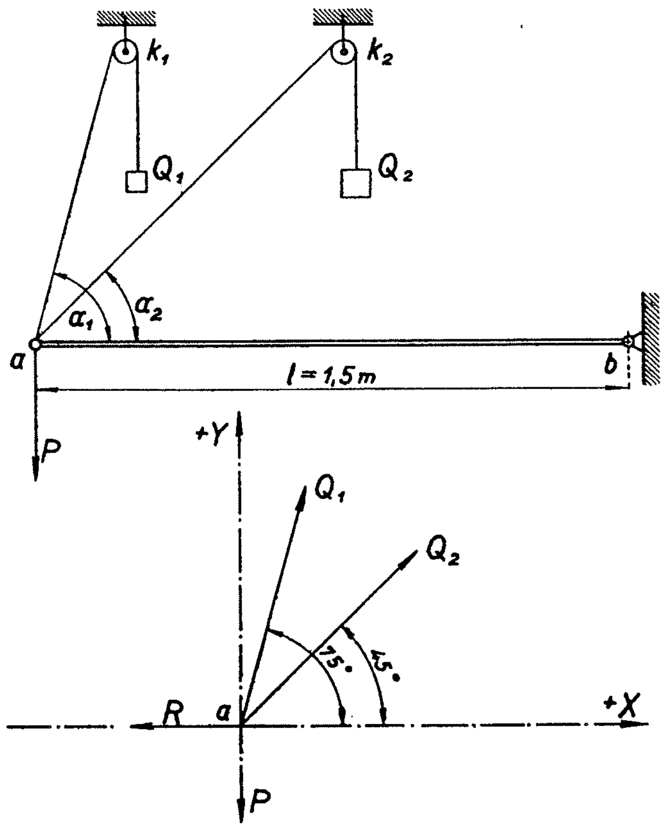
Príklad 1. Na priamu tyč, ktorej ľavý koniec a je voľný a pravý je pripevnený v pevnom kĺbe b, pôsobia na ľavom konci ťahové sily $Q_1 = 300$ kp, $Q_2 = 700$ kp (prostredníctvom vlákien vedených cez krúžok v bode a a pevné

1 kp ≈ 10 N
lépe: 100 kp ≈ 1 kN



Obr. 1

kladky k_1 a k_2). Akou zvislou silou P musíme pôsobiť na voľnom konci, aby tyč ostala v rovnováhe vo vodorovnej polohe. Nech $\alpha_1 = 75°$, $\alpha_2 = 45°$, $l = 1{,}5$ m *(obr. 1).*

Riešenie:

Zaťaženie Q_1 a Q_2 pôsobí na voľný koniec a nosníka šikmými silami veľkosti 300 kp a 700 kp. Ak tieto šikmé sily rozložíme na zložky vodorovné a zvislé, vodorovné zložky týchto šikmých síl pôsobia smerom vpravo, preto v tyči a—b musí vznikať vnútorná sila opačného zmyslu, teda sila R, pôsobiaca vľavo. Zvislé zložky síl Q_1 a Q_2 pôsobia smerom hore, preto sila P musí pôsobiť v opačnom zmysle, teda smerom dole a čo do veľkosti sa rovná súčtu zvislých zložiek síl Q_1 a Q_2.

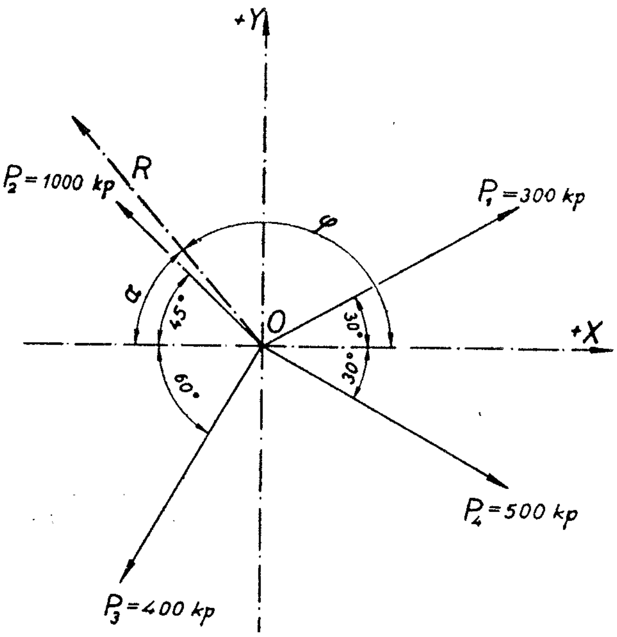
Pre koncový bod a tyče teda platia dve súčtové podmienky rovnováhy:

$$Q_1 \sin 75° + Q_2 \sin 45° - P = 0 \tag{1}$$
$$\sin 75° = 0{,}965\,93$$
$$\sin 45° = 0{,}707\,11$$
$$P = 300 \,.\, 0{,}965\,93 + 700 \,.\, 0{,}707\,11 = 290 + 495 = 785 \text{ kp}$$

Vo vodorovnom smere platí rovnica

$$Q_1 \cos 75° + Q_2 \cos 45° - R = 0$$
$$\cos 75° = 0{,}258\,82 \tag{2}$$
$$\cos 45° = 0{,}707\,11$$
$$300 \,.\, 0{,}258\,82 + 700 \,.\, 0{,}707\,11 = R$$
$$R = 78 + 495 = 573 \text{ kp}$$

Príklad 2. Vypočítajte výslednicu naznačených síl $P_1 \dots P_4$, ktoré všetky pôsobia v tejže rovine v jednom bode *(obr. 2)*.



Obr. 2

Riešenie:

Počtársky budeme postupovať tak, že rozložíme každú silu do zložky vodorovnej a zvislej a algebrickým sčítaním zložiek všetkých síl vo vodorovnom a zvislom smere určíme vodorovnú a zvislú zložku výslednice (R_x a R_y), a tým aj výslednicu R centrálnej sústavy síl.

Potrebné hodnoty zostavíme do prehľadnej *tab. 1.*

Tabuľka 1

i	P_i [kp]	α_i	$\cos \alpha_i$	$P_{ix} = P_i \cos \alpha_i$ [kp]	$\sin \alpha_i$	$P_{iy} = P_i \sin \alpha_i$ [kp]
1	300	30°	0,866	+260	0,500	+150
2	1000	135°	−0,707	−707	0,707	+707
3	400	240°	−0,500	−200	−0,866	−346
4	500	330°	0,866	+433	−0,500	−250
			$R_x = \Sigma P_{ix} = -214$ kp		$R_y = \Sigma P_{iy} = 261$ kp	

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-214)^2 + (261)^2} = 338 \text{ kp}$$

Ak chceme stanoviť odklon výslednice od vodorovnej zložky, určíme:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{261}{214} = -1,22$$

Keďže R_x má zápornú hodnotu a R_y má hodnotu kladnú, výslednica R musí byť v II. kvadrante.

Nakoľko

$$\operatorname{tg} \alpha = -1,22$$

$$\alpha \doteq 50°40'$$

a odklon výslednice R od kladnej osi $+X$ je:

$$\varphi = 180° - \alpha = 180° - 50°40' = 129°20'$$

Príklad 4. Nahraďte na *obr. 4* naznačenú dvojicu síl s momentom $M_1 = P_1 p_1 = 5{,}0$ Mp . 3,0 m = 15,0 Mpm inou dvojicou, ktorej jedna sila $P_2 = 3{,}0$ Mp (na obrázku je naznačená čiarkovane).

Riešenie:

Dve dvojice majú rovnakú hodnotu, ak ich moment je rovnaký. Musí platiť rovnica

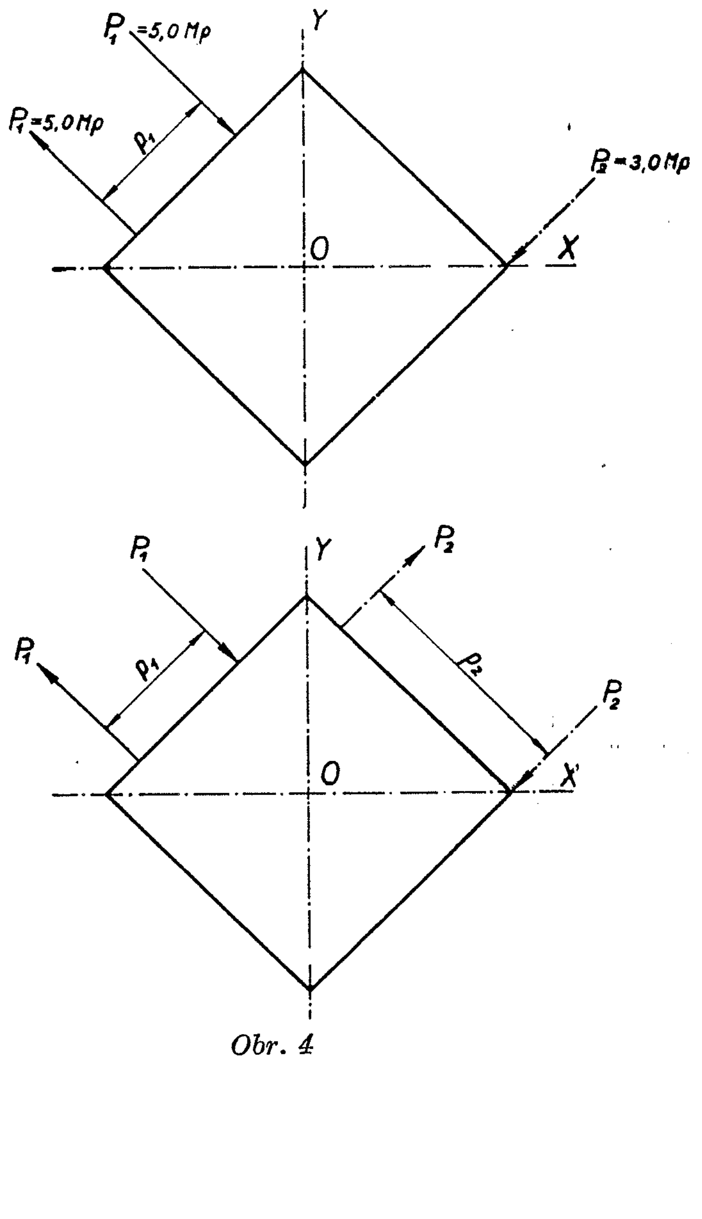
$$P_1 p_1 = P_2 p_2$$

z čoho

$$p_2 = \frac{P_1 p_1}{P_2} = \frac{5{,}0 \,.\, 3{,}0}{3{,}0} = 5{,}0 \text{ m}$$

Skúška správnosti:

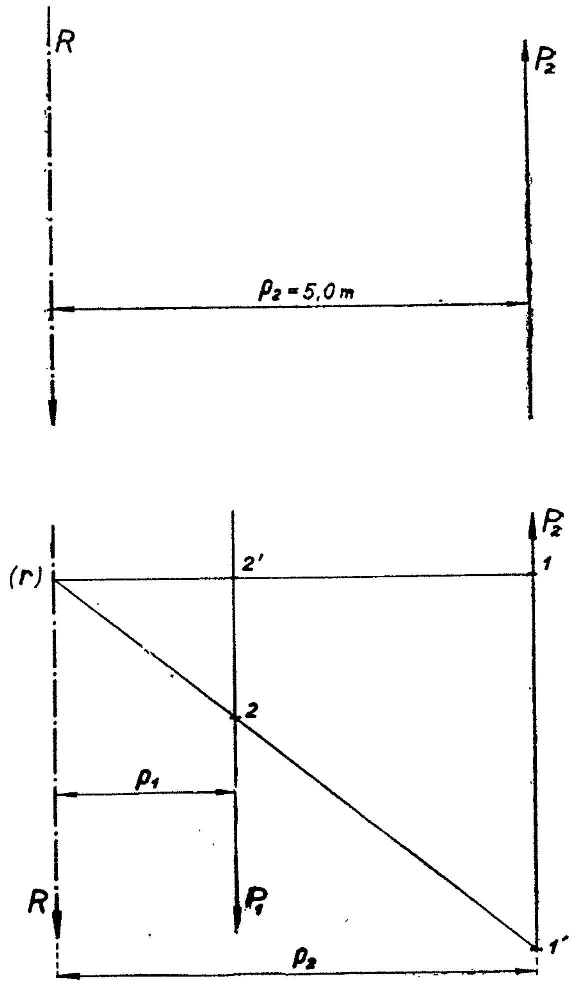
$$5{,}0 \text{ Mp} \,.\, 3{,}0 \text{ m} = 3{,}0 \text{ Mp} \,.\, 5{,}0 \text{ m}$$
$$15{,}0 \text{ Mpm} = 15{,}0 \text{ Mpm}$$



Obr. 4

Príklad 5. Sila R nech je výslednicou zvislých síl P_1 a P_2. Z týchto troch síl poznáme silu $P_2 = 3{,}0$ Mp a výslednicu $R = 5{,}0$ Mp. Vzdialenosť známych síl $p_2 = 5{,}0$ m *(obr. 5)*.

Zistite polohu, veľkosť a zmysel sily P_1.



Obr. 5

Riešenie:

Keďže R je výslednicou síl P_1 a P_2, pričom známa sila P_2 je opačného zmyslu ako výslednica R, musí mať sila P_1 rovnaký zmysel ako výslednica R, ktorá leží na strane väčšej sily a je s ňou rovnobežná.

Čo do veľkosti síl platí vzťah

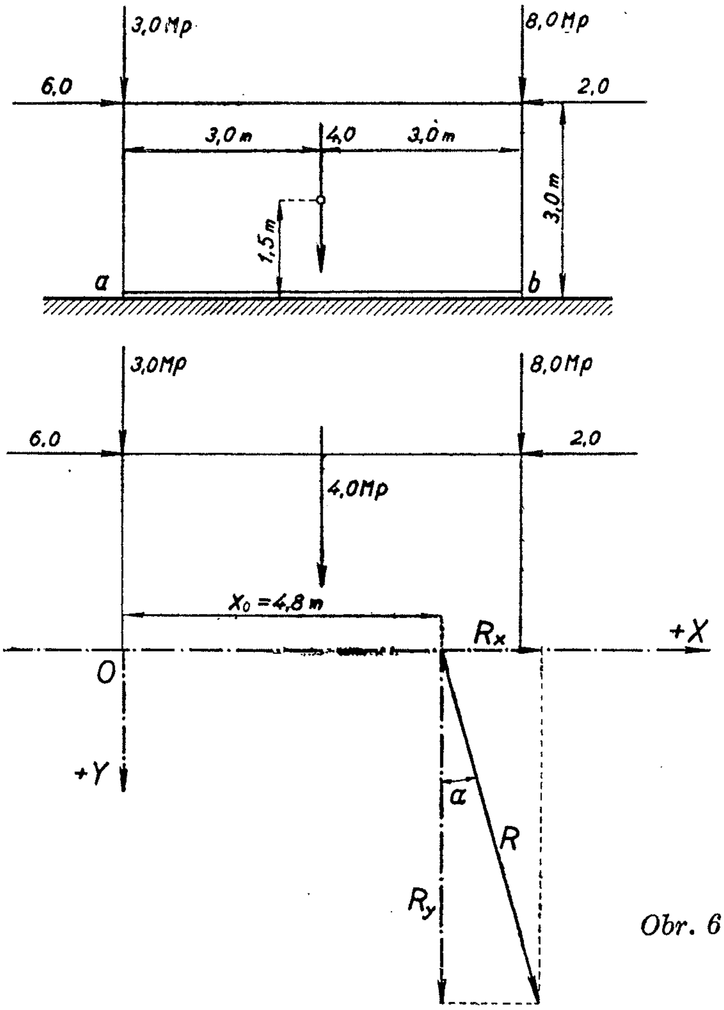
$$R = P_1 - P_2$$
$$P_1 = R + P_2 = 5{,}0 + 3{,}0 = 8{,}0 \text{ Mp}$$

Polohu sily P_1 určíme z momentovej podmienky síl P_1, P_2 k ľubovoľnému bodu (r) výslednice R:

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 = 0$$

$$p_1 = \frac{P_2 p_2}{P_1} = \frac{3{,}0 \,.\, 5{,}0}{8{,}0} = 1{,}875 \text{ m}$$

Príklad 6. Vypočítajte výslednicu na *obr. 6* naznačenej sústavy síl a určte bod, v ktorom výslednica R pretína základňu a—b.



Obr. 6

Riešenie:

Vedieme súradnicové osi a vypočítame zložky výslednice R v smere týchto osí:

$$R_x = \Sigma P_{ix} = 6{,}0 - 2{,}0 = 4{,}0 \text{ Mp}$$
$$R_y = \Sigma P_{iy} = 3{,}0 + 4{,}0 + 8{,}0 = 15{,}0 \text{ Mp}$$

Veľkosť výslednice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4{,}0^2 + 15{,}0^2} = \sqrt{241} = 15{,}52 \text{ Mp}$$

Z momentovej podmienky k bodu O zistíme priesečník výslednice R so základňou a—b:

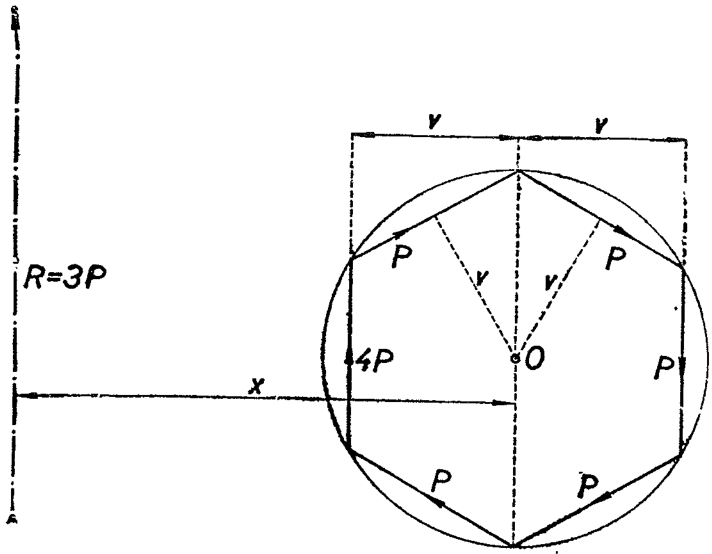
$$6{,}0 \,.\, 3{,}0 + 3{,}0 \,.\, 0 + 8{,}0 \,.\, 6{,}0 - 2{,}0 \,.\, 3{,}0 + 4{,}0 \,.\, 3{,}0 = R_y \,.\, x_0$$

$$x_0 = \frac{18{,}0 + 48{,}0 - 6{,}0 + 12{,}0}{15{,}0} = \frac{72{,}0}{15{,}0} = 4{,}8 \text{ m}$$

Odklon výslednice R od zvislej osi vypočítame z výrazu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_x}{R_y} = \frac{4{,}0}{15{,}0} = 0{,}26$$
$$\alpha \doteq 15°$$

Príklad 7. V stranách pravidelného šesťuholníka na *obr. 7* pôsobia rovnaké sily $P = 2{,}0$ Mp, a to v rovnakom zmysle. Iba vo zvislej ľavej strane je sila štyrikrát väčšia. Zistite veľkosť a polohu výslednice.



Obr. 7

Riešenie:

Z obrazca je jasné, že vodorovná zložka výslednice

$$R_x = 0$$

Zvislá zložka má veľkosť

$$R_y = 4P - P = 3P = 3 \,.\, 2{,}0 = 6{,}0 \text{ Mp}$$

a smeruje hore.

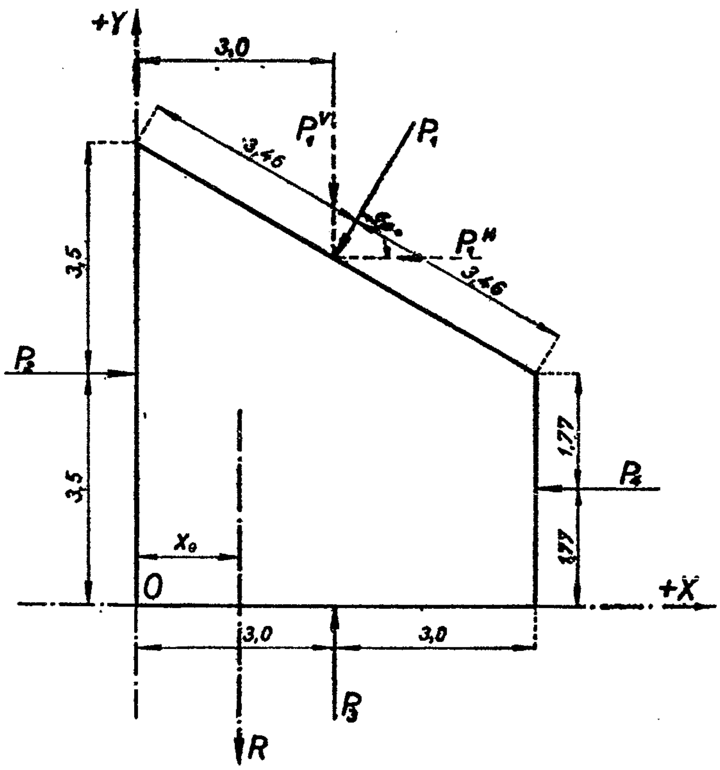
Polohu výslednice určíme z momentovej podmienky rovnováhy k stredu O šesťuholníka síl:

$$3Px = 5Pv + 4Pv$$

z čoho

$$x = \frac{9Pv}{3P} = 3v = 3\,\frac{P}{2}\sqrt{3} = 3 \,.\, \sqrt{3} \doteq 5{,}2 \text{ m}$$

Príklad 8. Vypočítajte výslednicu na *obr. 8* naznačených štyroch síl $P_1 = 10{,}0$ Mp, $P_2 = 7{,}0$ Mp, $P_3 = 5{,}0$ Mp, $P_4 = 2{,}0$ Mp. Nech sily pôsobia v strede strán lichobežníka a idú kolmo na tieto strany.



Obr. 8

Riešenie:

Vrchlolom *O* lichobežníka veďme pravouhlý systém súradnicových osí. Šikmú silu $P_1 = 10$ Mp rozložme na zložku vodorovnú a zvislú:

$$P_1^M = 10 \cos 60° = 10 \,.\, 0{,}5 = 5{,}0 \text{ Mp}$$
$$P_1^V = 10 \sin 60° = 10 \,.\, 0{,}866 = 8{,}66 \text{ Mp}$$

Výslednica naznačenej sústavy štyroch síl má zložky:

$$R_x = P_2 - P_1^M - P_4 = 7{,}0 - 5{,}0 - 2{,}0 = 0$$
$$R_y = P_3 - P_1^V = 5{,}0 - 8{,}66 = -3{,}66 \text{ Mp}$$

Keďže vodorovná zložka výslednice sa rovná nule, výslednica R sa bude rovnať zvislej sile $R_y = R = -3{,}66$ Mp a znamienko — znamená, že pôsobí zvisle dolu (proti zvolenému kladnému zmyslu osi Y).

Polohu výslednice zistíme z momentovej podmienky rovnováhy silovej sústavy k začiatku *O* pravouhlého systému osí:

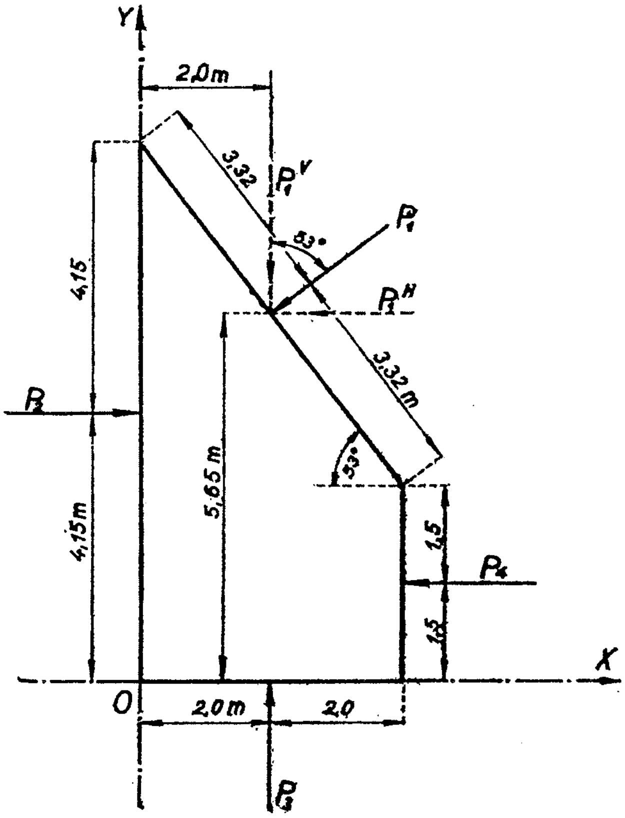
$$Rx_0 = 7{,}0 \,.\, 3{,}5 + (8{,}66 - 5{,}0) \,.\, 3{,}0 - 5{,}0 \,.\, 5{,}27 - 2{,}0 \,.\, 1{,}77$$

$$3{,}66x_0 = 5{,}59; \quad x_0 = \frac{5{,}59}{3{,}66} = 1{,}53 \text{ m}$$

Príklad 9. Vypočítajte výslednicu na *obr. 9* naznačených síl

$$P_1 = 5{,}0\ \mathrm{Mp}, \quad P_2 = 5{,}0\ \mathrm{Mp}, \quad P_3 = 3{,}0\ \mathrm{Mp}, \quad P_4 = 1{,}0\ \mathrm{Mp}$$

Nech sily pôsobia v strede strán lichobežníka a idú na ne kolmo.



Obr. 9

Riešenie:

Vrcholom O lichobežníka veďme pravouhlý systém súradnicových osí.

Vodorovná a zvislá zložka šikmej sily P_1:

$$P_1^H = P_1 \sin 53° = 5{,}0 \cdot 0{,}8 = 4{,}0\ \mathrm{Mp}$$
$$P_1^V = P_1 \cos 53° = 5{,}0 \cdot 0{,}6 = 3{,}0\ \mathrm{Mp}$$

Výslednica naznačenej sústavy štyroch síl má vodorovnú a zvislú zložku:

$$R_x = P_2 - P_1^H - P_4 = 5{,}0 - 4{,}0 - 1{,}0 = 0$$
$$R_y = P_3 - P_1^V = 3{,}0 - 3{,}0 = 0$$

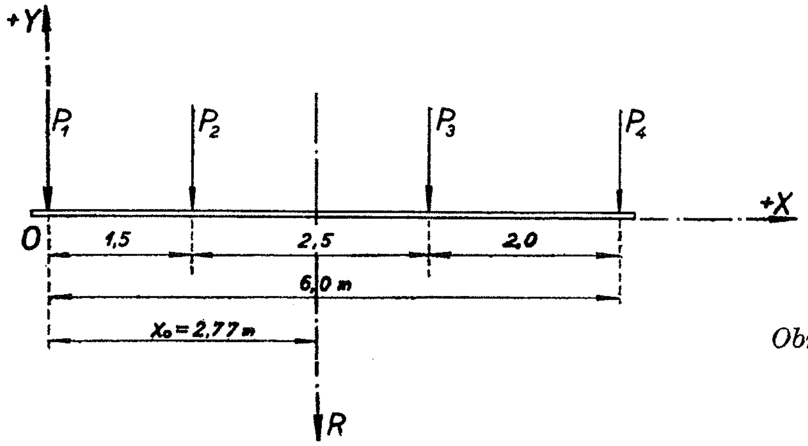
Keďže obidva priemety výslednice R sa rovnajú nule, výslednicou sústavy síl je alebo dvojice síl, alebo je daná sústava v rovnováhe. O tom rozhodneme pomocou momentovej podmienky rovnováhy síl, napr. k začiatku O pravouhlej súradnicovej sústavy:

$$M_0 = 5{,}0 \cdot 4{,}15 + (3{,}0 - 3{,}0) \cdot 2{,}0 - 4{,}0 \cdot 5{,}65 - 1{,}0 \cdot 1{,}5 =$$
$$= 20{,}75 + 0 - 22{,}60 - 1{,}5 = -3{,}35\ \mathrm{Mpm}$$

Výslednicou danej sústavy štyroch síl je teda dvojica síl so záporným momentom:

$$M_0 = -3{,}35\ \mathrm{Mpm}$$

Príklad 10. Určte počtársky výslednicu rovnobežných síl naznačených na *obr. 10,* pôsobiacich zvisle smerom dolu. Nech sily $P_1 = 2{,}0$ Mp, $P_2 = 3{,}0$ Mp, $P_3 = 5{,}0$ Mp, $P_4 = 1{,}0$ Mp pôsobia v uvedených vzdialenostiach.



Obr. 10

Riešenie:

Najprv zvolíme pravouhlé súradnicové osi so začiatkom O. Veľkosť výslednice v smere vodorovnom a zvislom určíme pomocou jej zložiek:

$$R_x = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^{4} P_i = 2{,}0 + 3{,}0 + 5{,}0 + 1{,}0 = 11{,}0 \text{ Mp} = R$$

Polohu výslednice R vypočítame z momentovej podmienky sústavy síl k začiatku O:

$$M_0 = Rx_0 = 3{,}0 \,.\, 1{,}5 + 5{,}0 \,.\, 4{,}0 + 1{,}0 \,.\, 6{,}0$$

z čoho

$$x_0 = \frac{4{,}5 + 20{,}0 + 6{,}0}{11{,}0} = \frac{30{,}5}{11{,}0} \doteq 2{,}77 \text{ m}$$

Príklad 11. Na dosku z tehál na *obr. 11* nech pôsobí sústava zvislých síl $P_1 = 3{,}0$ Mp, $P_2 = 2{,}0$ Mp, $P_3 = 1{,}0$ Mp. Uveďte túto sústavu do rovnováhy, a to zvislými silami idúcimi bodmi a a b.

Riešenie:

Predpokladajme, že sily A a B, s ktorými má byť daná sústava síl v rovnováhe, pôsobia zdola nahor.

Napíšeme momentovú podmienku rovnováhy k bodu a:

$$3{,}0 \,.\, 1{,}0 + 2{,}0 \,.\, 3{,}0 + 1{,}0 \,.\, 4{,}5 - B \,.\, 6{,}0 = 0$$

$$B = \frac{3{,}0 + 6{,}0 + 4{,}5}{6{,}0} = \frac{13{,}5}{6{,}0} = 2{,}25 \text{ Mp}$$

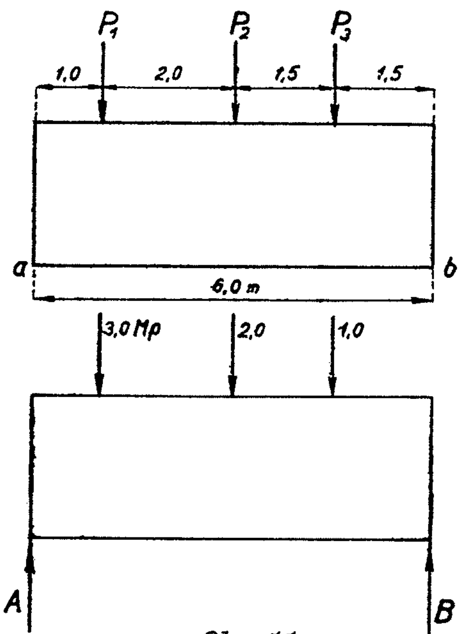
Keďže vo zvislom smere má byť rovnováha, musí platiť rovnica

$$P_1 + P_2 + P_3 - A - B = 0$$

z ktorej

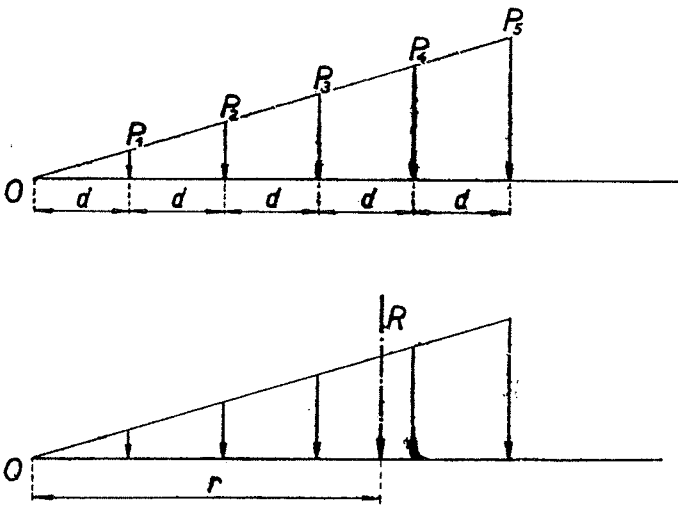
$$A = 3{,}0 + 2{,}0 + 1{,}0 - 2{,}25 = 3{,}75 \text{ Mp}$$

Keďže sme dostali kladné sily A a B, predpokladaný zmysel týchto síl bol správny.



Obr. 11

Príklad 12. Vypočítajte výslednicu piatich v rovnakej vzdialenosti pôsobiacich síl $P_1 \ldots P_5$, ktoré pôsobia zvisle, v rovnakom zmysle a ich veľkosť



Obr. 12

je v pomere 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Nech $d = 1{,}0$ m, $P_1 = 1{,}0$ Mp, $P_2 = 2{,}0$ Mp, …, …, $P_5 = 5{,}0$ Mp *(obr. 12)*.

Riešenie:

Výslednicou naznačenej sústavy síl je sila

$$R = \sum_{i=1}^{5} P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = P_1 + 2P_1 + 3P_1 + 4P_1 +$$
$$+ 5P_1 = P_1(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 15P_1 = 15 \,.\, 1{,}0 = 15{,}0 \text{ Mp}$$

Z momentovej vety plynie, že moment výslednice k ľubovoľnému bodu (u nás k bodu O) rovná sa súčtu momentov všetkých zložiek:

$$Rr = P_1 d + P_2 2d + \ldots + P_5 5d = P_1 d + 2P_1 2d + \ldots + 5P_1 5d =$$
$$= P_1 d(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 55P_1 d$$

$$r = \frac{55P_1 d}{15P_1} = \frac{11}{3} d = \frac{11}{3} \,.\, 1{,}0 = 3{,}66 \text{ m}$$

Zovšeobecnenie:

Keď podobne usporiadaná sústava síl nepozostáva z piatich, ale všeobecne z n síl,

$$R = P_1(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2} P_1$$

a podobne

$$r = \frac{P_1 d(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)}{P_1(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}$$

Keďže

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

bude:

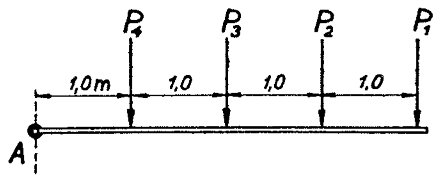
$$r = \frac{P_1 dn(n+1)(2n+1) \,.\, 2}{6P_1 n(n+1)} = \frac{2n+1}{3} d$$

Príklad 13. Zistite počtársky veľkosť momentu na *obr. 13* naznačenej sústavy síl k bodu A.

Riešenie:

Veľkosť momentu sústavy síl k bodu A:

$$M_A = 1{,}0 \,.\, 4{,}0 + 2{,}0 \,.\, 3{,}0 + 3{,}0 \,.\, 2{,}0 + 4{,}0 \,.\, 1{,}0 =$$
$$= 4{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0 = 20{,}0 \text{ Mpm}$$

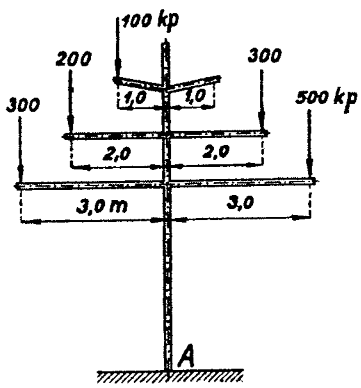


Obr. 13

Príklad 14. Určte súčet momentov naznačenej sústavy síl k bodu A počtársky *(obr. 14)*.

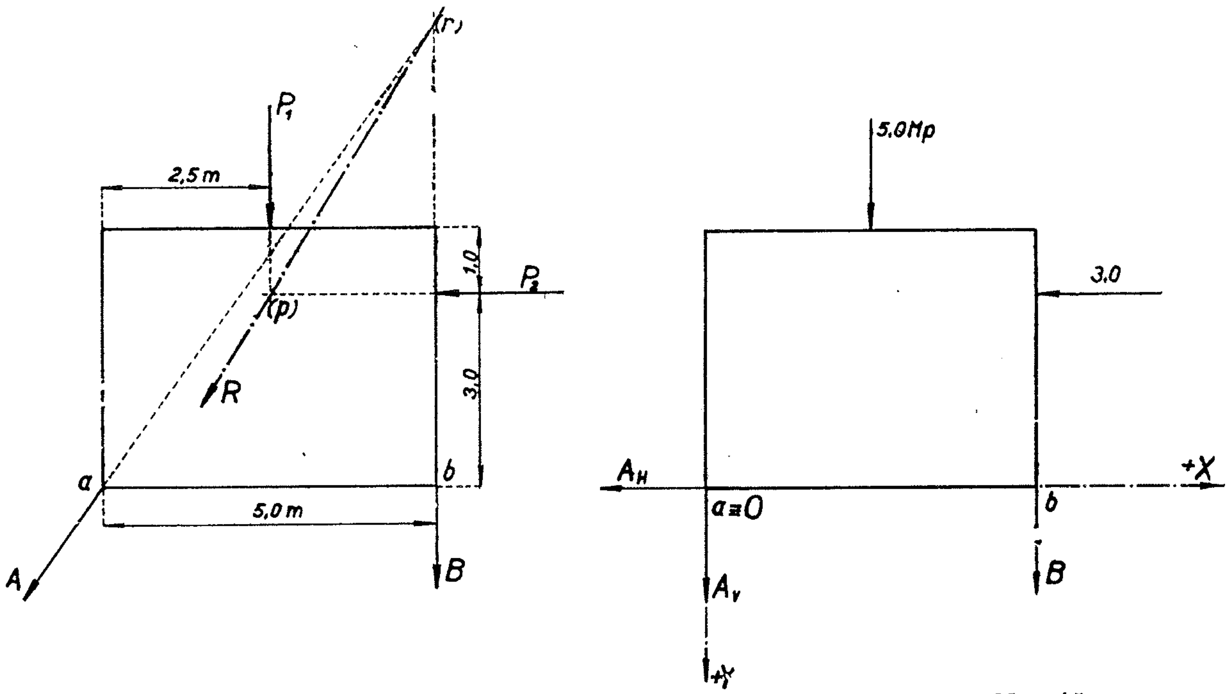
Riešenie:

$$M_A = -300 \,.\, 3{,}0 - 200 \,.\, 2{,}0 - 100 \,.\, 1{,}0 + 300 \,.\, 2{,}0 + 500 \,.\, 3{,}0 =$$
$$= -900 - 400 - 100 + 600 + 1\,500 = 700 \text{ kpm}$$



Obr. 14

Príklad 15. Nahraďte výslednicu naznačených dvoch síl $P_1 = 5{,}0$ Mp, $P_2 = 3$ Mp inými dvoma silami, a to silou A, idúcou bodom a, ako aj silou B, ktorá pôsobí vo zvislom smere v bode b *(obr. 15)*.



Obr. 15

Riešenie

Pri počtárskom riešení si najprv zvolíme súradnicové osi so začiatkom O a šikmú silu A rozložíme na vodorovnú a zvislú zložku.

Silu B vypočítame z momentovej podmienky rovnováhy k bodu a:

$$5{,}0 \,.\, 2{,}5 - 3{,}0 \,.\, 3{,}0 = \mathrm{B} \,.\, 5{,}0$$

$$B = \frac{12{,}5 - 9{,}0}{5{,}0} = 0{,}7 \text{ Mp}$$

Keďže sila B vyšla kladná, súhlasí zmysel tejto sily so zmyslom už prv predpokladanej sily B.

Teraz určíme zložky šikmej sily A. Vo vodorovnom smere platí rovnica

$$A_H = P_2 = 3{,}0 \text{ Mp} \qquad \text{(smeruje vľavo)}$$

vo zvislom smere rovnica

$$A_V + B = P_1$$

$$A_V = 5{,}0 - 0{,}7 = 4{,}3 \text{ Mp} \qquad \text{(smeruje dole)}$$

Veľkosť šikmej sily A určíme z výrazu:

$$A = \sqrt{A_H^2 + A_V^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4{,}3)^2} = \sqrt{9{,}0 + 18{,}49} = 5{,}243 \text{ Mp}$$

Príklad 16. Na tyč naznačenú na *obr. 16* pôsobí sústava síl $P_1 = 5{,}0$ Mp, $P_2 = -3{,}0$ Mp, $P_3 = 1{,}0$ Mp. Nahraďte túto sústavu troma silami pôsobiacimi v smere A, B, C, a to počtársky.

Riešenie

Volíme pravouhlé súradnicové osi so začiatkom a. Z momentovej podmienky k bodu a vypočítame veľkosť sily C:

$$5{,}0 \,.\, 1{,}0 - 3{,}0 \,.\, 2{,}0 + 1{,}0 \,.\, 3{,}0 = C \sin 45°.\, 4{,}0$$

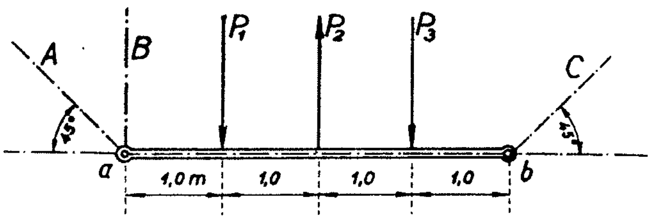
$$C = \frac{5{,}0 - 6{,}0 + 3{,}0}{4{,}0 \,.\, 0{,}707} = \frac{2{,}0}{2{,}828} \doteq 0{,}71 \text{ Mp}$$

Zo súčtovej podmienky vo vodorovnom smere vyplýva rovnica

$$A \cos 45° - C \cos 45° = 0$$

z čoho

$$A = C = 0{,}71 \text{ Mp}$$



Obr. 16

Zo súčtovej podmienky rovnováhy vo zvislom smere dostaneme rovnicu

$$P_1 - P_2 + P_3 = A \sin 45° + C \sin 45° + \text{B}$$

$$5{,}0 - 3{,}0 + 1{,}0 = 0{,}71 \,.\, 0{,}707, + 0{,}71 \,.\, 0{,}707 + B$$

$$B = 3{,}0 - 0{,}502 - 0{,}502$$

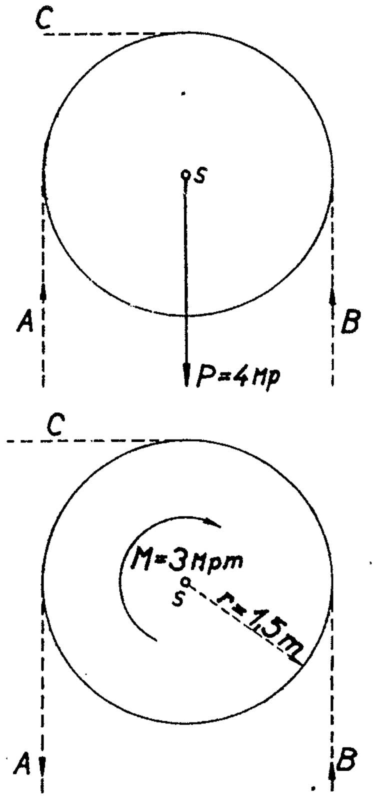
$$B \doteq 2{,}0 \text{ Mp}$$

Príklad 17. Sila $P = 4{,}0$ Mp pôsobí v strede s kruhovej dosky; uveďte ju do rovnováhy so silami A, B, C, ktoré pôsobia v naznačených lúčoch na *obr. 17.*

Riešenie:

Keďže sila C musí pôsobiť vo vodorovnom smere a všetky ostatné sily sú zvislé, zo súčtovej podmienky rovnováhy vo vodorovnom smere vyplýva:

$$C = 0$$



Obr. 17

A keďže aj vo zvislom smere musí byť rovnováha, musí platiť rovnica

$$P - A - B = 0$$
$$P = A + B$$

pričom $A = B$ (lebo sú v rovnakej vzdialenosti od sily P). Teda

$$A = B = \frac{P}{2} = 2{,}0 \text{ Mp}$$

Sily A, B smerujú hore.

Ak namiesto sily P pôsobí v rovine kruhovej dosky dvojica síl s momentom $M = 3{,}0$ Mpm a má nastať rovnováha, sila C musí byť zasa nulová a sily A, B musia mať rovnakú veľkosť, ale opačný zmysel a musia vytvoriť dvojicu síl s rovnakým momentom M, ale opačného zmyslu. Tu platí rovnica

$$A \,.\, 2r + M = 0$$

$$A = -\frac{3}{2 \,.\, 1{,}5} = -1{,}0 \text{ Mp} = -B$$

Sila A má teda zmysel dolu, sila B nahor.

Príklad 18. V rovine kruhovej dosky pôsobí dvojica síl s momentom $M = -9{,}0$ Mpm. Možno uviesť túto kruhovú dosku do rovnováhy silami A, B, C, D, ktoré pôsobia v naznačených lúčoch? Nech polomer dosky $r = 1{,}5$ m, $p = 2{,}0$ m *(obr. 18)*.

Riešenie:

Napíšeme si tri podmienky rovnováhy:

$$A + C = 0$$
$$B + D = 0$$
$$-Pp + r(A + B + C + D) = 0$$

Z týchto troch rovníc nevieme jednoznačne určiť štyri neznáme sily. Ak jednu z neznámych štyroch síl poznáme, úloha sa stane určitou.

Ak napr. sila

$$A = 2{,}0 \text{ Mp, sila } C = -\mathrm{A} = -2{,}0 \text{ Mp}$$

Sily A a C teda tvoria dvojicu síl s momentom

$$M_1 = A \,.\, 2r = 2{,}0 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 = 6{,}0 \text{ Mpm}$$

a preto sily B a D musia tvoriť dvojicu M_2, ktorej moment $M_2 = 3{,}0$ Mpm. Musí teda platiť:

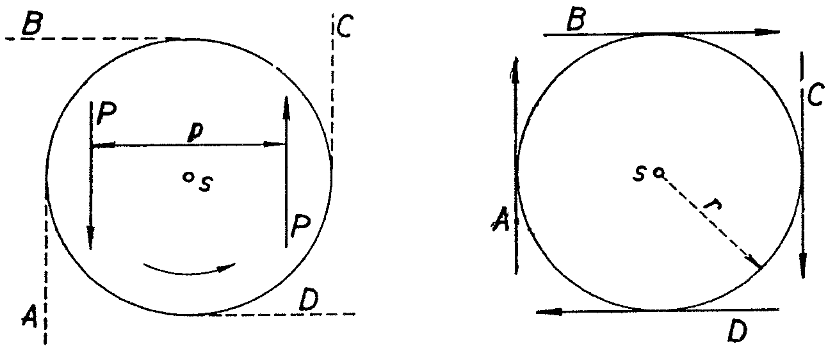
$$3{,}0 = B \,.\, 2r; \qquad 3{,}0 = B \,.\, 2 \,.\, 1{,}5; \qquad B = 1{,}0 \text{ Mp} = -\mathrm{D}$$

Ak $A = 3{,}0$ Mp a

$$M_1 = A \,.\, 2r = 3{,}0 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 = 9{,}0 \text{ Mpm}$$

potom $M_2 = 0$.

Daná dvojica síl s momentom M môže byť teda so silami A, B, C, D v rovnováhe nekonečne mnohými spôsobmi a úloha sa stane jednoznačnou iba vtedy, ak jednu zo štyroch síl poznáme.



Obr. 18

Príklad 19. V rovine pravouhlého trojuholníka abc, naznačeného na *obr. 19*, pôsobí sila P, ktorá spôsobuje k vrcholom a, b, c momenty $M_a = 3{,}0$ Mpm; $M_b = 5{,}0$ Mpm; $M_c = 10{,}0$ Mpm.
Určte silu P. Nech strana $a—c = 3{,}0$ m, $b—c = 4{,}0$ m.

Riešenie:

Určovací lúč sily P dostaneme tak, že zostrojíme dva body x, y tejto sily. Momenty M_a, M_c nanesieme kolmo na stranu $a—c$ a spojnica koncových bodov týchto momentov pretína priamku $a—c$ v bode x, ktorý je už jedným bodom sily P. Rovnako zostrojíme bod y priamky P — ako priesečník strany $b—c$ daného trojuholníka so spojnicou koncových bodov momentov nanesených kolmo na stranu $b—c$.

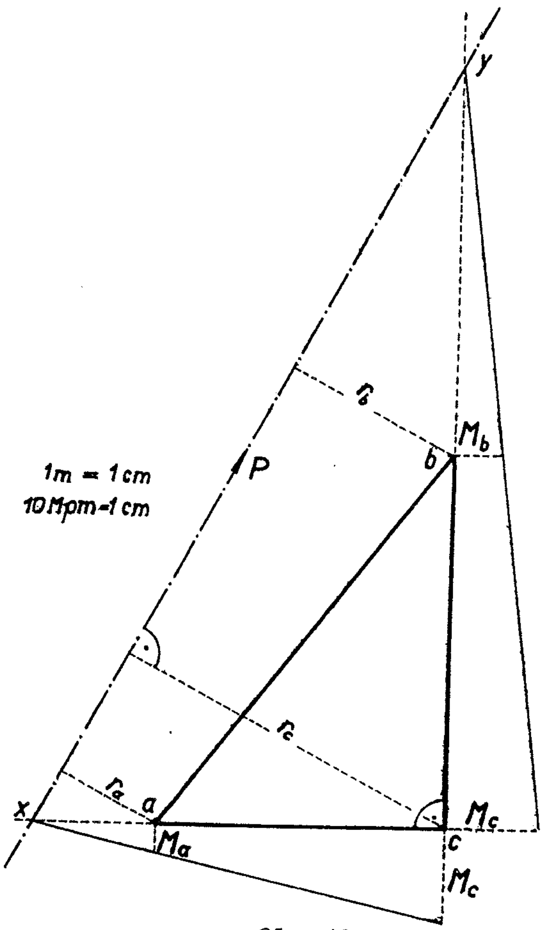
Vzdialenosť takto určenej sily P od vrcholu c trojuholníka odmeriame; v našom prípade je to $r_c = 3{,}7$ m. Teraz už ľahko zistíme veľkosť sily P, a to z výrazu

$$M_c = 10{,}0 \text{ Mpm}; \quad Pr_c = 10; \quad P \,.\, 3{,}7 = 10$$

$$P = \frac{10}{3{,}7} = 2{,}70 \text{ Mp}$$

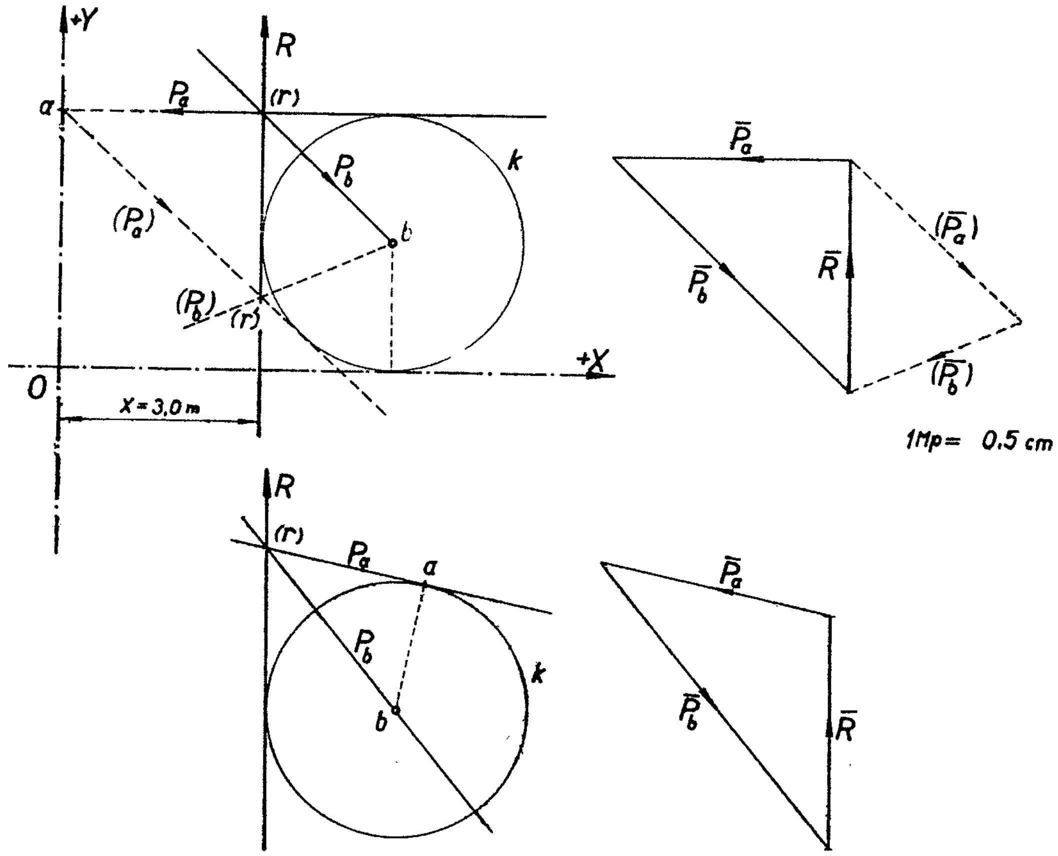
Keďže sila P spôsobuje kladné momenty, jej zmysel ide šikmo nahor.

Ak odmeriame vzdialenosť vrcholov a, b trojuholníka abc, dostaneme vzdialenosti $r_a = 1{,}1$ m, $r_b = 1{,}85$ m. Potom momenty sú $M_a = Pr_a = 2{,}7 \,.\, 1{,}1 = 3{,}0$ Mpm; $M_b = Pr_b = 2{,}7 \,.\, 1{,}85 \doteq 5{,}0$ Mpm.



Obr. 19

Príklad 20. Danú zvislú silu $R = 5{,}0$ Mp uveďte do rovnováhy so silou P_a, idúcou bodom a (0; 4), a silou P_b, prechádzajúcou bodom b (5; 2). Predpokladáme, že sila P_a sa rovná známej sile R a body a, b neležia na lúči sily R, ktorá pôsobí zvisle hore vo vzdialenosti $x = 3{,}0$ m *(obr. 20)*.



Obr. 20

Riešenie:

Tri sily R, P_a, P_b majú byť v rovnováhe, preto musia ísť jedným bodom a súčet momentov týchto troch síl k ľubovoľnému bodu ich roviny, teda aj k bodu b, musí sa rovnať nule. Keďže moment sily P_b k bodu b sa rovná nule, musí mať moment sily R a sily P_a k bodu b rovnakú veľkosť ale opačný zmysel. Preto aj vzdialenosť sily R a P_a od bodu b musí byť rovnaká. Podľa toho lúč sily P_a dostaneme tak, že z bodu b kreslíme takú kružnicu k, ktorá sa dotýka známej sily R a k tejto kružnici vedieme z bodu a dotyčnicu, ktorá pretína silu R v bode (r), ktorým musí prechádzať aj sila P_b.

Ak bod a leží mimo kruhu, môžeme z neho viesť dve dotyčnice ku kružnici; táto úloha má tedy dvojaké riešenie.

V našom prípade dostaneme tieto hodnoty síl:

$$P_a = R = (P_a) = 5{,}0 \text{ Mp}; \quad P_b = 7{,}07 \text{ Mp}; \quad (P_b) = 3{,}9 \text{ Mp}$$

Ak bod a leží na kružnici k, môžeme ním viesť iba jedinú dotyčnicu. Potom je úloha jednoznačná.

Sila P_a ide v smere dotyčnice vedenej bodom a ku kružnici k a jej hodnota

$$P_a = R = 5{,}0 \text{ Mp}$$

Sila P_b v našom prípade má veľkosť $P_b = 7{,}9$ Mp a ide priesečníkom (r) sily R a sily P_a.

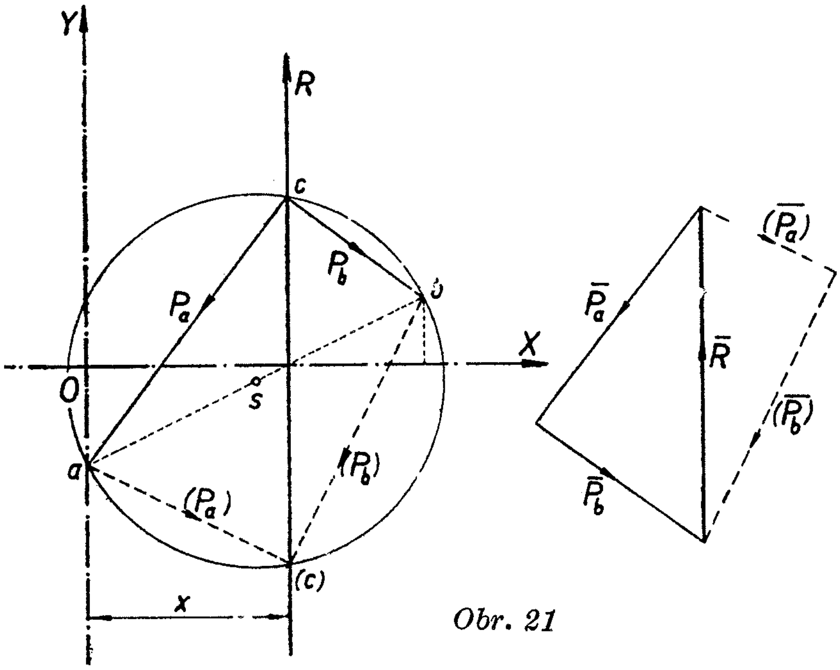
Ak bod a leží vo vnútri kruhu, je úloha neriešiteľná.

Príklad 21. Zvislú silu $R = 5{,}0$ Mp pôsobiacu smerom nahor, uveďte do rovnováhy so silami navzájom kolmými, z ktorých P_a ide bodom a (0; —1,5) a sila P_b bodom b (5; 1). Sila R pôsobí zvisle vo vzdialenosti $x = 3{,}0$ m *(obr. 21)*.

Riešenie:

Sily R, P_a, P_b, ktoré majú byť v rovnováhe, musia ísť spoločným bodom c. Aby sme zostrojili tento bod c, musíme viesť bodmi a, b kružnicu s priemerom a—b. Sila R pretína túto kružnicu vo dvoch bodoch: c a (c), preto aj úloha je dvojznačná. Ako ukazuje silový obrazec, hodnoty síl sú nasledovné:

$P_a = 4{,}0$ Mp; $P_b = 3{,}0$ Mp
$(P_a) = 2{,}2$ Mp; $(P_b) = 4{,}5$ Mp



Obr. 21

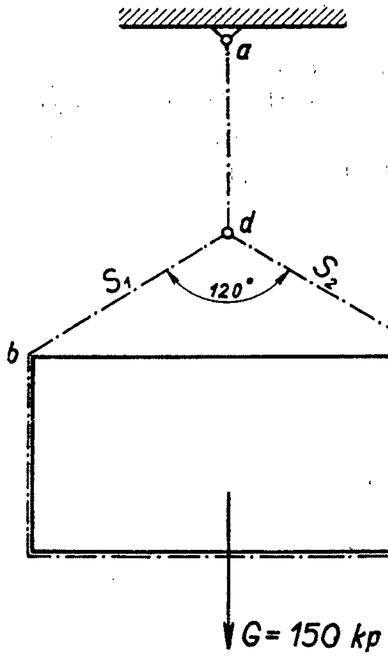
Ak sa kružnica zostrojená nad priemerom a—b dotýka sily R, je úloha jednoznačná.

Ak kružnica zostrojená nad priemerom a—b nepretína silu R, úloha je neriešiteľná.

Príklad 24. Kamenný kváder tiaže $G = 150$kp máme zavesiť pomocou lana k pevnému podporovému bodu a *(obr. 24)*. Lano obopína kváder a obidva konce lana sú pripevnené k prstencu d, ku ktorému je pripevnené aj lano a—d. Máme vypočítať, aké sily vzniknú v lane v časti d—a a v časti b—d, resp. c—d, keď

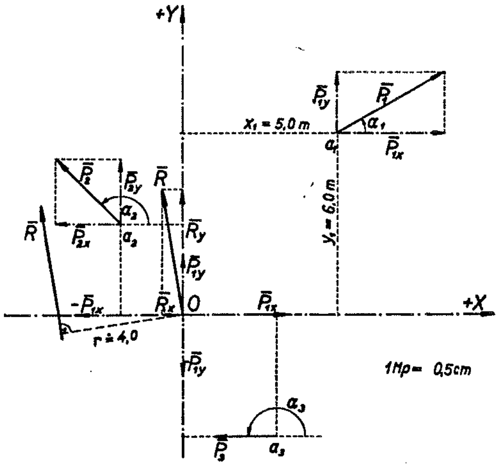
a) $\sphericalangle bdc = 120°$, b) $\sphericalangle bdc = 90°$

[Reakcia $A = -G = -150$ kp.
Ak $\sphericalangle bdc = 120°$, $S_1 = S_2 = G = 150$ kp;
ak $\sphericalangle bdc = 90°$, $S_1 = S_2 \doteq 106$ kp.]



Obr. 24

Príklad 23. Zistite účinok síl $P_1 = 4{,}0$ Mp, $P_2 = 3{,}0$ Mp, $P_3 = 2{,}0$ Mp na bod O. Sily nech pôsobia v naznačených sklonoch a prechádzajú bodmi a_1 (5; 6), a_2 (—2; 3), a_3)3; —4). Nech $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 135°$, $\alpha_3 = 180°$ *(obr. 23).*



Obr. 23

Riešenie:

Šikmú silu $P_1 = 4{,}0$ Mp, pôsobiacu v bode a_1 (5; 6), rozložíme do smeru vodorovného (P_{1x}) a zvislého (P_{1y}). Aby sme určili účinok sily P_1 na bod O, naznačme v bode O začiatok pravouhlých súradnicových osí X, Y a kreslime v tomto bode nulový systém síl $+P_{1x}$, $-P_{1x}$, $+P_{1y}$, $-P_{1y}$. Namiesto sily P_1 máme teraz šesť zložiek tejto sily, ktorých účinok vzhľadom na bod O je jednak otáčavý, jednak posuvný.

a) Otáčavý účinok sily P_1 k bodu O:

Sila P_{1x} v bode a_1 a sila $-P_{1x}$ v bode O dávajú dvojicu síl s momentom $P_{1x}y_1$; práve tak sila P_{1y} v bode a_1 a sila $-P_{1y}$ v bode O dá dvojicu síl s momentom $-P_{1y}x_1$. Sčítaním obidvoch týchto dvojíc dostaneme dvojicu

$$M_1 = P_{1x}y_1 - P_{1y}x_1 = P_1 \cos \alpha_1 y_1 - P_1 \sin \alpha_1 x_1 =$$
$$= 4{,}0 \cos 30° \,.\, 6{,}0 - 4{,}0 \sin 30° \,.\, 5{,}0 = 4{,}0 \,.\, 0{,}866 \,.\, 6{,}0 -$$
$$-4{,}0 \,.\, 0{,}500 \,.\, 5 = 10{,}784 \text{ Mpm}$$

b) V bode O ostáva ešte vodorovná posuvná zložka

$$P_{1x} = P_1 \cos 30° = 4{,}0 \,.\, 0{,}866 = 3{,}464 \text{ Mp}$$

a zvislá posuvná zložka

$$P_{1y} = P_1 \sin 30° = 4{,}0 \,.\, 0{,}5 = 2{,}0 \text{ Mp}$$

Ak berieme do úvahy účinok všetkých troch síl, ich posuvný účinok v smere osi X bude mať hodnotu

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} = P_1 \cos 30° - P_2 \cos 45° - P_3 =$$
$$= 3{,}464 - 3{,}0 \,.\, 0{,}707 - 2{,}0 = -0{,}657 \text{ Mp}$$

Rovnako vo zvislom smere posuvný účinok bude:

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} = 2{,}0 + 3{,}0 \,.\, 0{,}707 = 4{,}121 \text{ Mp}$$

Výsledný posuvný účinok dá v bode O výslednicu

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0{,}657^2 + 4{,}121^2} = \sqrt{17{,}41} = 4{,}17 \text{ Mp}$$

Ak chceme stanoviť výsledný otáčavý účinok M_0 všetkých troch síl k bodu O, musíme sčítať dvojice síl M_1, M_2, M_3, ktoré sú vyvodené vodorovnými a zvislými zložkami síl P_1, P_2, P_3.

Preto výsledná dvojica bude:

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 = 10{,}784 - P_{2x}y_2 + P_{2y}x_2 + P_{3x}y_3 =$$
$$= 10{,}784 - 2{,}121 \,.\, 3{,}0 - 2{,}121 \,.\, 2{,}0 + 2{,}0 \,.\, 4{,}0 =$$
$$= 10{,}784 - 2{,}121 + 8{,}0 = 16{,}663 \text{ Mpm}$$

Vieme však, že výsledná dvojica je:

$$M_0 = Rr$$

z čoho vzdialenosť r výslednej sily R od bodu O je:

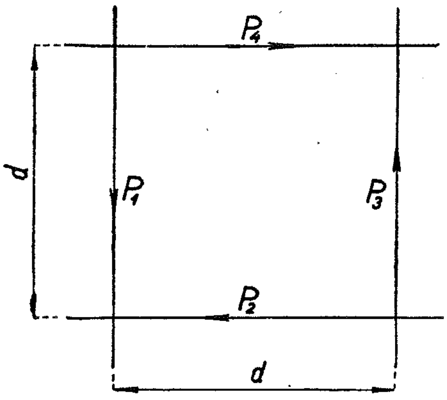
$$r = \frac{M_0}{R} = \frac{16{,}663}{4{,}17} \doteq 4{,}0 \text{ m}$$

Účinok všetkých troch síl P_1, P_2, P_3 k začiatku O je daný účinkom výslednice R, ktorá pôsobí vo vypočítanej vzdialenosti $r \doteq 4{,}0$ m od bodu O. Keďže výsledná dvojica M_0 má kladnú hodnotu, nanesieme vzdialenosť r vľavo od vyslednice R, idúcej bodom O.

Ako vieme, výslednú silu R, pôsobiacu v bode O, a výslednú dvojicu $M_0 = Rr$ môžeme nahradiť statickým momentom výslednice R, ktorá je posunutá na vzdialenosť $r \doteq 4{,}0$ m vľavo od bodu O. Dvojica síl je teda iba zložkou statického momentu sily.

Príklad 25. Dané sily P_1, P_2, P_3 a P_4 rovnakej veľkosti $P = 3{,}0$ Mp ležia v stranách štvorca a ich zmysel je naznačený v obrazci. Máme určiť ich výslednicu R, ak strana štvorca $d = 4{,}0$ m *(obr. 25)*.

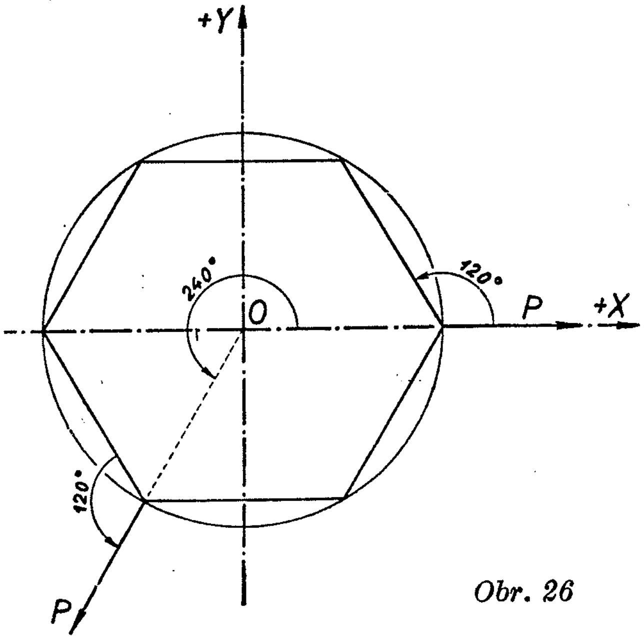
[Naznačené štyri sily sú v rovnováhe (výslednica $R = 0$).]



Obr. 25

Príklad 26. Vypočítajte veľkosť a smerový uhol α výslednice R dvoch rovnakých síl P, ktorých smer aj veľkosť poznáme. Nech $P = 2{,}0$ Mp *(obr. 26)*.

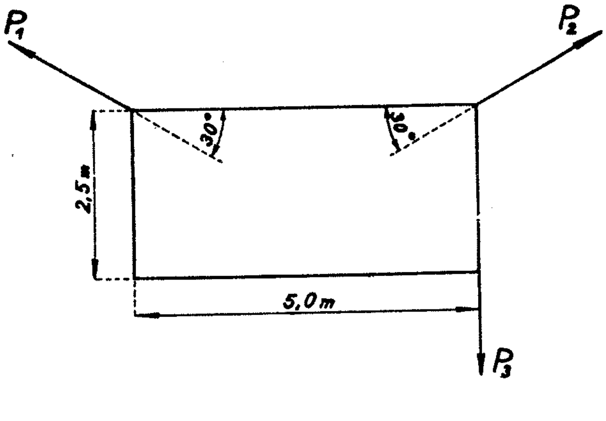
[$R = P = 2{,}0$ Mp; $\alpha_R = 300°$.]



Obr. 26

Príklad 27. Určte výslednicu naznačených troch síl. Nech $P_1 = P_2 = P_3 = 4{,}0$ Mp *(obr. 27)*.

[Výslednicou danej sústavy troch síl je dvojica síl s momentom $M = 10{,}0$ Mpm.]



Obr. 27

Příklad 1.3

Z a d á n í : Určit výslednici rovinného svazku sil uvedeného na obr. 1.9 .

Ř e š e n í : Výpočet složek výslednice podle vzorců (1.8), tj.

$$F_{rx} = \sum_{i=1}^{4} F_i \cos\alpha_i\,, \qquad F_{ry} = \sum_{i=1}^{4} F_i \sin\alpha_i\,,$$

uspořádáme do tabulky 1.1 .

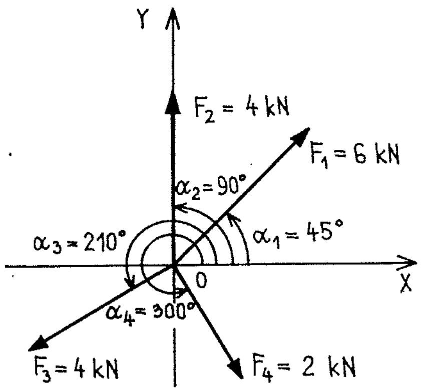
i	F_i (kN)	α_i (°)	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$F_i\cos\alpha_i = F_{ix}$	$F_i\sin\alpha_i = F_{iy}$
1	6,00	45	0,707	0,707	4,242	4,242
2	4,00	90	0,000	1,000	0,000	4,000
3	4,00	210	-0,866	-0,500	-3,464	-2,000
4	2,00	300	0,500	-0,866	1,000	-1,732
					$F_{rx} = 1,778$	$F_{ry} = 4,510$
					$F_{rx} = \sum_i F_{ix}$	$F_{ry} = \sum_i F_{iy}$

TABULKA 1.1

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{1,778^2 + 4,510^2} = 4,848 \text{ kN}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_{rx}}{F_r} = \frac{1,778}{4,848} = 0,376, \qquad \sin\alpha = \frac{F_{ry}}{F_r} = 0,930$$

$$\alpha = \arccos 0,376 \doteq 67°55'$$



Obr. 1.9

Příklad 1.4

Z a d á n í : Určit velikost síly $\vec{F}_3$ tak, aby výslednice soustavy sil $\vec{F}_1$ až $\vec{F}_3$ působících v bodě m (obr. 1.10) byla svislá.

Ř e š e n í : Složky výslednice musí být :

$$F_{rx} = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 0\,, \qquad F_{ry} = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = -F_r\,.$$

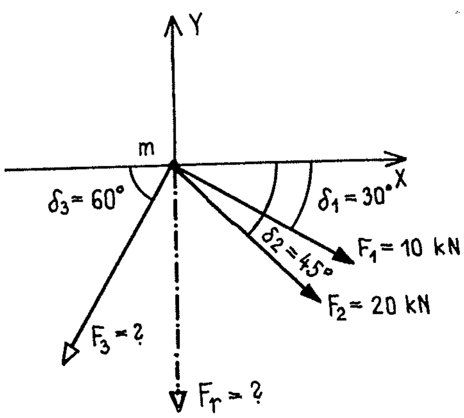
Tj. :

$$\rightarrow\ F_{rx} = F_1\cos 30° + F_2\cos 45° - F_3\cos 60° = 0$$

$$\uparrow\ F_{ry} = -F_1\sin 30° - F_2\sin 45° - F_3\sin 60° = -F_r$$

$$10 \cdot 0,866 + 20 \cdot 0,707 - F_3 \cdot 0,500 = 0$$

$$-10 \cdot 0,500 - 20 \cdot 0,707 - F_3 \cdot 0,866 = -F_r$$



Obr. 1.10

Řešením těchto rovnic dostaneme

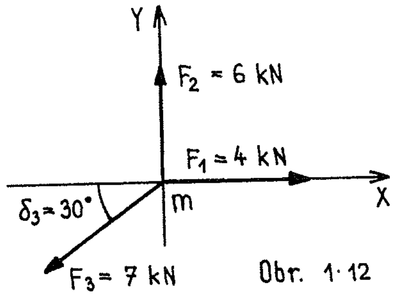
$$F_3 = 45,600 \text{ kN}\,, \qquad F_r = 58,630 \text{ kN}\,.$$

Příklad 1.5

Z a d á n í : Síly $\{\vec{F_i}\}(i = 1,2,3)$ uvést do rovnováhy jedinou silou $\vec{R}$ (obr.1.12)

$F_1 = 4$ kN , $\alpha_1 = 0^\circ$;
$F_2 = 6$ kN , $\alpha_2 = 90^\circ$;
$F_3 = 7$ kN , $\alpha_3 = 210^\circ$;

$R = ?$, $\alpha = ?$



Obr. 1·12

Ř e š e n í : Podle (1.13) musí být

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{R} = 0.$$

Podle (1.14) je :

$$\rightarrow \sum_1^3 F_{ix} + R_x = 0 \qquad \rightarrow F_1 \cos 0^\circ + F_2 \cos 90^\circ - F_3 \cos 30^\circ + R_x = 0$$

$$\uparrow \sum_1^3 F_{iy} + R_y = 0 \qquad \uparrow F_1 \sin 0^\circ + F_2 \sin 90^\circ - F_3 \sin 30^\circ + R_y = 0$$

$$4 + 0 - 7 \cdot 0{,}866 + R_x = 0$$

$$0 + 6 - 7 \cdot 0{,}500 + R_y = 0$$

$$R_x = 2{,}05 \text{ kN}, \quad R_y = -2{,}50 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2{,}05^2 + 2{,}50^2} = 3{,}25 \text{ kN}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{2{,}05}{3{,}25} = 0{,}631 , \quad \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = -0{,}769$$

$$\arccos 0{,}631 = 50^\circ 50', \quad \alpha = 360^\circ - 50^\circ 50' = 309^\circ 10'.$$

Příklad 1.6

Z a d á n í : Síly $\{\vec{F_i}\}(i = 1,2,3)$ uvést do rovnováhy dvěma silami $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ působícími v daných paprscích podle obr. 1.13 .

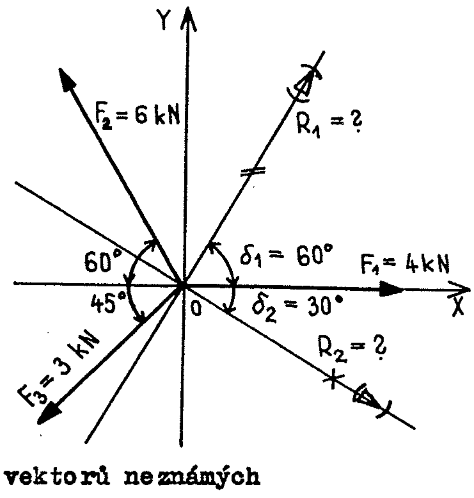
$F_1 = 4$ kN , $\alpha_1 = 0^\circ$; $R_1 = ?$, $\delta_1 = 60^\circ$
$F_2 = 6$ kN , $\alpha_2 = 120^\circ$; $R_2 = ?$, $\delta_2 = 30^\circ$
$F_3 = 3$ kN , $\alpha_3 = 225^\circ$;

Ř e š e n í : Výslednice obou soustav musí být nulová :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{R_1} + \vec{R_2} = 0 ,$$

tj. v zápisu podle (1.14) :

$$\rightarrow \sum_{i=1}^3 F_{ix} + \sum_{j=1}^2 R_{jx} = 0 , \qquad \uparrow \sum_{i=1}^3 F_{iy} + \sum_{j=1}^2 R_{jy} = 0 .$$



Obr. 1·13

Pro sestavení těchto výminek předpokládáme smysl (orientaci) vektorů neznámých sil $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ - v obr. 1.13 a je vyznačen na paprscích sil šipkou v závorce.

$$\rightarrow F_1 \cos 0^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 45^\circ + R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\uparrow F_1 \sin 0^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 45^\circ + R_1 \sin 60^\circ - R_2 \sin 30^\circ = 0$$

$$4 - 6 \cdot 0{,}500 - 3 \cdot 0{,}707 + R_1 \cdot 0{,}500 + R_2 \cdot 0{,}866 = 0$$

$$0 + 6 \cdot 0{,}866 - 3 \cdot 0{,}707 + R_1 \cdot 0{,}866 - R_2 \cdot 0{,}500 = 0$$

$$R_1 = -2{,}102 \text{ kN}, \qquad R_2 = 2{,}508 \text{ kN}$$

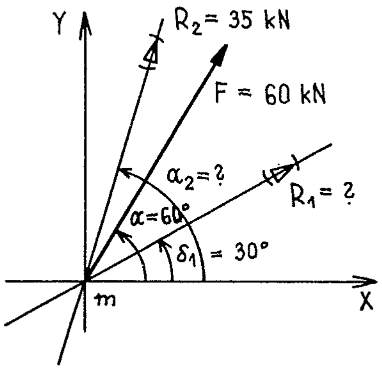
Velikost síly R_1 vyšla záporná, to znamená, že smysl síly R_1 je opačný než jsme předpokládali.

Příklad 1.7

Z a d á n í : Sílu $\vec{F}$ uvést do rovnováhy dvěma silami $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ z nichž jedna působí v daném paprsku a druhá je určena jen velikostí (obr. 1.14)

$F = 60$ kN , $\alpha = 60°$; $R_1 = ?$, $\delta_1 = 30°$

$R_2 = 35$ kN , $\alpha_2 = ?$



Obr. 1·14

Ř e š e n í : Pro rovnováhovou soustavu sil musí podle (1.13) platit :

$$\vec{F} + \vec{R_1} + \vec{R_2} = 0 \ .$$

Předpokládáme-li, že síly $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ působí v prvním kvadrantu (obr. 1.14) jsou podmínky rovnováhy ve složkovém vyjádření :

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & F \cos 60° + R_1 \cos 30° + R_2 \cos \alpha_2 = 0 \\ \uparrow \quad & F \sin 60° + R_1 \sin 30° + R_2 \sin \alpha_2 = 0 \\ \hline & 60 \cdot 0{,}500 + R_1 0{,}866 + 35 \cdot \cos\alpha_2 = 0 \\ & 60 \cdot 0{,}866 + R_1 0{,}500 + 35 \cdot \sin\alpha_2 = 0 \end{aligned} \qquad (a)$$

Poslední člen levé strany v obou rovnicích převedeme na pravé strany, rovnice umocníme dvěma a sečteme. Použitím vztahu $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ dostaneme kvadratickou rovnici

$$3599 + 103{,}9\ R_1 + R_1^2 = 1225$$

a její řešení

$$R_{11} = -69{,}988 \text{ kN}, \qquad R_{12} = -33{,}932 \text{ kN}.$$

Síla $\vec{R_1}$ je orientována opačně než jsme předpokládali, $\alpha_1 = 210°$. Z rovnic (a) pak vypočteme

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_{21} &= 0{,}875 \\ \sin \alpha_{21} &= -0{,}485 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_{21} = 331° ,$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha_{22} &= -0{,}001 \\ \sin \alpha_{22} &= -1{,}000 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_{22} = 270° .$$

podmínka řešitelnosti

$$R_2 \geqq F \sin(\alpha - \delta_1) .$$

Při splnění rovnosti má úloha jediné řešení.

Příklad 1.8

Z a d á n í : Síly $\{\vec{F}_i\}(i = 1,2)$ nahradit silami $\{\vec{R}_j\}(j = 1,2,3)$, je-li dáno (obr. 1.15a) :

$F_1 = 5$ kN , $\alpha_{F_1} = 30^\circ$; $R_1 = 3$ kN , $\alpha_1 = 330^\circ$;

$F_2 = 2$ kN , $\alpha_{F_2} = 90^\circ$; $R_2 = ?$, $\delta_2 = 45^\circ$;

$R_3 = ?$, $\delta_3 = 45^\circ$.

Ř e š e n í : Soustava sil $\{\vec{R}_j\}$ musí mít stejnou výslednici jako soustava sil $\{\vec{F}_i\}$.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 \; .$$

Pro sestavení složkových podmínek předpokládáme orientaci sil $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ podle obr.1.15 (šipky v závorkách) .

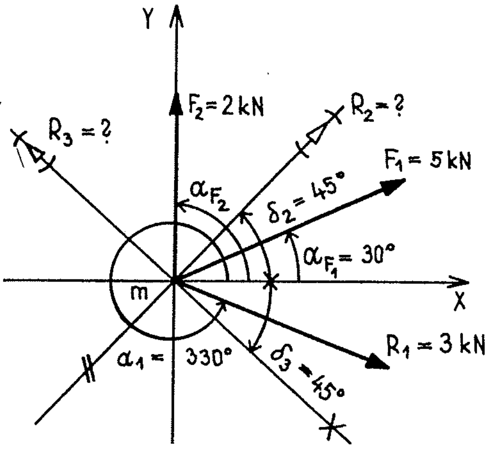
$\rightarrow$ $F_1 \cos 30^\circ + 0 = R_1 \cos 30^\circ + R_2 \cos 45^\circ - R_3 \cos 45^\circ$

$\uparrow$ $F_1 \sin 30^\circ + F_2 = -R_1 \sin 30^\circ + R_2 \sin 45^\circ + R_3 \sin 45^\circ$

$5 \cdot 0{,}866 = 3 \cdot 0{,}866 + R_2 \cdot 0{,}707 - R_3 \cdot 0{,}707$

$5 \cdot 0{,}500 + 2 = -3 \cdot 0{,}500 + R_2 \cdot 0{,}707 + R_3 \cdot 0{,}707$

$\underline{R_2 = 5{,}46 \text{ kN}}$, $\underline{R_3 = 3{,}02 \text{ kN}}$



Obr. 1·15

Příklad 1.23

Z a d á n í : Určit výslednici rovinné soustavy sil zadané na obr. 1.39.

Ř e š e n í : Výpočet složek výslednice podle rovnic (1.46) uspořádáme do tabulky 1.2.

Velikost výslednice

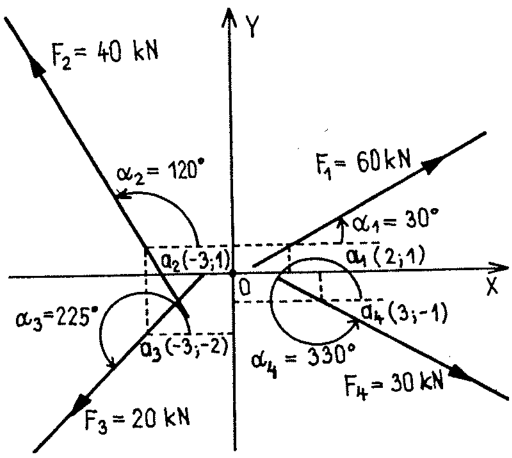
$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = 56{,}38 \text{ kN}$$

Směr vektoru výslednice

$$\cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r} = 0{,}777 \; ;$$

$$\sin \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_r} = 0{,}630 \; ;$$

$$\alpha_r = 39^\circ 03'$$



Obr. 1·39

Polohu výslednice určíme rovnicí paprsku (1.47) $M_r = F_{ry}\, x - F_{rx}\, y$

$$-80{,}76 = 35{,}50\, x - 43{,}80\, y$$

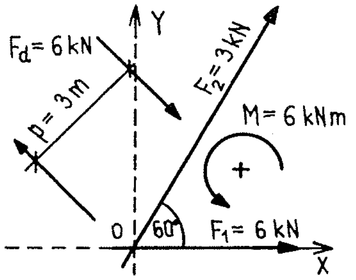
i	F_i (kN)	α_i (°)	x_i (m)	y_i (m)	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$	$F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$	$M_i = F_{iy} x_i - F_{ix} y_i$
1	60	30	2	1	0,866	0,500	51,96	30,00	8,04
2	40	120	-3	1	-0,500	0,866	-20,00	34,64	-83,92
3	20	225	-3	-2	-0,707	-0,707	-14,14	-14,14	14,14
4	30	330	3	-1	0,866	-0,500	25,98	-15,00	-19,02
							$43{,}80 = F_{rx}$	$35{,}50 = F_{ry}$	$-80{,}76 = M_r$

T a b u l k a 1.2

Průsečíky paprsku s osami $y = 0$, $x_0 = -2{,}275$ m ; $x = 0$, $y_0 = 1{,}844$ m .

Příklad 1.24

Z a d á n í : Určit výslednici sil $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, dvojice sil $\vec{F_d}$ a momentu M, zadaných na obr. 1.41.



Obr. 1.41

Ř e š e n í : Počátek souřadnicového systému zvolíme v průsečíku paprsků sil $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$.

$\rightarrow F_{rx} = F_1 + F_2 \cos 60°$

$\uparrow F_{ry} = F_2 \sin 60°$

$M_r = -F_d\, p + M$

$F_{rx} = 6 + 3 \cdot 0{,}5 = 7{,}500$ kN

$F_{ry} = 3 \cdot 0{,}866 = 2{,}598$ kN

$M_r = -3 \cdot 6 + 6 = -12{,}0$ kN m

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{7{,}5^2 + 2{,}598^2} = 7{,}937 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r} = 0{,}945 \;;$$

$$\sin \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_r} = 0{,}327 \;; \qquad \alpha_r \doteq 19°05'$$

$$y = 0{,}346\, x + 1{,}60 \,.$$

Příklad 1.25

Z a d á n í : Určit výsledný účinek sil $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ a dvojice sil $\vec{F_d}$ zadaných na obr. 1.43 .

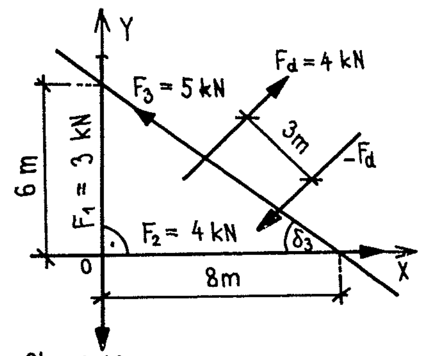
Ř e š e n í :

$$\rightarrow F_{rx} = F_2 - F_3 \cos \delta_3 = 4 - 5 \cdot \frac{8}{10} = 0$$

$$\uparrow F_{ry} = -F_1 + F_3 \sin \delta_3 = -3 + 5 \cdot \frac{6}{10} = 0$$

$$M_r = F_3 \sin \delta_3 \cdot 8 - F_d \cdot 3 =$$

$$= 5 \cdot \frac{6}{10} \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 12{,}0 \text{ kN m}$$



Obr. 1.43

Výslednicí zadané soustavy je dvojice sil $\vec{S}$ o momentu dvojice $M = 12$ kN m .

Příklad 1.26

Z a d á n í : Určit výslednici soustavy rovnoběžných sil uvedených na obr. 1.45 .

Ř e š e n í :

$$\rightarrow \quad F_{rx} = 0$$

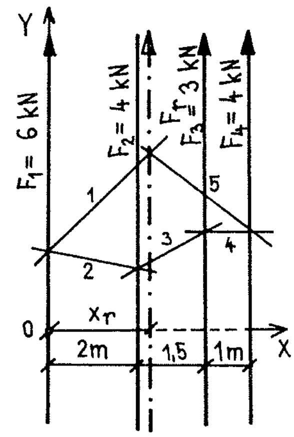
$$\uparrow \quad F_{ry} = F_1 - F_2 + F_3 + F_4 = 6 - 4 + 3 + 4 = 9{,}00 \text{ kN} = F_r$$

$$\circlearrowleft \quad M_r = -F_2 p_2 + F_3 p_3 + F_4 p_4 =$$

$$= -4 \cdot 2 + 3 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 4{,}5 = 20{,}5 \text{ kN m}$$

Použitím Varignonovy věty dostaneme vzdálenost výslednice od zvolené osy $Y \equiv F_1$

$$x_r = \frac{M_r}{F_r} = \frac{20{,}5}{9{,}0} = 2{,}277 \text{ m}$$



Obr. 1.45

Příklad 1.27

Z a d á n í : Soustavu sil $\{\vec{F_j}\}$(obr.1.52) uvést do rovnováhy jedinou silou $\vec{R}$.

$F_1 = 3$ kN , $\alpha_1 = 45^\circ$, $a_1(0;\ 2)$;

$F_2 = 4$ kN , $\alpha_2 = 105^\circ$, $a_2(-3;\ 0)$;

$F_3 = 2$ kN , $\alpha_3 = 330^\circ$, $a_3(3{,}5;\ 0)$.

Ř e š e n í : Síla $\vec{R}$ bude v rovnováze se silami $\{\vec{F_j}\}$, jestliže budou splněny statické podmínky rovnováhy (1.49´):

$$R_x + F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 105^\circ + F_3 \cos 330^\circ = 0$$

$$R_y + F_1 \sin 45^\circ + F_2 \sin 105^\circ + F_3 \sin 330^\circ = 0$$

$$M - F_1 y_1 \cos 45^\circ + F_2 x_2 \sin 105^\circ + F_3 x_3 \sin 330^\circ = 0$$

$$R_x = -3 \cdot 0{,}707 + 4 \cdot 0{,}259 - 2 \cdot 0{,}866 = -2{,}818 \text{ kN}$$

$$R_y = -3 \cdot 0{,}707 - 4 \cdot 0{,}966 + 2 \cdot 0{,}500 = -4{,}985 \text{ kN}$$

$$M = 3 \cdot 2 \cdot 0{,}707 + 4 \cdot 0{,}966 \cdot 3 + 2 \cdot 0{,}500 \cdot 3{,}5 = 19{,}334 \text{ kN}$$

Velikost rovnovážné síly $\vec{R}$:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2{,}818^2 + 4{,}985^2} = 5{,}728 \text{ kN}$$

Směr(a smysl) :

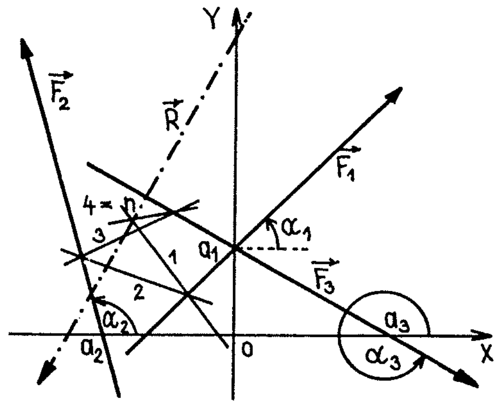
$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R} = -0{,}492 ,$$

$$\sin \alpha_R = \frac{R_y}{R} = -0{,}870$$

$$\alpha_R = 180^\circ + 60^\circ 30' = 240^\circ 30'$$

Směrnicová rovnice paprsku síly $\vec{R}$

$$y = \frac{R_y}{R_x} x - \frac{M_o}{R_x} = 1{,}769\, x + 6{,}861$$



Obr. 1.52

Příklad 1.28

Z a d á n í : Síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a dvojici sil $\vec{Q}$ uvést do rovnováhy dvěma silami, z nichž paprsek síly $\vec{A}$ prochází zadaným bodem a a síla $\vec{B}$ působí v zadaném paprsku (obr. 1.53).

Ř e š e n í : Síla $\vec{A}$ působící v bodě a bude určena složkami A_x, A_y, síla $\vec{B}$ svojí velikostí. Pro početní řešení předpokládáme, že kladné složky síly $\vec{A}$ působí ve smyslu kladných souřadnicových os a síla $\vec{B}$ je orientována do IV.kvadrantu (na obr. 1.53a) – označení šipkou v závorkách). Zadaná soustava sil bude v rovnováze se silami $\vec{A}$, $\vec{B}$, budou-li splněny podmínky rovnováhy (1.49) resp. (1.51) :

$$\rightarrow \quad 0 - F_2 \cos 60^\circ + A_x + B \cos 45^\circ = 0$$
$$\uparrow \quad -F_1 - F_2 \sin 60^\circ + A_y - B \sin 45^\circ = 0$$
$$\circlearrowleft a \quad 2 F_1 - 4 F_2 \sin 60^\circ + 2 Q - 6 B \sin 45^\circ = 0$$

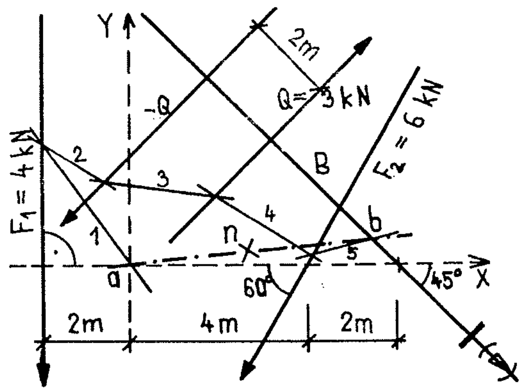
$$0 - 6 \cdot 0{,}500 + A_x + B \cdot 0{,}707 = 0$$
$$-4 - 6 \cdot 0{,}866 + A_y - B \cdot 0{,}707 = 0$$
$$2 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 0{,}866 + 2 \cdot 3 - 6 B \cdot 0{,}707 = 0$$

$B = -1{,}599$ kN , $A_x = 4{,}131$ kN , $A_y = 8{,}065$ kN

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 9{,}062$ kN

$\cos \alpha_A = 0{,}456$, $\sin \alpha_A = 0{,}890$,

$\alpha_A \doteq 62^\circ 50'$



Obr. 1.53

Příklad 1.29

Z a d á n í : Sílu $\vec{F}$, dvojici sil $\vec{Q}$ a moment M uvést do rovnováhy silou $\vec{A}$ působící v bodě a a silou $\vec{B}$ působící v paprsku B . Zadání je uvedeno na obr.1.54 .

Ř e š e n í : Síla $\vec{A}$ působící v bodě a bude určena složkami A_x, A_y, další neznámou je velikost síly $\vec{B}$. Pro početní řešení předpokládáme smysl neznámých sil podle obr. 1.54 .

$$\rightarrow \quad A_x + B \cos 45^\circ = 0$$
$$\uparrow \quad -F + A_y - B \sin 45^\circ = 0$$
$$\circlearrowleft a \quad -M - 2F - 3Q - 8B \sin 45^\circ = 0$$

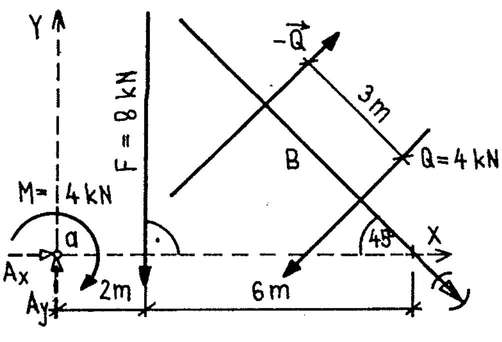
$$A_x + 0{,}707\, B = 0$$
$$-8{,}0 + A_y - 0{,}707\, B = 0$$
$$-4{,}0 - 2 \cdot 8{,}0 - 3 \cdot 4{,}0 - 8 \cdot 0{,}707\, B = 0$$

$B = -5{,}658$ kN , $A_x = 4{,}0$ kN , $A_y = 4{,}0$ kN .

Smysl síly $\vec{B}$ je opačný než jsme předpokládali.

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 5{,}658$ kN ,

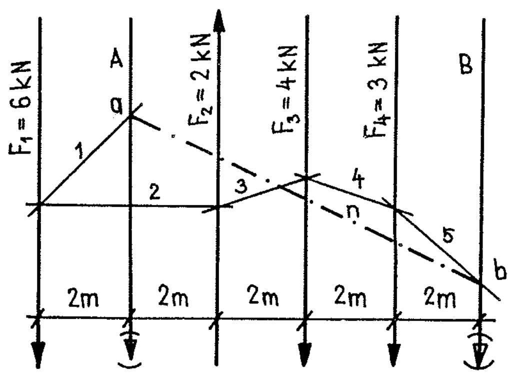
$\alpha_A = 45^\circ$.



Obr. 1.54

Příklad 1.30

Z a d á n í : Soustavu rovnoběžných sil $\{\vec{F}_j\}$ ($j = 1,\ldots, 4$) nahradit dvěma rovnoběžnými silami působícími v daných paprscích A , B (obr. 1.55).



Obr. 1.55

Ř e š e n í : Vzhledem k zadání předpokládáme smysl sil $\vec{A}$, $\vec{B}$ stejný jako sil $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$. Podmínka ekvivalence ve směru kolmém na soustavu rovnoběžných sil je identicky splněna, $0 = 0$. Momentovou podmínku ekvivalence s výhodou napíšeme k bodu b ležícímu na paprsku jedné z neznámých sil.

$$\downarrow \quad F_1 - F_2 + F_3 + F_4 = A + B$$

$$\circlearrowright b \quad 10F_1 - 6F_2 + 4F_3 + 2F_4 = 8A$$

$$6 - 2 + 4 + 3 = A + B$$

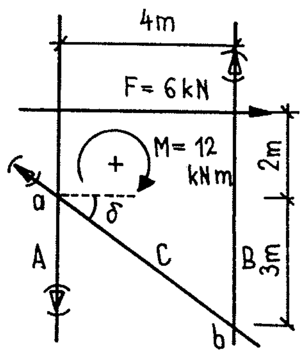
$$10 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 8A$$

$$A = 8{,}75\ \text{kN}\ , \qquad B = 2{,}25\ \text{kN}$$

Příklad 1.31

Z a d á n í : Sílu $F = 6$ kN a moment $M = 12$ kN m uvést do rovnováhy třemi silami působícími v zadaných paprscích A , B , C (obr. 1.56).

Ř e š e n í : Pro početní řešení předpokládáme smysl sil podle obr. 1.56 . Použijeme směrovou podmínku rovnováhy ve vodorovném směru a dvě momentové podmínky k bodům a , b :



Obr. 1.56

$$\rightarrow \quad F - C\cos\delta = 0 \qquad\qquad C = 6 \cdot 5 : 4 = 7{,}5\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft a \quad -2F - M + 4B = 0 \qquad\qquad B = (12 + 12) : 4 = 6{,}0\ \text{kN}$$

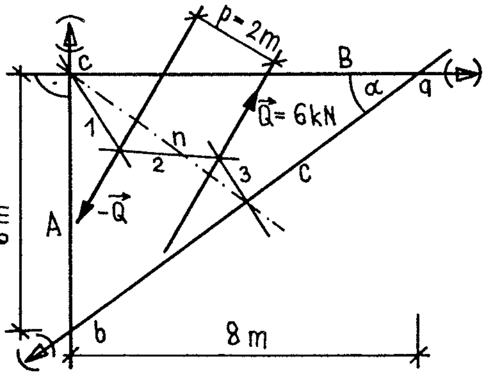
$$\circlearrowleft b \quad -5F - M + 4A = 0 \qquad\qquad A = (30 + 12) : 4 = 10{,}5\ \text{kN}\ .$$

Příklad 1.32

Zadání: Dvojici sil $\vec{Q}$ uvést do rovnováhy se silami působícími v zadaných paprscích A, B, C (obr. 1.57).

Řešení: Výhodně použijeme momentové podmínky rovnováhy k průsečíkům dvou paprsků zadaných směrů :

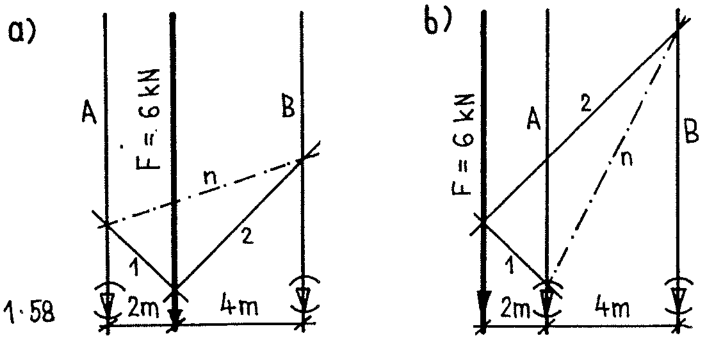
a	$2Q - 8A = 0,$	$A = 12 : 8 = 1{,}50$ kN
b	$2Q - 6B = 0,$	$B = 12 : 6 = 2{,}00$ kN
c	$2Q - 8C \sin\alpha = 0,$	$C = 12 : 8 \cdot 6 : 10 = 2{,}50$ kN



Obr. 1.57

Příklad 1.33

Zadání: Sílu $\vec{F}$ nahradit dvěma silami působícími v paprscích A, B rovnoběžných s vektorem $\vec{F}$, při zadání podle obr. 1.58a a obr. 1.58b .



Obr. 1.58

Řešení: Z podmínek ekvivalence (1.50′) použijeme směrovou výminku rovnováhy ve směru paprsků sil a momentovou podmínku k libovolnému bodu ležícímu na paprsku jedné z neznámých sil, např. B :

Pro zadání a) :

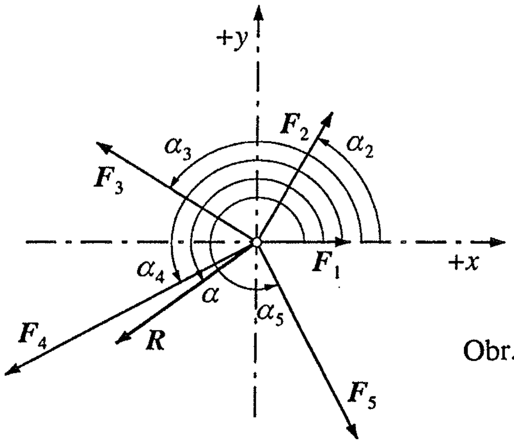
B	$4F = 6A,$	$A = 4 \cdot 6 : 6 = 4{,}0$ kN
$\downarrow$	$F = A + B,$	$B = 6 - 4 = 2{,}0$ kN

Pro zadání b) :

B	$6F = 4A,$	$A = 6 \cdot 6 : 4 = 9{,}0$ kN
$\downarrow$	$F = A + B,$	$B = 6 - 9 = -3{,}0$ kN .

Příklad 2.5

Stanovte početně velikost, směr a smysl výslednice $\boldsymbol{R}$ dané rovinné soustavy pěti sil (obr. 2.6 .) se společným působištěm m pro $\boldsymbol{F}_i$, α_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) zadané v tabulce 2.1.



Obr. 2.6. Rovinný svazek pěti sil

Analytické řešení

uspořádáme pro větší přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 2.1.

Tabulka 2.1. Numerický výpočet složek R_x, R_y výslednice R

i	F_i (kN)	α_i (°)	$\cos \alpha_i$	$\sin \alpha_i$	$F_i \cos \alpha_i$ (kN)	$F_i \sin \alpha_i$ (kN)
1	200	0	1,000	0,000	200,0	0
2	320	60	0,500	0,866	160,0	277,12
3	400	150	–0,866	0,500	–346,4	200,00
4	600	210	–0,866	–0,500	–519,6	-300,00
5	480	300	0,500	–0,866	240,0	–415,68
				$\sum_{i=1}^{5}$	$\boldsymbol{R_x = -266,0}$	$\boldsymbol{R_y = -238,56}$

Výslednice $\boldsymbol{R}$ má velikost

$$R = \sqrt{(-266,0)^2 + (-238,56)^2} = 357,31 \text{ kN}$$

a svírá s kladnou souřadnicovou osou $+x$ úhel α, jehož

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-266}{357,31} = -0,744\,, \qquad \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{-238,56}{357,31} = -0,668\,.$$

Ze znamének pravoúhlých složek $\boldsymbol{R}_x$ a $\boldsymbol{R}_y$ nebo $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ výslednice $\boldsymbol{R}$ lze usoudit, že paprsek výslednice $\boldsymbol{R}$ musí ležet ve třetím kvadrantu; směrový úhel

$$\alpha = 180° + 41°53' = 221°53'\,.$$

Poznámka

Podle obr. 1.7 a vztahu (1.10) je rovnovážná síla $\boldsymbol{F}_e$ soustavy sil rovna záporně vzaté výslednici $\boldsymbol{R}$. U soustavy sil na obr. 2.6 tedy dostáváme F_e = 357,31 kN, $\alpha = \alpha_R - 180° =$ $= 41°53'$.

Příklad 2.6

Břemeno tíhy $G = 700$ N je zavěšeno na dvou prutech (obr. 2.7a). Stanovte osové síly N_1, N_2 v prutech 1, 2.

Řešení

Pro rovnovážnou soustavu sil $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$ se společným působištěm m (obr. 2.7b) lze napsat dvě statické podmínky rovnováhy (2.13)

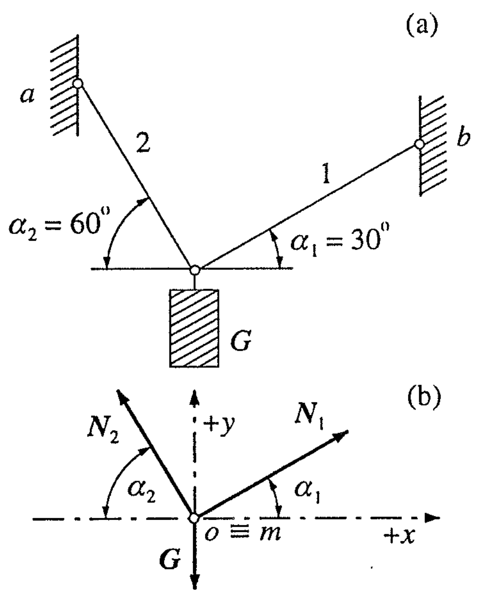
$$\sum F_{ix} = 0 \; : \; N_1 \cos\alpha_1 - N_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0 \; : \; N_1 \sin\alpha_1 + N_2 \sin\alpha_2 - G = 0.$$

Jejich řešením dostáváme velikosti tahových osových sil prutů

$$N_1 = \frac{G \cos\alpha_2}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2} = 100 \text{ N},$$

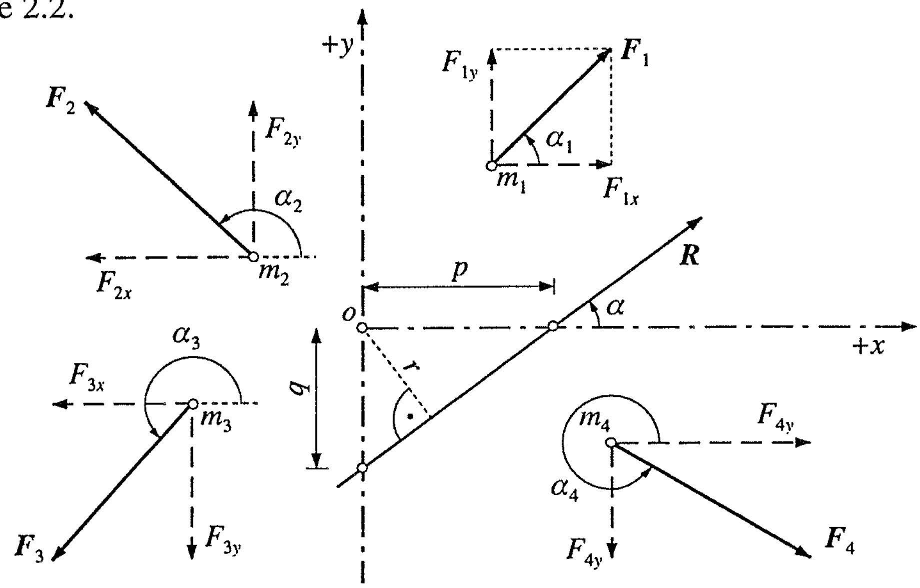
$$N_2 = \frac{G \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2} = 173{,}205 \text{ N}.$$



Obr. 2.7. Břemeno zavěšené na dvou prutech

Příklad 2.12

Stanovte výslednici $\boldsymbol{R}$ obecné rovinné soustavy čtyř sil na obr. 2.18 pro F_i, α_i, $m_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ zadané v tabulce 2.2.



Obr. 2.18.

Rovinná soustava čtyř sil

Řešení

uspořádáme pro přehlednost a snadnou kontrolu výpočtu v tabulce 2.2.

Výslednice $\boldsymbol{R}$ má podle vztahu (2.29) velikost

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1557^2 + 396^2} = 1606{,}23\,\mathrm{N}$$

a směrový úhel α, pro nějž platí výrazy (2.30)

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{1557}{1606{,}23} = 0{,}969; \quad \sin\alpha = \frac{R_y}{R} = \frac{396}{1606{,}23} = 0{,}246 \Rightarrow \alpha = 14°15'.$$

Paprsek výslednice $\boldsymbol{R}$ má rovnici (2.31)

$$396\,\xi - 1557\,\eta = 3416$$

a vytíná na souřadnicových osách x, y úseky p, q určené vztahy (2.32)

Tabulka 2.2. Numerický výpočet R_x, R_y, M_o výslednice R

i	F_i (N)	α_i (°)	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	Souřadnice působišť sil		Průměty sil do souřadnicových os		Momenty složek sil k počátku o	
					x_i (m)	y_i (m)	F_{ix} (N)	F_{iy} (N)	$F_{iy}x_i$ (Nm)	$-F_{ix}y_i$ (Nm)
1	1200	45	0,707	0,707	2	3	849	849	1698	–2547
2	1500	120	–0,500	0,866	–3	2	–750	1299	–3897	1500
3	800	250	–0,342	–0,940	–4	–1	–274	–752	3008	–274
4	2000	330	0,866	–0,500	3	–4	1732	–1000	–3000	6928
						$\sum_{i=1}^{4}$	$R_x = 1557$	$R_y = 396$	–2191	5607
									$M_o = 3416$	

$$p = \frac{M_o}{R_y} = \frac{3416}{396} = 8{,}63\ \mathrm{m}; \qquad q = -\frac{M_o}{R_x} = -\frac{3416}{1557} = -2{,}19\ \mathrm{m}.$$

Rameno r výslednice $\boldsymbol{R}$ vzhledem k počátku souřadnic o

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{3416}{1606{,}23} = 2{,}13\ \mathrm{m}.$$

PŘÍKLAD 2.1

Je dána soustava sil (obr. 2.7) :

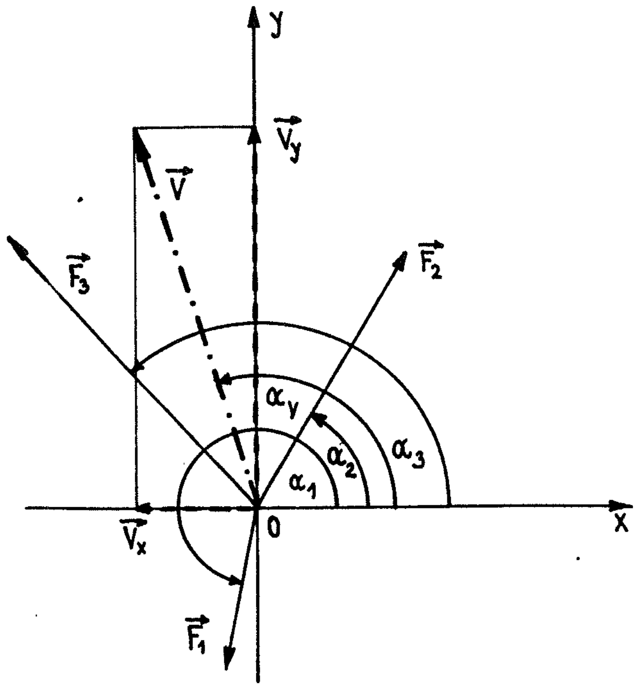
$F_1 = 20$ kN , $F_2 = 40$ kN ,

$F_3 = 50$ kN ,

$\alpha_1 = 260^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$,

$\alpha_3 = 130^\circ$.

Určete velikost výslednice V a směr jejího paprsku α_V v souřadnicovém systému $0, x, y$.



Obr. 2.7

Složky daných sil v souřadnicových osách

$F_{1x} = 20 \cdot \cos 260^\circ$;

$F_{1y} = 20 \cdot \sin 260^\circ$;

$F_{2x} = 40 \cdot \cos 60^\circ$;

$F_{2y} = 40 \cdot \sin 60^\circ$;

$F_{3x} = 50 \cdot \cos 130^\circ$;

$F_{3y} = 50 \cdot \sin 130^\circ$.

Složky výslednice

$$V_x = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos \alpha_i = 20 \cos 260^\circ + 40 \cos 60^\circ + 50 \cos 130^\circ = \underline{-15{,}61 \text{ kN}}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{3} F_i \sin \alpha_i = 20 \sin 260^\circ + 40 \sin 60^\circ + 50 \sin 130^\circ = \underline{53{,}25 \text{ kN}}$$

Velikost výslednice

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{15{,}61^2 + 53{,}25^2} = \underline{55{,}49 \text{ kN}}$$

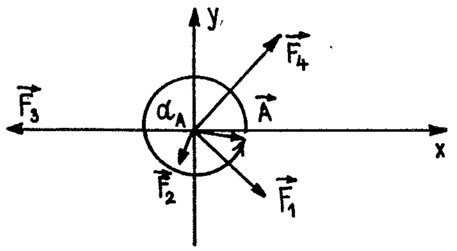
Směr paprsku výslednice

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_V &= -\frac{53{,}25}{15{,}61} \\ \sin \alpha_V &= \frac{53{,}25}{55{,}49} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_V = 180^\circ - 73{,}66^\circ = \underline{106{,}34^\circ}$$

P Ř Í K L A D 2.7

Početně určete velikost a smysl síly A tak, aby uvedla soustavu daných sil $\{F_i\}$ do rovnováhy (obr. 2.17) .

Schema :



i	F_i [kN]	α_i °
1	30	320
2	10	250
3	60	180
4	40	50

Obr. 2.17

Početní řešení :

Podmínky rovnováhy :

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i + \vec{A} = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{4} F_i \cdot \cos\alpha_i + A \cdot \cos\alpha_A = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} F_i \cdot \sin\alpha_i + A \cdot \sin\alpha_A = 0$$

$$30.\cos 320^\circ + 10.\cos 250^\circ + 60.\cos 180^\circ + 40.\cos 50^\circ + A.\cos\alpha_A = 0$$

$$30.\sin 320^\circ + 10.\sin 250^\circ + 60.\sin 180^\circ + 40.\sin 50^\circ + A.\sin\alpha_A = 0$$

$$-14{,}73 + A\cos\alpha_A = 0$$

$$1{,}96 + A\sin\alpha_A = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_A = -\frac{1{,}96}{14{,}73}$$

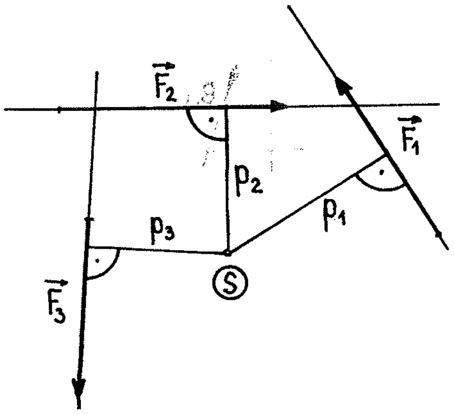
a) $\alpha_A = 180^\circ - 7{,}6^\circ = 172{,}4^\circ \qquad A = -14{,}86$ kN

b) $\alpha_A = 360^\circ - 7{,}6^\circ = 352{,}4^\circ \qquad A = 14{,}86$ kN .

Úloha má jedno řešení. Jedná se zde pouze o dva různé zápisy stejného výsledku.

PŘÍKLAD 2.16

Stanovte velikost statického momentu soustavy sil $\{F_i\}$ (obr. 2.28) k bodu S.



$F_1 = 20$ kN ; $F_2 = 25$ kN ; $F_3 = 30$ kN

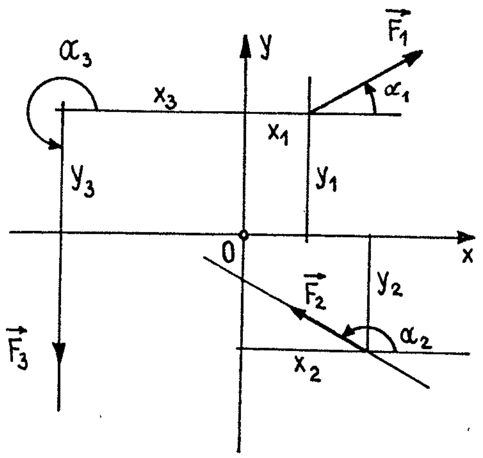
$p_1 = 2$ m ; $p_2 = 1,6$ m ; $p_3 = 1,4$ m

$$M_S = F_1 \cdot p_1 - F_2 \cdot p_2 + F_3 \cdot p_3 =$$
$$= 20.2 - 25.1,6 + 30.1,4 =$$
$$= \underline{+\ 42\ \text{kNm}}$$

Obr. 2.28

PŘÍKLAD 2.17

Vypočtěte velikost statického momentu výslednice soustavy sil $\{F_i\}$ k počátku souřadnicového systému 0 (obr. 2.31) .



Obr. 2.31

i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	α_i°
1	20	1	2	30
2	15	2	-2	150
3	40	-3	2	270

$$M_V = \sum_{i=1}^{3} M_i = \sum_{i=1}^{3} (F_{iy}\, x_i - F_{ix}\, y_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} F_i (x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i) =$$
$$= 20(1.\sin 30^\circ - 2.\cos 30^\circ) +$$
$$+ 15(2.\sin 150^\circ + 2.\cos 150^\circ) +$$
$$+ 40(-3.\sin 270^\circ - 2.\cos 270^\circ) =$$
$$= +84,36\ \text{kNm} .$$

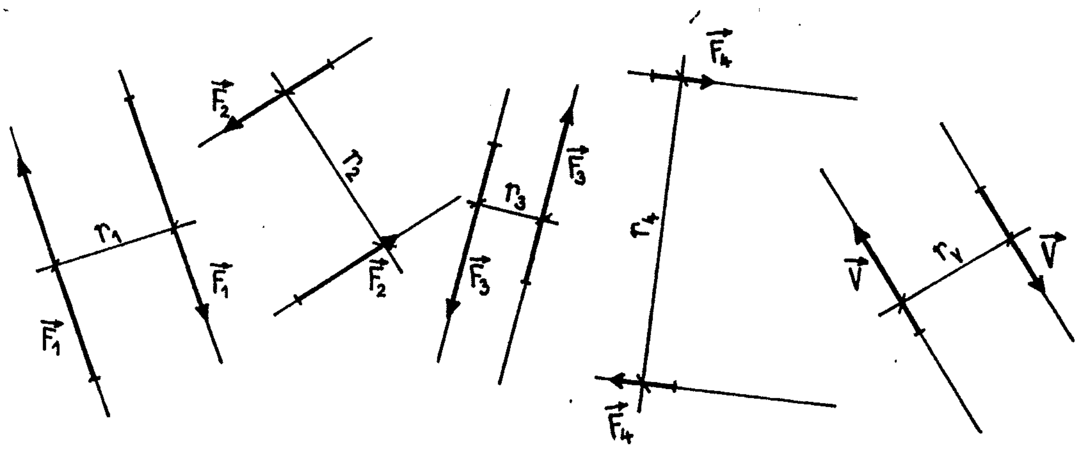
Statický moment výslednice je kladný; výslednice otáčí rovinou x , y kolem bodu 0 v kladném smyslu.

PŘÍKLAD 2.20

Vypočtěte výsledný momentový účinek soustavy silových dvojic :

$F_1 = 40$ kN $\qquad r_1 = 2$ m
$F_2 = 20$ kN $\qquad r_2 = 3$ m
$F_3 = 30$ kN $\qquad r_3 = 1$ m
$F_4 = 10$ kN $\qquad r_4 = 5$ m .

Nahraďte tuto soustavu silových dvojic jedinou dvojicí sil $V = 20$ kN, obr. 2.38 .



Obr. 2. 38

Výsledný moment

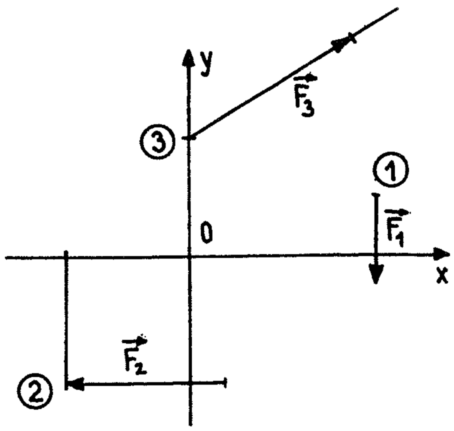
$$M_V = -F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + F_3 \cdot r_3 - F_4 \cdot r_4 = -40.2 + 20.3 + 30.1 - 10.5 = -40 \text{ kNm}$$

Nahrazení silovou dvojicí sil V $\qquad M_V = -V \cdot r_V = -40 \qquad r_V = \dfrac{40}{20} = 2$ m

P Ř Í K L A D 2.28

Početně stanovte výslednici rovinné soustavy sil $\{F_i\}$(obr. 2.48).

i	F_i [kN]	α_i	x_i [m]	y_i [m]
1	15	270°	3	1
2	26	180°	-2	-2
3	30	30°	0	2



Obr. 2.48

Početní řešení :

$$V_x = 15.\cos 270^\circ + 26.\cos 180^\circ + 30.\cos 30^\circ = 0$$

$$V_y = 15.\sin 270^\circ + 26.\sin 180^\circ + 30.\sin 30^\circ = 0$$

$$M_v = 15(3.\sin 270^\circ - 1.\cos 270^\circ) + 26[(-2)\sin 180^\circ - (-2)\cos 180^\circ] + $$
$$+ 30[-2\cos 30^\circ] = -153 \text{ kNm}$$

Výsledný statický účinek je pouze <u>momentový.</u> Danou soustavu lze nahradit silovou dvojicí, jejíž moment je

$$M_v = -153 \text{ kNm}.$$

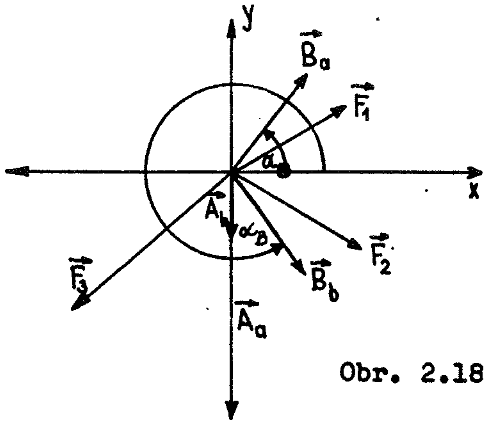
P Ř Í K L A D 2.8

Početně **nahraďte soustavu sil** $\{F_i\}$ **(obr. 2.18) silami** A **,** B **.**

i	F_i [kN]	α_i °
1	20	30°
2	25	330°
3	35	220°

$\alpha_A = 90$, $A = ?$

$B = 20$ kN, $\alpha_B = ?$



Obr. 2.18

Podmínky ekvivalence :

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = \vec{A} + \vec{B} \qquad \sum_{i=1}^{3} F_i \cos\alpha_i = A\cos\alpha_A + B\cos\alpha_B$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_i \sin\alpha_i = A\sin\alpha_A + B\sin\alpha_B$$

$$20.\cos 30^\circ + 25.\cos 330^\circ + 35.\cos 220^\circ = A\cos 90^\circ + 20.\cos\alpha_B$$

$$20.\sin 30^\circ + 25.\sin 330^\circ + 35.\sin 220^\circ = A\sin 90^\circ + 20.\sin\alpha_B$$

$$12{,}16 = 20 \,.\, \cos\alpha_B \qquad \Longrightarrow \qquad B \geqq 12{,}16 \text{ kN} ;$$

$$-25 = A + 20 \,.\, \sin\alpha_B$$

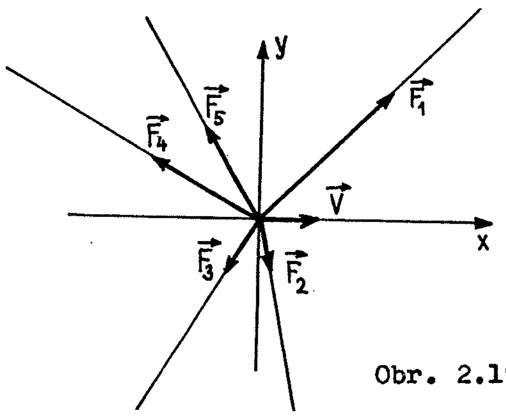
Úloha má dvě řešení : a) $\alpha_B = 52{,}55^\circ$ $A = -40{,}88$ kN ;

b) $\alpha_B = 307{,}44^\circ$ $A = -9{,}12$ kN .

P Ř Í K L A D 2.9

Vypočtěte velikost síly F_5 , aby paprsek výslednice soustavy sil byl v ose x , obr. 2.19 .

i	F_i [kN]	α_i °
1	60	45
2	15	280
3	20	240
4	40	150
5	?	120



Obr. 2.19

Řešení : $\vec{V} = \sum_{i=1}^{5} \vec{F}_i$

$$V\cos\alpha_V = \sum_{i=1}^{5} F_i \cos\alpha_i$$

$$V\sin\alpha_V = \sum_{i=1}^{5} F_i \sin\alpha_i$$

$$V\cos 0^\circ = 60.\cos 45^\circ + 15.\cos 280^\circ + 20.\cos 240^\circ + 40.\cos 150^\circ + F_5.\cos 120^\circ$$

$$V\sin 0^\circ = 60.\sin 45^\circ + 15.\sin 280^\circ + 20.\sin 240^\circ + 40.\sin 150^\circ + F_5.\sin 120^\circ$$

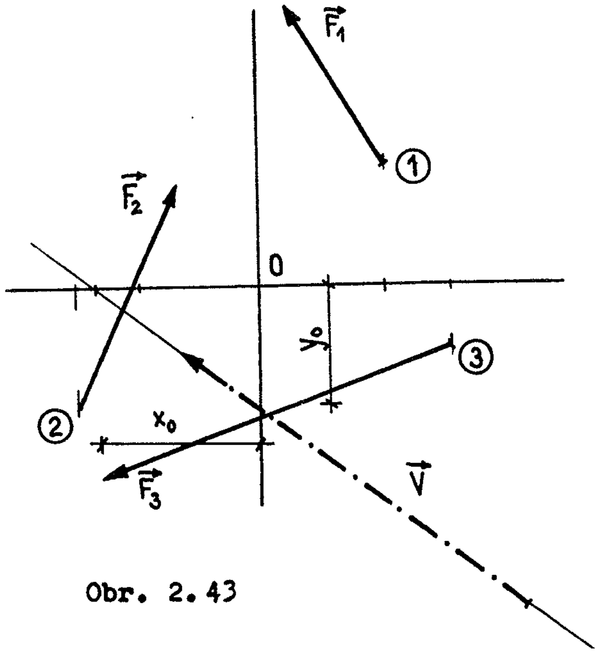
$$V = 0{,}39 - 0{,}5F_5 \qquad V = 17{,}82 \text{ kN} ;$$

$$0 = 30{,}33 + 0{,}87F_5 \qquad F_5 = -34{,}86 \text{ kN} .$$

P Ř Í K L A D 2.24

Vypočtěte velikost, polohu a smysl výslednice soustavy sil $\{F_i\}$, obr. 2.43.

i	F_i [kN]	α_i °	x_i [m]	y_i [m]
1	30	120	2	2
2	40	65	-3	-2
3	60	200	3	-1



Obr. 2.43

Složky daných sil

$F_{1x} = 30.\cos 120^\circ \quad F_{1y} = 30.\sin 120^\circ$

$F_{2x} = 40.\cos\ 65^\circ \quad F_{2y} = 40.\sin\ 65^\circ$

$F_{3x} = 60.\cos 200^\circ \quad F_{3y} = 60.\sin 200^\circ$

Statické momenty daných sil k bodu 0

$M_1 = F_{1y} \cdot 2 - F_{1x} \cdot 2$

$M_2 = F_{2y} \cdot (-3) - F_{2x} (-2)$

$M_3 = F_{3y} \cdot 3 - F_{3x} (-1)$

Složky výslednice

$$V_x = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos \alpha_i = 30.\cos 120^\circ + 40.\cos 65^\circ + 60.\cos 200^\circ = -15 + 16{,}9 - 56{,}38 = -54{,}48 \text{ kN}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{3} F_i \sin \alpha_i = 30.\sin 120^\circ + 40.\sin 65^\circ + 60.\sin 200^\circ = 25{,}98 + 36{,}25 - 20{,}52 = +41{,}71 \text{ kN}$$

Statický moment výslednice k bodu 0

$$M_V = \sum (F_{iy} \cdot x_i - F_{ix} \cdot y_i) = 25{,}98 \cdot 2 - (-15) \cdot 2 + 36{,}25(-3) - 16{,}9(-2) + (-20{,}52) \cdot 3 - (-56{,}38) \cdot (-1) = -110{,}93 \text{ kNm}$$

Velikost výslednice

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{54{,}48^2 + 41{,}71^2} = 68{,}61 \text{ kN}$$

Smysl výslednice

$$\operatorname{tg} \alpha_V = \frac{V_y}{V_x} = \frac{41{,}71}{-54{,}48} \qquad \alpha_V = 180^\circ - 37{,}44^\circ = 142{,}56^\circ$$

$$\sin \alpha_V = \frac{V_y}{V} = \frac{41{,}71}{68{,}61} > 0$$

Poloha paprsku výslednice $\quad V_y \cdot x - V_x \cdot y = M_V$

$41{,}71 \cdot x + 54{,}48 \cdot y = -110{,}93$ kNm – rovnice přímky

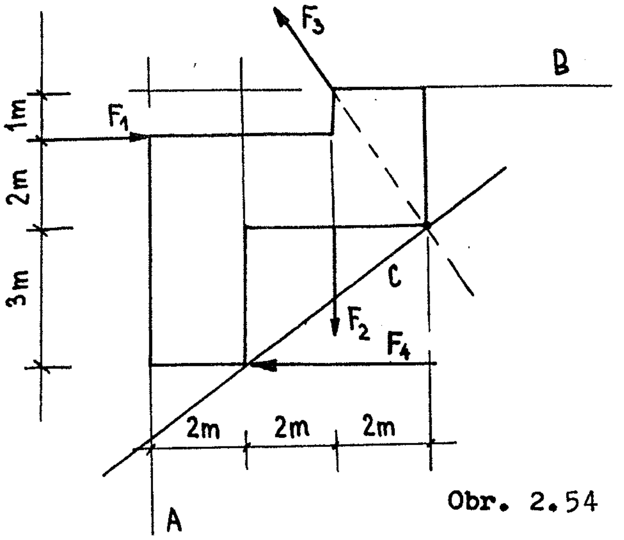
pro $x = 0$; $\quad y_0 = -2{,}04$ m

pro $y = 0$; $\quad x_0 = -2{,}66$ m

Délky x_0, y_0 jsou úseky, které vytíná paprsek výslednice na osách x a y.

PŘÍKLAD 2.31

Určete početně síly A, B, C, aby uváděly do rovnováhy soustavu daných sil $\{F_i\}$, obr. 2.54. Paprsky neznámých sil jsou známé.



Obr. 2.54

$F_1 = 15$ kN

$F_2 = 60$ kN

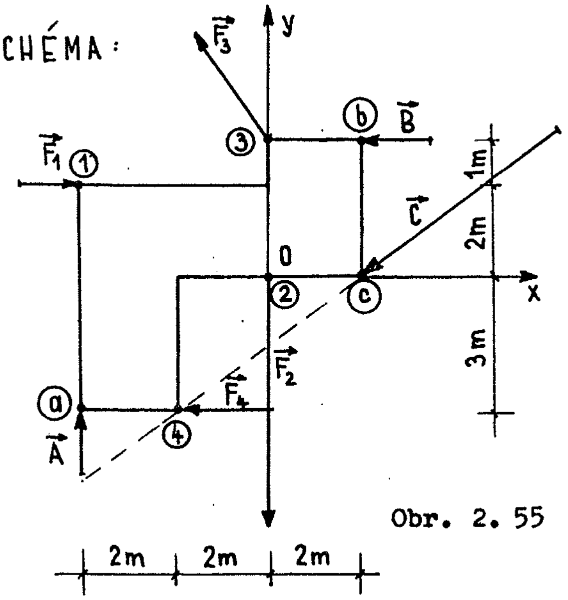
$F_3 = 30$ kN

$F_4 = 20$ kN.

Vektory sil necháme působit v označených bodech (obr. 2.55). U neznámých sil předpokládáme kladný smysl. Volíme souřadný systém $0, x, y$, vypočítáme souřadnice působišť sil a úhly α.

	F_i [kN]	α_i °	x_i [m]	y_i [m]
1	15	0	-4	2
2	60	270	0	0
3	30	123,7	0	3
4	20	180	-2	-3
A		90	-4	-3
B		180	+2	3
C		216,9	2	0

SCHÉMA:



Obr. 2. 55

Podmínky rovnováhy: $\sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i + \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{M}_{F_i} + \vec{M}_A + \vec{M}_B + \vec{M}_C = 0$$

$$15.\cos 0^\circ + 60.\cos 270^\circ + 30.\cos 123{,}7^\circ + 20.\cos 180^\circ + A\cos 90^\circ + B\cos 180^\circ + C\cos 216{,}9^\circ = 0$$

$$15.\sin 0^\circ + 60.\sin 270^\circ + 30.\sin 123{,}7^\circ + 20.\sin 180^\circ + A\sin 90^\circ + B\sin 180^\circ + C\sin 216{,}9^\circ = 0$$

$$15[(-4)\sin 0^\circ - 2.\cos 0^\circ] + 60.0 + 30[-3.\cos 123{,}7^\circ] + 20[(-2)\sin 180^\circ - (-3)\cos 180^\circ] + A[(-4)\sin 90^\circ - (-3)\cos 90^\circ] + B[2\sin 180^\circ - 3.\cos 180^\circ] + C[2\sin 216{,}9^\circ] = 0$$

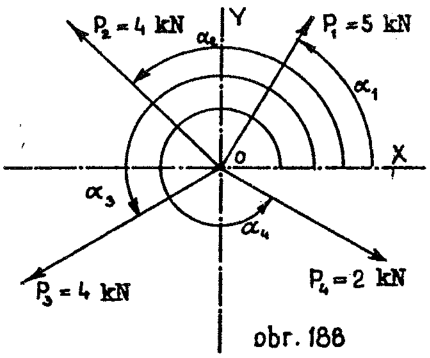
$$-21{,}65 + B - 0{,}8\,C = 0$$

$$-35 + A - 0{,}6\,C = 0$$

$$-40 - 4A - 3B - 1{,}2\,C = 0$$

$A = 10{,}5$ kN ; $B = 11$ kN ; $C = -40{,}82$ kN .

188



obr. 188

Určete výslednici R čtyř sil daných podle obr.188

$P_1 = 5$ kN, $\alpha_1 = 60°$
$P_2 = 4$ kN, $\alpha_2 = 135°$
$P_3 = 4$ kN, $\alpha_3 = 210°$
$P_4 = 2$ kN, $\alpha_4 = 330°$
$R = ?$ $\alpha_R = ?$

X: $\underline{R_x} = P_1 \cos 60° - P_2 \cos 45° - S_3 \cos 30° + S_4 \cos 30°$

Y: $\underline{R_y} = P_1 \sin 60° + P_2 \sin 45° - S_3 \sin 30° - S_4 \sin 30°$

$R_x = -2{,}060$ kN, $R_y = +4{,}158$ kN

$R = \sqrt{2{,}06^2 + 4{,}158^2} = 4{,}65$ kN

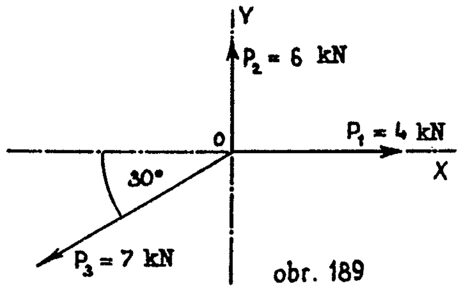
Výslednice R prochází společným působištěm.

$$\sin \alpha_R = \frac{R_y}{R} = \frac{4{,}158}{4{,}65} = 0{,}896$$

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R} = \frac{-2{,}06}{4{,}65} = -0{,}449$$

$$\alpha_R = 180° - 63°40' = 116°20'$$

189



obr. 189

Určete rovnovážnou sílu R tří sil daných podle obr.189

$P_1 = 4$ kN, $\alpha_1 = 0°$
$P_2 = 6$ kN, $\alpha_2 = 90°$
$P_3 = 7$ kN, $\alpha_3 = 210°$
$R = ?$ $\alpha_R = ?$

X: $P_1 - P_3 \cos 30° + \underline{R_x} = 0$

Y: $P_2 - P_3 \sin 30° + \underline{R_y} = 0$

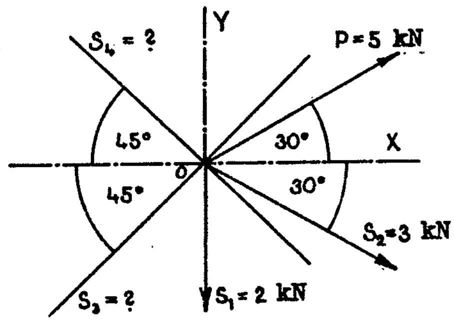
$R_x = 2{,}05$ kN, $R_y = -2{,}5$ kN

$\underline{R} = \sqrt{2{,}05^2 + 2{,}5^2} = \underline{3{,}25 \text{ kN}}$

$\cos \alpha_R = 0{,}635$, $\sin \alpha_R = -0{,}775$

$\underline{\alpha_R} = 360° - 51° = \underline{309°}$

190



obr. 190

Danou sílu P nahraďte čtyřmi silami S_1, S_2, S_3, S_4, je-li dáno:

$P = 5$ kN, $\alpha = 30°$
$S_1 = 2$ kN, $\alpha_1 = 270°$
$S_2 = 3$ kN, $\alpha_2 = 330°$
$S_3 = ?$ Poloha paprsků,
$S_4 = ?$ v nichž síly S_3
a S_4 působí, je vyznačena v obr.190.

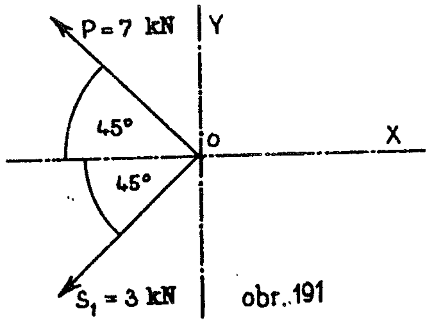
Při sestavování statických výminek je předpokládáno, že síla S_3 působí do prvního kvadrantu a síla S_4 do druhého kvadrantu.

X: $P \cos 30° = 0 + S_2 \cos 30° + \underline{S_3} \cos 45° - \underline{S_4} \cos 45°$

Y: $P \sin 30° = -S_1 - S_2 \sin 30° + \underline{S_3} \sin 45° + \underline{S_4} \sin 45°$

$\underline{S_3 = 5{,}46 \text{ kN}}$, $\underline{S_4 = 3{,}02 \text{ kN}}$

(191)



obr. 191

Danou sílu P zrušte třemi silami S_1, S_2, S_3, je-li dáno:

$P = 7$ kN, $\quad \alpha = 135°$
$S_1 = 3$ kN, $\quad \alpha_1 = 225°$
$S_2 = ?$ $\quad$ Síly S_2, S_3 působí v souřadných osách X, Y.
$S_3 = ?$

Předpokládejme, že síly S_2, S_3 mají smysl kladných souřadných os.

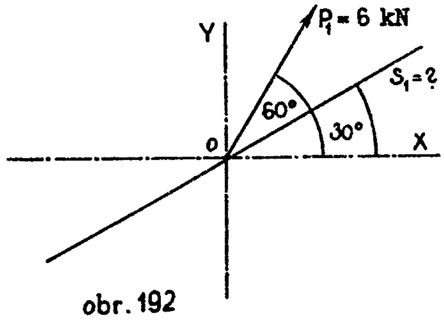
X: $-P \cos 45° - S_1 \cos 45° + \underline{S_2} = 0$

Y: $P \sin 45° - S_1 \sin 45° + \underline{S_3} = 0$

$\underline{S_2 = 7{,}07 \text{ kN}}$, $\quad \underline{S_3 = -2{,}83 \text{ kN}}$

---

(192)



obr. 192

Danou sílu P zrušte dvěma silami S_1, S_2, je-li dáno:

$P = 6$ kN, $\quad \alpha = 60°$
$S_1 = ?$ $\quad \alpha_1 = 30°$
$S_2 = 3{,}5$ kN, $\quad \alpha_2 = ?$

Předpokládejme, že síla S_1 i síla S_2 působí do prvního kvadrantu.

X: $P \cos 60° + S_1 \cos 30° + S_2 \cos \alpha_2 = 0$

Y: $P \sin 60° + S_1 \sin 30° + S_2 \sin \alpha_2 = 0$

$-3{,}5 \cos \underline{\alpha_2} = 3 + 0{,}866\, \underline{S_1}$

$-3{,}5 \sin \underline{\alpha_2} = 5{,}2 + 0{,}5\, \underline{S_1}$

Umocněním obou rovnic dvěma a sečtením obdržíme kvadratickou rovnici

$$12{,}25 = 36 + 10{,}4\, S_1 + S_1^2$$

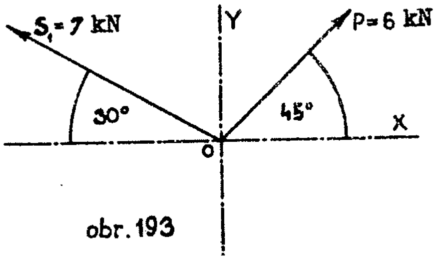
$$S_1 = \left\langle \begin{matrix} -7 \text{ kN} \\ -3{,}4 \text{ kN} \end{matrix} \right. \quad \sin \alpha_2 = \left\langle \begin{matrix} -0{,}486 \\ -1{,}0 \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} {}^1\alpha_2 = 331° \\ {}^2\alpha_2 = 270° \end{matrix}$$

---

(193)

Danou sílu P zrušte třemi silami S_1, S_2, S_3, je-li dáno:

$P = 6$ kN, $\quad \alpha = 45°$
$S_1 = 7$ kN, $\quad \alpha_1 = 150°$
$S_2 = 5$ kN, $\quad \alpha_2 = ?$
$S_3 = 4$ kN, $\quad \alpha_3 = ?$



obr. 193

X: $P \cos 45° - S_1 \cos 30° + S_2 \cos \underline{\alpha_2} + S_3 \cos \underline{\alpha_3} = 0$

Y: $P \sin 45° + S_1 \sin 30° + S_2 \sin \underline{\alpha_2} + S_3 \sin \underline{\alpha_3} = 0$

$-1{,}81 + 5 \cos \alpha_2 = -4 \cos \alpha_3$

$7{,}75 + 5 \sin \alpha_2 = -4 \sin \alpha_3$

Umocněním obou rovnic dvěma a sečtením obdržíme rovnici

$$4{,}28 \sin \alpha_2 + 4 = \cos \alpha_2$$

Umocněním dvěma a dosazením $\cos^2 \alpha_2 = 1 - \sin^2 \alpha_2$ obdržíme kvadratickou rovnici $1{,}285 \sin^2 \alpha_2 + 2{,}28 \sin \alpha_2 + 1 = 0$

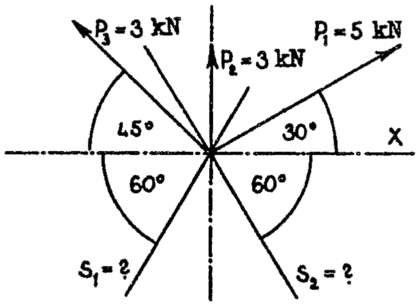
$$\sin \alpha_2 = \left\langle \begin{matrix} -0{,}983, \\ -0{,}792, \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} {}^1\alpha_2 = 260° \\ {}^2\alpha_2 = 308° \end{matrix} \qquad \sin \alpha_3 = \left\langle \begin{matrix} -0{,}707, \\ -0{,}947, \end{matrix} \right. \quad \begin{matrix} {}^1\alpha_3 = 315° \\ {}^2\alpha_3 = 251° \end{matrix}$$

(194) Danou soustavu tří sil P_1, P_2, P_3 nahraďte dvěma silami S_1, S_2, je-li dáno:

$P_1 = 5$ kN, $\alpha_1 = 30°$
$P_2 = 3$ kN, $\alpha_2 = 90°$
$P_3 = 3$ kN, $\alpha_3 = 135°$

$S_1 = ?$
$S_2 = ?$

Směry obou sil S_1, S_2 jsou vyznačeny v obrázku 194.



obr. 194

Předpokládejme, že síla S_1 působí do prvního kvadrantu a síla S_2 do druhého kvadrantu.

X: $P_1 \cos 30° + 0 - P_3 \cos 45° = \underline{S_1} \cos 60° - \underline{S_2} \cos 60°$

Y: $P_1 \sin 30° + P_2 + P_3 \sin 45° = \underline{S_1} \sin 60° + \underline{S_2} \sin 60°$

$2{,}21 = 0{,}5\ \underline{S_1} - 0{,}5\ \underline{S_2}$

$7{,}62 = 0{,}866\ \underline{S_1} + 0{,}866\ \underline{S_2}$

$\underline{S_1 = 6{,}61 \text{ kN}}$, $\underline{S_2 = 2{,}19 \text{ kN}}$

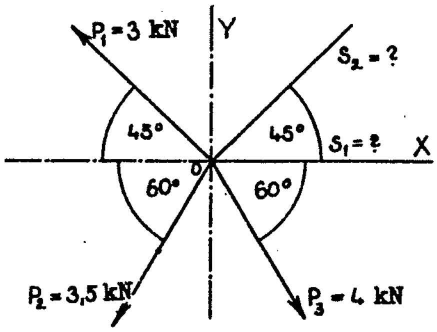
---

(195) Danou soustavu tří sil P_1, P_2, P_3 zrušte dvěma silami S_1, S_2, je-li dáno:

$P_1 = 3$ kN, $\alpha_1 = 135°$
$P_2 = 3{,}5$ kN, $\alpha_2 = 240°$
$P_3 = 4$ kN, $\alpha_3 = 300°$

$S_1 = ?$
$S_2 = ?$

Směry obou sil S_1, S_2 jsou vyznačeny v obrázku 195.



obr. 195

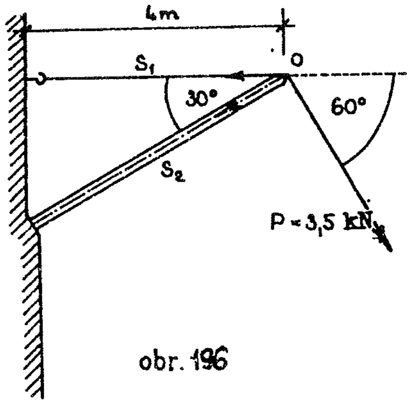
Předpokládejme, že síla S_1 působí v kladném smyslu osy X a síla S_2 do prvního kvadrantu.

X: $-P_1 \cos 45° - P_2 \cos 60° + P_3 \cos 60° + \underline{S_1} + \underline{S_2} \cos 45° = 0$

Y: $P_1 \sin 45° - P_2 \sin 60° - P_3 \sin 60° + 0 + \underline{S_2} \sin 45° = 0$

$\underline{S_2 = +\ 6{,}18 \text{ kN}}$, $\underline{S_1 = -\ 2{,}5 \text{ kN}}$

(196) Konstrukce vyznačená v obr.196 je zatížena silou P = 3,5 kN podle obrázku. Určete síly S_1 a S_2 působící v konstrukci.



obr. 196

Postup řešení:

Síly P , S_1, S_2 tvoří rovinnou rovnovážnou soustavu sil o společném působišti v bodě <u>o</u>. Protože síly S_1, S_2 ruší účinek síly P, jedná se o úlohu 2b (185). Zvolíme smysl neznámých sil podle obr.196. Šipky směřující od společného působiště znamenají, že předpokládáme v obou konstrukčních prvcích tahy. Šipky zakreslujeme vždy vzhledem ke společnému působišti sil. Záporné znaménko vypočtené síly bude znamenat nesprávný předpoklad, tedy tlak.

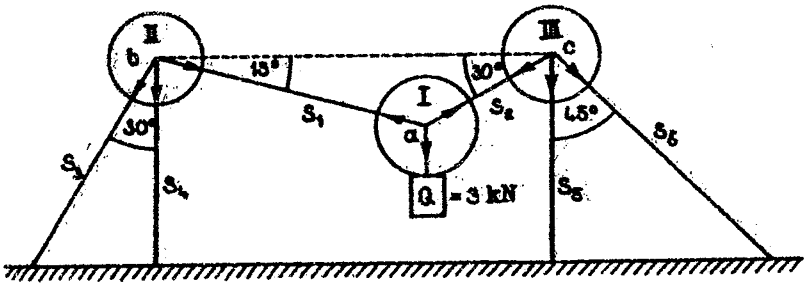
X: $-\underline{S_1} - \underline{S_2}\cos 30^\circ + P\cos 60^\circ = 0$

Y: $-\underline{S_2}\sin 30^\circ - P\sin 60^\circ = 0$

$S_1 = +7{,}0$ kN (tah), $S_2 = -6{,}05$ kN (tlak)

---

(197) Určete síly S_1 – S_6, působící v konstrukci vyznačené v obr.197, zatížené břemenem Q = 3 kN.



obr. 197

Postup řešení:

Uvedená konstrukce představuje tři rovinné rovnovážné silové soustavy I, II, III, působící v bodech a, b, c. Při řešení musíme vycházet od silové soustavy I, kde jsou neznámé velikosti dvou sil S_1, S_2, zatímco ve zbývajících dvou soustavách jsou neznámé velikosti tří sil.

Předpokládáme, že neznámé síly jsou tahy a podle toho vyznačíme v obrázku šipky směřující od společných působišť. Všimněte si, že například síla S_1 má v soustavě I opačný smysl než v soustavě II, i když v obou soustavách představuje tah. Podobně síla S_2 . Je to v důsledku zákona akce a reakce (12). Řešením soustavy I získáme velikosti sil S_1, S_2 a můžeme přejít k řešení soustav II, III, v nichž pak jsou neznámými opět velikosti pouze dvou sil. Záporné znaménko výsledku znamená nesprávný předpoklad, tedy tlak, proto síly S_4, S_5 ve stožárech vyjdou se zápornými znaménky. Ve všech třech případech se jedná o řešení úlohy 2b (185).

Řešení soustavy I

X: $-\underline{S_1}\cos 15^\circ + \underline{S_2}\cos 30^\circ = 0$

Y: $\underline{S_1}\sin 15^\circ + \underline{S_2}\sin 30^\circ - Q = 0$

$S_1 = 3{,}66$ kN, $S_2 = 4{,}1$ kN

Řešení soustavy II

X: $S_1\cos 15^\circ - \underline{S_3}\cos 60^\circ = 0$

Y: $-S_1\sin 15^\circ - \underline{S_3}\sin 60^\circ - \underline{S_4} = 0$

$S_3 = 7{,}07$ kN, $S_4 = -7{,}07$ kN

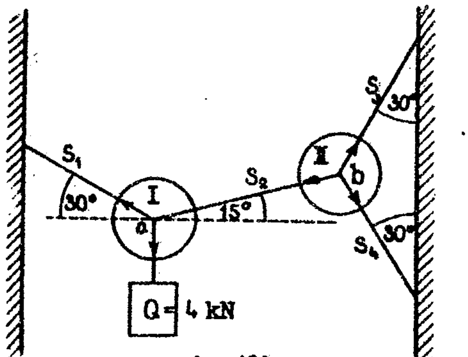
Řešení soustavy III

X: $-S_2\cos 30^\circ + \underline{S_6}\cos 45^\circ = 0$

Y: $-S_2\sin 30^\circ - \underline{S_6}\sin 45^\circ - \underline{S_5} = 0$

$S_5 = -5{,}6$ kN, $S_6 = 5{,}02$ kN

(198)



obr. 198

Určete síly S_1 - S_5, působící v konstrukci vyznačené v obr.198, zatížené břemenem Q = 4 kN.

Uvedená konstrukce představuje dvě rovinné rovnovážné silové soustavy, působící v bodech a, b. Postup řešení je obdobný jako u předcházejícího příkladu 197. U obou silových soustav jde o řešení úlohy 2b (185).

Řešení soustavy I

X: $-\underline{S_1}\cos 30^\circ + \underline{S_2}\cos 15^\circ = 0$

Y: $\underline{S_1}\sin 30^\circ + \underline{S_2}\sin 15^\circ - Q = 0$

$\underline{S_1 = 5{,}42\ \text{kN}}$, $\underline{S_2 = 4{,}88\ \text{kN}}$

Řešení soustavy II

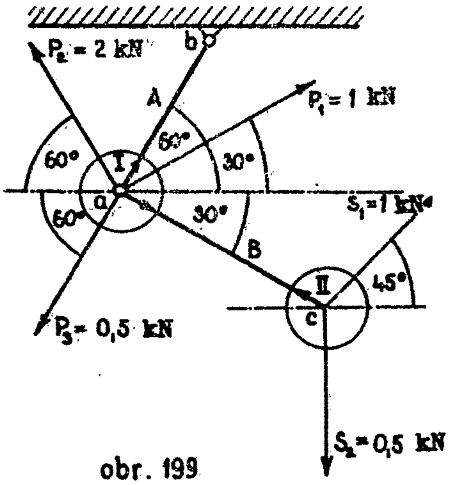
X: $-S_2\cos 15^\circ + \underline{S_3}\cos 60^\circ + \underline{S_4}\cos 60^\circ = 0$

Y: $-S_2\sin 15^\circ + \underline{S_3}\sin 60^\circ - \underline{S_4}\sin 60^\circ = 0$

$\underline{S_3 = 5{,}45\ \text{kN}}$ $\underline{S_4 = 3{,}97\ \text{kN}}$

---

(199)



obr. 199

Na dvě tyče, spojené kloubem a a připojené ke stropu kloubem b, působí dvě silové soustavy podle obr. 199. V bodě a působí síly P_1, P_2, P_3 a v bodě c síly S_1, S_2. Velikosti, směry a smysly daných sil jsou vyznačeny v obrázku.

Určete sílu L, působící v bodě c a udržující celou konstrukci v rovnováze. Zároveň určete síly A, B, působící v obou tyčích.

Postup řešení:
Uvedená konstrukce představuje dvě rovinné rovnovážné silové soustavy, působící v bodech a a c. Při řešení musíme vycházet ze soustavy působící v bodě a, kde jsou neznámými velikosti dvou sil A, B. Pak přejdeme k soustavě působící v bodě c, kde budou neznámými, velikost síly L a úhel α_2, určující její směr a smysl, nebo lépe dvě její složky L_x, L_y. Předpokládáme, že neznámé síly jsou tahy a podle toho vyznačíme v obrázku smysl a sestavujeme příslušné statické výminky rovnováhy, z nichž vypočteme neznámé síly. V prvém případě jde o úlohu 3b, ve druhém o úlohu 1b.

Řešení soustavy I

X: $P_1\cos 30^\circ - P_2\cos 60^\circ - P_3\cos 60^\circ + \underline{A}\cos 60^\circ + \underline{B}\cos 30^\circ = 0$

Y: $P_1\sin 30^\circ + P_2\sin 60^\circ - P_3\sin 60^\circ + \underline{A}\sin 60^\circ - \underline{B}\sin 30^\circ = 0$

$\underline{A = -1{,}372\ \text{kN}}$, $\underline{B = 1{,}232\ \text{kN}}$

Řešení soustavy II

X: $-B\cos 30^\circ + S_1\cos 45^\circ + \underline{L_x} = 0$

Y: $B\sin 30^\circ + S_1\sin 45^\circ - S_2 + \underline{L_y} = 0$

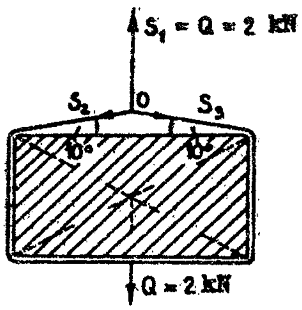
$L_x = 0{,}363\ \text{kN}$, $L_y = -0{,}823\ \text{kN}$

$\underline{L} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \underline{0{,}897\ \text{Mp}}$

$\cos\alpha_L = 0{,}897$, $\sin\alpha_L = -0{,}917$

$\underline{\alpha_L = 293^\circ}$

(200) **Určete síly S_1, S_2, S_3, působící ve třech částech závěsného lana, nesoucího břemeno Q = 2 kN podle obr.200.**



obr.200

Úlohu řešíme jako rovinnou rovnovážnou silovou soustavu tří sil o společném působišti v bodě o. Sílu S_1 = = Q = 2 kN máme zrušit silami S_2, S_3. Jedná se tedy o úlohu 2b.

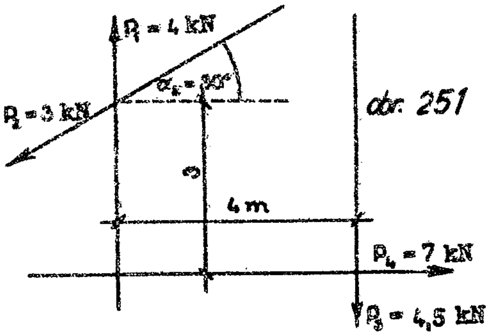
$$X: \quad -\underline{S_2}\cos 10^\circ + \underline{S_3}\cos 10^\circ = 0$$

$$Y: \quad -\underline{S_2}\sin 10^\circ - \underline{S_3}\sin 10^\circ + S_1 = 0$$

$$\underline{S_2 = S_3 = 5{,}76 \text{ kN}}$$

Povšimněte si, že čím je břemeno těsněji přivázáno, tím jsou síly S_2, S_3 větší (což je dobře patrné ze složkového obrazce) a tím se i zvětšuje nebezpečí přetržení lana.

(251)



obr. 251

Určete početně výslednici R dané soustavy čtyř sil P_1, P_2, P_3, P_4, zadaných podle vedlejšího obrázku 251.

Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P_1 a P_4.

X: $R_x = -P_2 \cos 30° + P_4 = -3 . 0{,}866 + 7 = 4{,}4$ kN

Y: $R_y = P_1 - P_2 \sin 30° - P_3 = 4 - 3 . 0{,}5 - 4{,}5 = -2$ kN

M: $M_o = P_2 \cos 30° . 3 - P_3 . 4 = 3 . 0{,}866 . 3 - 4{,}5 . 4 = -10{,}2$ kNm

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4{,}4^2 + 2^2} = \sqrt{23{,}35} = \underline{4{,}82 \text{ kN}}$$

$$\sin\alpha_R = \frac{R_y}{R} = \frac{-2}{4{,}82} = -0{,}415, \qquad \cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} = \frac{4{,}4}{4{,}82} = 0{,}913$$

$$\alpha_R = 360° - 24°30' = 335°30'$$

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{-10{,}2}{4{,}82} = \underline{-2{,}12 \text{ m}},$$ výslednice R otáčí doprava kolem bodu o.

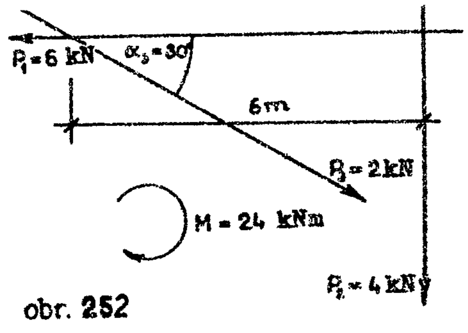
$$p = \frac{M_o}{R_y} = \frac{-10{,}2}{-2} = \underline{+5{,}1 \text{ m}}$$

$$q = -\frac{M_o}{R_x} = -\frac{-10{,}2}{4{,}4} = \underline{+2{,}32 \text{ m}}$$

---

(252)

Určete početně výslednici daných tří sil P_1, P_2, P_3 a momentu M, zadaných podle obr.252.



obr. 252

Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P_1 a P_2.

X: $R_x = -P_1 + P_3 \cos 30° = -6 + 2 . 0{,}866 = -4{,}268$ kN

Y: $R_y = -P_2 - P_3 \sin 30° = -4 - 2 . 0{,}5 = -5{,}0$ kN

M: $M_o = P_3 \sin 30° . 6 - M = 2 . 0{,}5 . 6 - 24 = -18{,}0$ kNm

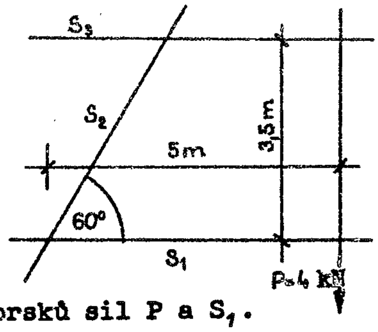
$\underline{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \underline{6{,}56 \text{ kN}}$, $\sin\alpha_R = \frac{R_y}{R} = -0{,}762$, $\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} = -0{,}652$

$\alpha_R = 180° + 49°30' = 229°30'$, $\underline{r} = \frac{M_o}{R} = \underline{-2{,}74 \text{ m}}$, výslednice R otáčí doprava kolem bodu o.

$\underline{p} = \frac{M_o}{R_y} = \underline{+3{,}6 \text{ m}}$, $\underline{q} = -\frac{M_o}{R_x} = \underline{-4{,}22 \text{ m}}$

256 Danou sílu P = 4 kN nahraďte třemi silami S_1, S_2, S_3, působícími v daných paprscích podle obr.256. Úlohu řešte početně

obr.256



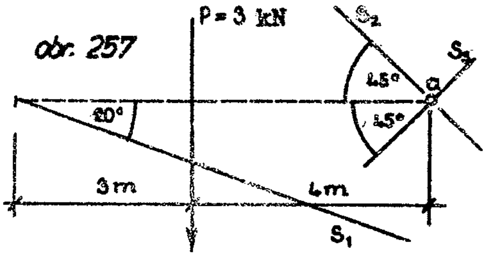
Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P a S_1. Smysl neznámých sil zvolen podle výsledku grafického řešení.

X:	$P_x = 0 = -\underline{S_1} - \underline{S_2}\cos 60° + \underline{S_3}$	$\underline{S_1 = 3{,}41\ \text{kN}}$
Y:	$-P = -\underline{S_2}\sin 60°$	$\underline{S_2 = 4{,}62\ \text{kN}}$
M:	$0 = +\underline{S_2}\sin 60°.5 - \underline{S_3}.3{,}5$	$\underline{S_3 = 5{,}72\ \text{kN}}$

---

257 Danou sílu P = 3 kN zrušte třemi silami S_1, S_2, S_3, působícími v daných paprscích podle obr.257. Úlohu řešte početně

obr. 257

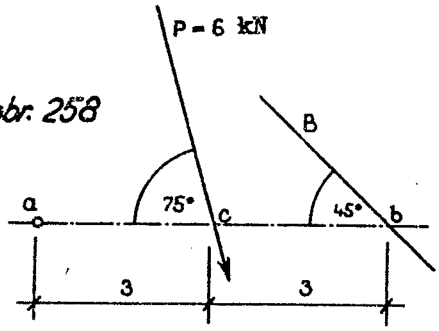


Za momentový střed zvolen bod a. Smysl neznámých sil zvolen podle výsledku grafického řešení

X:	$P_x - \underline{S_1}\cos 20° + \underline{S_2}\cos 45° + \underline{S_3}\cos 45° = 0,$	$\underline{S_1 = 5{,}02\ \text{kN}}$
Y:	$-P_y + \underline{S_1}\sin 20° - \underline{S_2}\sin 45° + \underline{S_3}\sin 45° = 0,$	$\underline{S_3 = 4{,}24\ \text{kN}}$
M:	$P.4 - \underline{S_1}\sin 20°.7 = 0,$	$\underline{S_2 = 2{,}42\ \text{kN}}$

258

obr. 258



Danou sílu P = 6 Mp zrušte dvěma silami A, B, je-li dán paprsek, v němž působí síla B a bod a, kterým má procházet paprsek síly A podle obr.258. Úlohu řešte početně

Poznámka:

Při analytickém řešení postupujeme nejlépe tak, že si myslíme sílu A v bodě a rozloženu do dvou složek A′, A″ vzájemně kolmých, nejlépe rovnoběžných s osami X, Y a úlohu pak řešíme jakobychom měli danou sílu P zrušit třemi silami A′, A″, B.

Za momentový střed zvolen bod c

X:	$A'' + P\cos 75° - B\cos 45° = 0$
Y:	$A' - P\sin 75° + B\sin 45° = 0$
M:	$-A'.6 + P\sin 75°.3 = 0$

$$A'' + 6.0{,}259 - B.0{,}707 = 0$$
$$A' - 6.0{,}966 + B.0{,}707 = 0$$
$$-A'.6 + 6.0{,}966.3 = 0$$

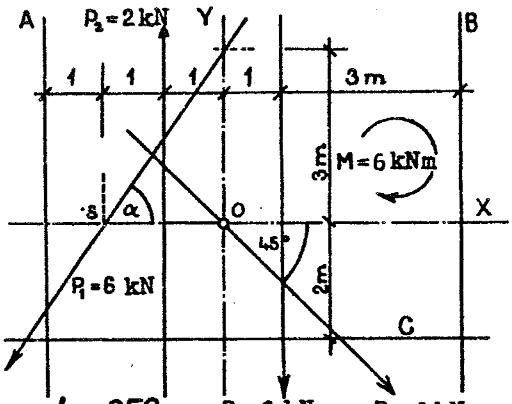
$\underline{B = 4{,}1\ \text{kN}}$, $A' = 2{,}9$ kN, $A'' = 1{,}345$ kN

$$\underline{A} = \sqrt{A'^2 + A''^2} = \sqrt{2{,}9^2 + 1{,}345^2} = \underline{3{,}2\ \text{kN}}$$

$$\sin\alpha_A = \frac{A'}{A} = \frac{2{,}9}{3{,}2} = 0{,}908 \qquad \alpha_A = 65°$$

$$\cos\alpha_A = \frac{A''}{A} = \frac{1{,}345}{3{,}2} = 0{,}422$$

(259)



obr. 259

Danou soustavu čtyř sil $P_1 - P_4$ a moment M, zrušte třemi silami A, B, C, je-li dána poloha jejich paprsků podle obr.259.

Úlohu řešte početně

Za momentový střed zvolen průsečík s paprsku síly P s osou X.

$$X: \quad - P \cos\alpha + P_3 \cos 45^\circ + \underline{C} = 0$$
$$Y: \quad - P \sin\alpha + P_2 - P_3 \sin 45^\circ + \underline{A} + \underline{B} = 0$$
$$M: \quad P_2 . r_2 - P_3 . r_3 - P_4 . r_4 - \underline{A}.1 + \underline{B}.6 + \underline{C}.2 - M = 0$$

$$- 6.0,555 + 2.0,707 + C = 0$$
$$- 6.0,832 + 2 - 2.0,707 - 6 + A + B = 0$$
$$2.1 - 2.1,414 - 6.3 - A.1 + B.6 + C.2 - 6 = 0$$

$C = 1,9$ $\qquad \sin\alpha = \dfrac{3}{13} = 0,832$

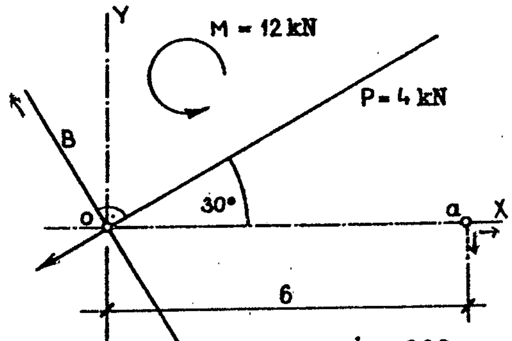
$A + B = 10,414$

$A - 6\,B = - 21,028$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{2}{13} = 0,555$

$\underline{A = 5,914 \text{ kN}}$, $\qquad \underline{B = 4,5 \text{ kN}}$, $\qquad \underline{C = 1,9 \text{ kN}}$

---

(260)



obr. 260

Danou sílu P = 4 kN a moment M = = 12 kN, zrušte dvěma silami A, B, jestliže síla B působí v daném paprsku a síla A prochází daným bodem a podle obr.260. Úlohu řešte početně

Poznámka:

Při analytickém řešení si myslíme sílu A rozloženu v bodě a do dvou složek A′ a A″, rovnoběžných se souřadnými osami X, Y.

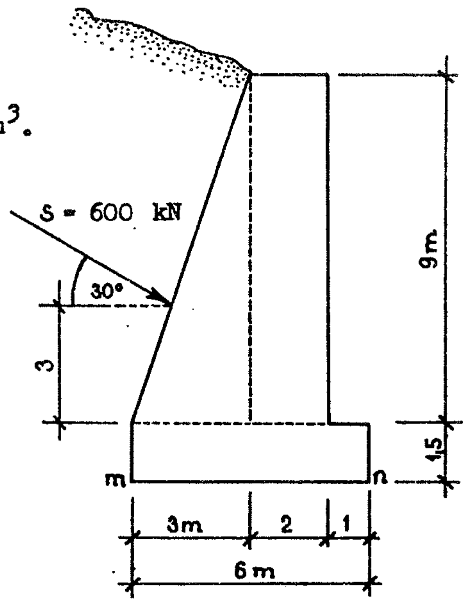
Smysl neznámých sil zvolen podle obr.

$$X: \quad - P \cos 30^\circ + \underline{A}'' - B \cos 60^\circ = 0, \qquad - 4.0,866 + \underline{A}'' - B.0,5 = 0$$
$$Y: \quad - P \sin 30^\circ - \underline{A}' + B \sin 60^\circ = 0, \qquad - 4.0,5 - \underline{A}' + B.0,866 = 0$$
$$M: \quad - \underline{A}'.6 + M = 0, \qquad - \underline{A}'.6 + 12 = 0$$

$A' = 2$ kN, $\qquad A'' = 5,77$ kN, $\qquad \underline{A = 6,1 \text{ kN}}$, $\qquad \underline{B = 4,62 \text{ kN}}$

$\alpha_A = 360^\circ - 19^\circ 10' = 340^\circ 50'$

261 Opěrná zeď o rozměrech vyznačených v obr.261 je zatížena tlakem zeminy. Opěrná zeď je z prostého betonu, jehož objemová hmotnost $\rho = 2{,}2\ t/m^3$. Určete celkový tlak R jednoho běžného metru opěrné zdi na základovou spáru <u>mn</u>, je-li tlak zeminy na 1 m opěrné zdi 600 kN. Zároveň určete polohu paprsku výsledného tlaku R a polohu jeho průsečíku <u>s</u> se základovou spárou <u>mn</u> (určete vzdálenost $\overline{ms}$).



obr. 261

Opěrnou zeď rozdělíme na tři části, v jejichž těžištích zavedeme síly Q_1, Q_2, Q_3. V bodě <u>m</u> zvolíme počátek <u>o</u> souřadné soustavy. Hledáme výslednici R sil S, Q_1, Q_2, Q_3 a úsek $p = \overline{ms}$, který vytíná její paprsek na ose X.

$$Q_1 = \frac{1}{2}\,3.9\,.2{,}2\,.\,10 = 297\ kN$$

$$Q_2 = 6.1{,}5\,.\,2{,}2\,.\,10 = 198\ kN$$

$$Q_3 = 2.\,9\,.\,2{,}2 = 396\ kN$$

X: $R_x = S\cos 30^\circ = 600.0{,}866 = 520\ kN$

Y: $R_y = -S\sin 30^\circ - Q_1 - Q_2 - Q_3 = -1191\ kN$

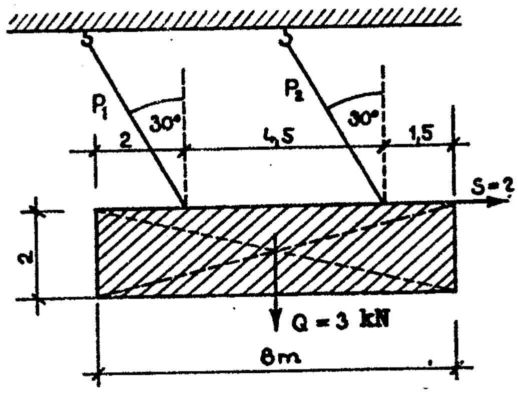
M: $M_o = -S\cos 30^\circ.4{,}5 - S\sin 30^\circ.1 - Q_1.2 - Q_2.3 - Q_3.4 =$
$= -2340 - 300 - 594 - 594 - 1584 = -5412\ kNm$

$$\underline{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{520^2 + 1191^2} = \underline{1300\ kN}$$

$$\underline{p} = \overline{ms} = \frac{M_o}{R_y} = \frac{-5412}{-1191} = \underline{4{,}54\ m}$$

---

262 Deska tíhy Q = 3 kN je zavěšena na dvou lanech. Jak velké síly S je třeba, aby se závěsná lana vychýlila o 30° od svislého směru podle obr.262?



obr. 262

Síly P_1, P_2, S, Q tvoří obecnou rovinnou rovnovážnou silovou soustavu. Danou sílu Q = 6 kN máme zrušit třemi silami P_1, P_2, S (úloha 2b). Momentový střed zvolen v bodě <u>b</u>

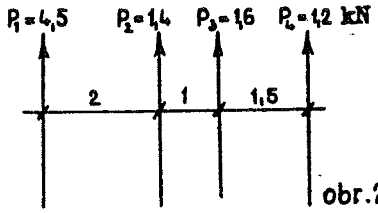
X: $-P_1\cos 60^\circ - P_2\cos 60^\circ + S = 0, \quad -P_1.0{,}5 - P_2 0{,}5 + S = 0$

Y: $P_1\sin 60^\circ + P_2\sin 60^\circ = 0 \quad P_1.0{,}866 + P_2.0{,}866 - 6 = 0$

M: $-P_1\sin 60^\circ.4{,}5 + Q.2{,}5 = 0 \quad -P_1.0{,}866.4{,}5 + 6.2{,}5 = 0$

$P_1 = 3{,}86\ kN$, $\quad P_2 = 3{,}08\ kN$, $\quad \underline{S = 3{,}47\ kN}$

(285) Určete výslednici R čtyř rovnoběžných sil, zadaných podle obr. 285. Úlohu řešte početně a graficky



obr.285

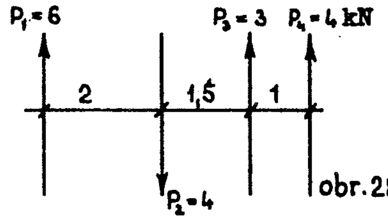
Y: $\underline{R} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \underline{8,7\ \mathrm{kN}}$

M: $M_o = P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4$

$$\underline{r} = \frac{M_o}{R} = \underline{1,495\ \mathrm{m}}$$

---

(286) Určete rovnovážnou sílu R čtyř sil zadaných podle obr.286. Úlohu řešte početně a graficky



obr.286

Y: $R + P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0$

M: $M_o - P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4 = 0$

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{-20,5}{9} = \underline{-\ 2,28\ \mathrm{m}}$$

(znamená, že výslednice R otáčí záporně kolem bodu $\underline{o}$)

$$p = \frac{M_o}{R_y} = \frac{-20,5}{-9} = 2,28\ \mathrm{m}$$

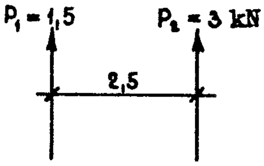
---

(287) Určete početně a graficky výslednici R dvou rovnoběžných sil

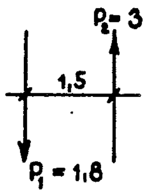
a. zadaných podle obr.287a

b. zadaných podle obr.287b

Zároveň uvažte, jaký smysl by měla v obou případech rovnovážná síla.



obr.287a



obr.287b

a. Y: $\underline{R} = P_1 + P_2 = \underline{4,5\ \mathrm{kN}}$

M: $M_o = P_2 \cdot p_2$

$$\underline{r} = \frac{M_o}{R} = \frac{7,5}{4,5} = \underline{1,67\ \mathrm{m}}$$

b. Y: $\underline{R} = -P_1 + P_2 = \underline{1,2\ \mathrm{kN}}$

M: $M_o = P_2 \cdot p_2$

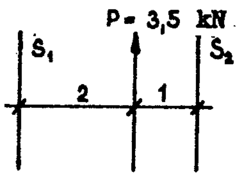
$$\underline{r} = \frac{M_o}{R} = \frac{4,5}{1,2} = \underline{3,75\ \mathrm{m}}$$

---

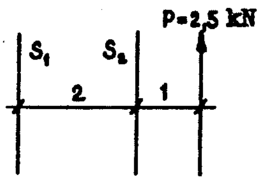
(288) Danou sílu P nahraďte dvěma silami S_1, S_2 s ní rovnoběžnými, je-li dána poloha jejich paprsků

a. podle obr.288a

b. podle obr.288b



obr. 288 a



obr. 288 b

a. Y: $P = S_1 + S_2$, $\underline{S_2 = 2,33\ \mathrm{kN}}$

M: $P.2 = S_2.3$, $\underline{S_1 = 1,17\ \mathrm{kN}}$

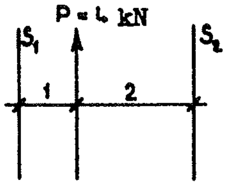
b. Y: $P = S_1 + S_2$, $\underline{S_2 = 3,75\ \mathrm{kN}}$

M: $P.3 = S_2.2$, $\underline{S_1 = -1,25\ \mathrm{kN}}$

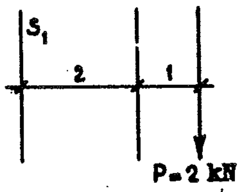
(289) Danou sílu P zrušte dvěma silami S_1, S_2 s ní rovnoběžnými, je-li dána poloha jejich paprsků

a. podle obr.289a

b. podle obr.289b



obr. 289a



obr. 289b

a. Y: $P - \underline{S_1} - \underline{S_2} = 0$, $\underline{S_2 = 1{,}33\ \text{kN}}$

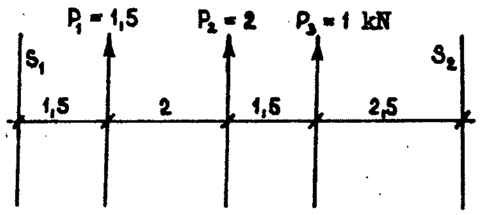
M: $P.1 - \underline{S_2}.3 = 0$, $\underline{S_1 = 2{,}67\ \text{kN}}$

b. Y: $-P - \underline{S_1} + \underline{S_2} = 0$, $\underline{S_2 = 3\ \text{kN}}$

M: $-P.3 + \underline{S_2}.2 = 0$, $\underline{S_1 = 1\ \text{kN}}$

---

(290) Danou soustavu tří sil P_1, P_2, P_3 nahraďte dvěma silami S_1, S_2, je-li dána poloha jejich paprsků podle obr.290.
Úlohu řešte početně a graficky.



obr 290

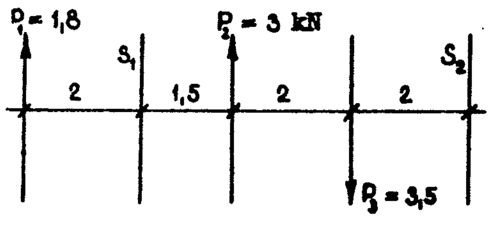
Y: $P_1 + P_2 + P_3 = \underline{S_1} + \underline{S_2}$ $\underline{S_2 = 1{,}9\ \text{kN}}$

M: $P_1.1{,}5 + P_2.3{,}5 + P_3.5 = \underline{S_2}.7{,}5$ $\underline{S_1 = 2{,}6\ \text{kN}}$

Poznámka: Při sestavování statických výminek ekvivalence bylo předpokládáno, že obě neznámé síly mají kladný smysl

---

(291) Danou soustavu tří rovnoběžných sil P_1, P_2, P_3 zrušte dvěma silami S_1, S_2, je-li dána poloha jejich paprsků podle obr.291.
Úlohu řešte početně a graficky.



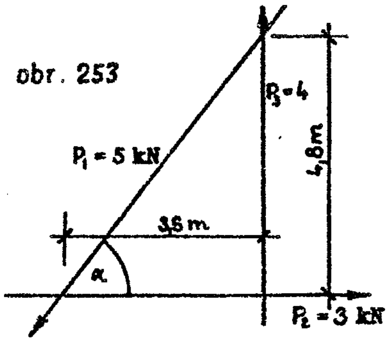
obr. 291

Y: $P_1 + P_2 - P_3 + \underline{S_1} + \underline{S_2} = 0$ $\underline{S_2 = 2{,}06\ \text{kN}}$

M: $-P_1.2 + P_2.1{,}5 - P_3.3{,}5 + \underline{S_2}.5{,}5 = 0$ $\underline{S_1 = -3{,}36\ \text{kN}}$

Poznámka: Při sestavování statických výminek rovnováhy bylo předpokládáno, že obě neznámé síly S_1, S_2 mají kladný smysl.

(253) Určete početně výslednici R tří sil P_1, P_2, P_3, zadaných podle obr. 253.



obr. 253

Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P_2 a P_3.

$$X: \quad R_x = -P_1 \cos\alpha + P_2 = -5\,\frac{3{,}6}{6} + 3 = 0$$

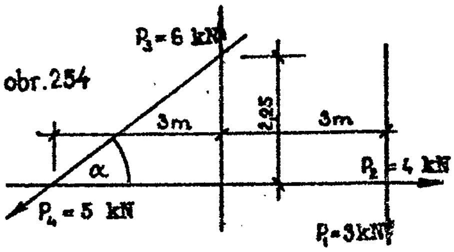
$$Y: \quad R_y = -P_1 \sin\alpha + P_3 = -5\,\frac{4{,}8}{6} + 4 = 0 \qquad R = 0$$

$$M: \quad M_o = P_1 \sin\alpha \cdot 3{,}6 = 5\,\frac{4{,}8}{6}\,3{,}6 = 14{,}4 \text{ kNm}$$

Výslednicí je silová dvojice o statickém momentu $M = M_o = \underline{14{,}4 \text{ kNm}}$

---

(254) Určete početně výslednici R čtyř sil P_1, P_2, P_3, P_4, zadaných podle obr. 254.



obr. 254

Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P_2 a P_3.

$$X: \quad R_x = P_2 - P_4 \cos\alpha = 4 - 5\,\frac{3}{3{,}75} = 0$$

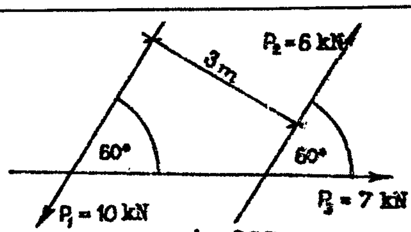
$$Y: \quad R_y = -P_1 + P_3 - P_4 \sin\ = -3 + 6 - 5\,\frac{2{,}25}{3{,}75} = 0$$

$$M: \quad M_o = P_4 \sin\alpha \cdot 3 - P_1 \cdot 3 = 5\,\frac{2{,}25}{3{,}75} \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 0$$

Daná silová soustava je v rovnováze

---

(255) Určete početně rovnovážnou sílu R dané soustavy tří sil P_1, P_2, P_3, zadaných podle obr. 255.



obr. 255

Počátek o souřadného systému zvolen v průsečíku paprsků sil P_1 a P_3.

$$X: \quad R_x - P_1 \cos 60^\circ + P_2 \cos 60^\circ + P_3 = 0, \qquad R_x = -5 \text{ kN}$$

$$Y: \quad R_y - P_1 \sin 60^\circ + P_2 \sin 60^\circ = 0, \qquad R_y = 3{,}46 \text{ kN}$$

$$M: \quad M_o + P_2 \cdot 3 = 0, \qquad M_o = -18 \text{ kNm}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5^2 + 3{,}46^2} = \underline{6{,}07 \text{ kN}}, \qquad r = \frac{M_o}{R} = \frac{-18}{6{,}07} = \underline{-2{,}96 \text{ m}}$$

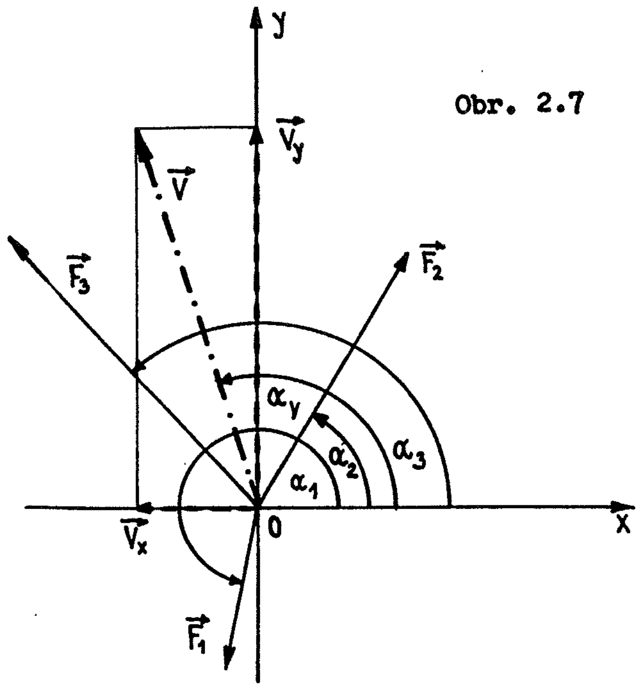
$$\sin\alpha_R = \frac{R_y}{R} = \frac{3{,}46}{6{,}07} = 0{,}57, \qquad p = \frac{M_o}{R_y} = \frac{-18}{3{,}46} = \underline{-5{,}2 \text{ m}}$$

$$\cos\alpha_R = \frac{R_x}{R} = \frac{-5}{6{,}07} = -0{,}823 \qquad q = -\frac{M_o}{R_x} = -\frac{-18}{-5} = \underline{-3{,}6 \text{ m}}$$

$$\alpha_R = 180^\circ - 34^\circ 40' = 145^\circ 20'$$

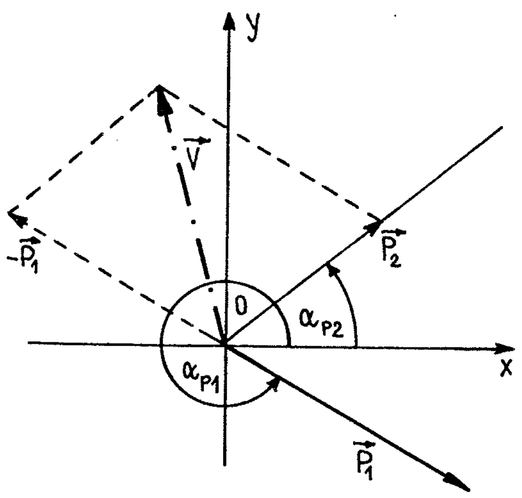
PŘÍKLAD 2.2

Danou silovou soustavu $\{F_i\}$ (viz obr. 2.7) nahraďte silami P_1, P_2, jestliže jsou známé polohy jejich paprsků $\alpha_{P1} = 330^\circ$ a $\alpha_{P2} = 40^\circ$.



Obr. 2.7

$F_1 = 20$ kN , $F_2 = 40$ kN ,
$F_3 = 50$ kN ,
$\alpha_1 = 260^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$,
$\alpha_3 = 130^\circ$.



Obr. 2.8

$$V_x = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = -15{,}61 \text{ kN} ;$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 53{,}25 \text{ kN} .$$

Podmínky ekvivalence :

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} = -15{,}61 = P_1 \cos 330^\circ + P_2 \cdot \cos 40^\circ$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} = 53{,}25 = P_1 \sin 330^\circ + P_2 \cdot \sin 40^\circ$$

Řešení : $P_1 = -54{,}09$ kN

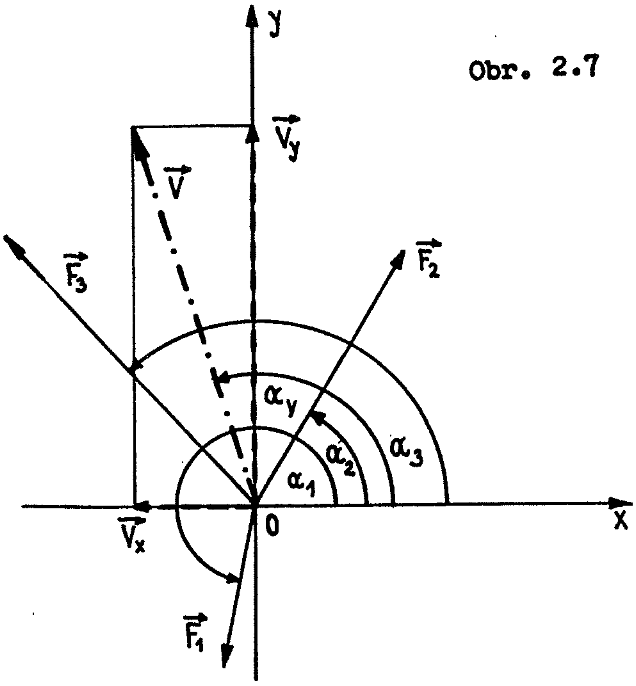
$P_2 = 40{,}76$ kN .

Znaménko minus u síly P_1 značí, že skutečný smysl síly P_1 je opačný než jsme předpokládali. Soustava sil $\{F_i\}$ je ekvivalentní se silami P_1 a P_2 neboť obě soustavy mají stejnou výslednici.

PŘÍKLAD 2.3

Soustavu sil $\{F_i\}$ (viz obr. 2.7) uveďte do rovnováhy silami P_3 a P_4, je-li dáno :

$\alpha_{P3} = 70^\circ$; $\alpha_{P4} = 270^\circ$.



Obr. 2.7

$F_1 = 20$ kN , $F_2 = 40$ kN ,

$F_3 = 50$ kN ,

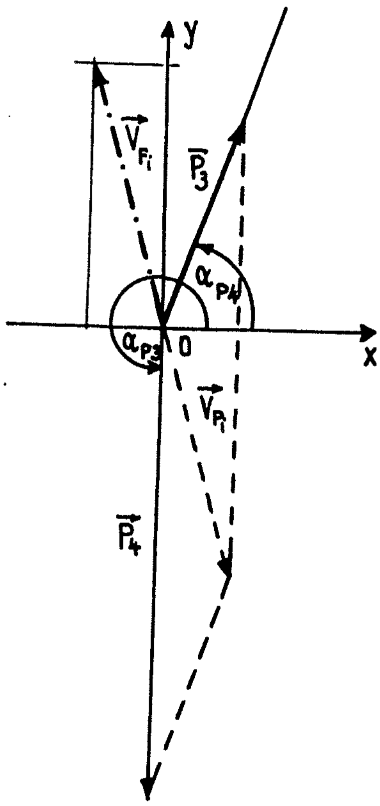
$\alpha_1 = 260^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$,

$\alpha_3 = 130^\circ$.

<u>Složky výslednice</u>

$$V_x = \sum_{i=1}^{3} F_i \cos \alpha_i = \underline{-15{,}61 \text{ kN}}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{3} F_i \sin \alpha_i = \underline{53{,}25 \text{ kN}}$$



<u>Podmínky rovnováhy</u> :

$$\sum_{i=1}^{3} F_{ix} + P_{3x} + P_{4x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} F_{iy} + P_{3y} + P_{4y} = 0$$

$$-15{,}61 + P_3 \cdot \cos 70^\circ + P_4 \cdot \cos 270^\circ = 0$$

$$53{,}25 + P_3 \cdot \sin 70^\circ + P_4 \cdot \sin 270^\circ = 0$$

$P_3 = 45{,}64$ kN ,

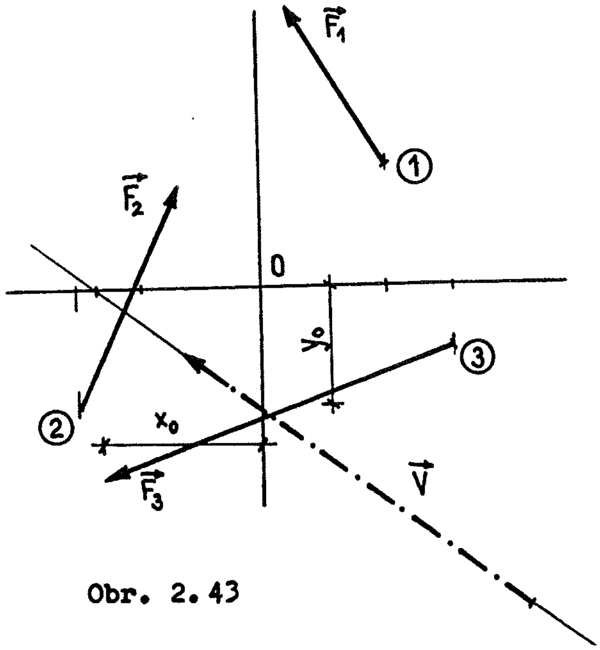
$P_4 = 96{,}14$ kN .

Soustava sil $\{F_i\}$ a síly P_3 , P_4 jsou v rovnováze. Výslednice obou soustav jsou síly stejně velké a opačného smyslu, jsou tedy v rovnováze.

Obr. 2.9

P Ř Í K L A D 2.25

Nahraďte soustavu sil $\{F_i\}$ (viz obr. 2.43) silami $\{P_j\}$, u nichž známe působiště a smysl.



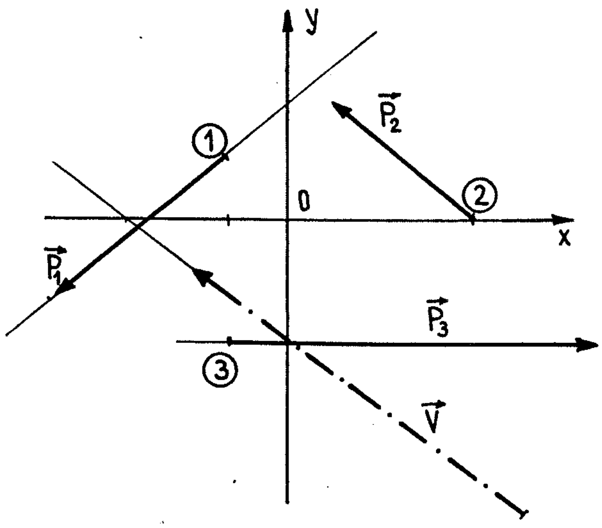
Obr. 2.43

i	F_i [kN]	α_i °	x_i [m]	y_i [m]
1	30	120	2	2
2	40	65	-3	-2
3	60	200	3	-1

Poloha paprsku výslednice $V_y \cdot x - V_x \cdot y = M_V$

$$41{,}71 \cdot x + 54{,}48 \cdot y = -110{,}93 \text{ kNm}$$

j	α°	x_j [m]	y_j [m]
1	220	-1	1
2	140	3	0
3	0	-1	-2



Obr. 2.44

Podmínky ekvivalence

$$-54{,}48 = P_1 \cos 220^\circ + P_2 \cos 140^\circ + P_3 \cos 0^\circ$$

$$41{,}71 = P_1 \sin 220^\circ + P_2 \sin 140^\circ + P_3 \sin 0^\circ$$

$$-110{,}93 = P_1[(-1)\sin 220^\circ - 1.\cos 220^\circ] + P_2 . 3\sin 140^\circ + P_3[(-1)\sin 0^\circ - (-2)\cos 0^\circ]$$

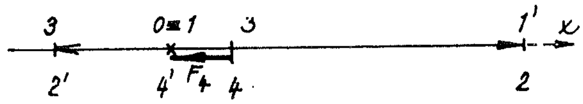
$$-54{,}48 = -0{,}77\,P_1 - 0{,}77\,P_2 + P_3$$

$$41{,}71 = -0{,}64\,P_1 + 0{,}64\,P_2$$

$$-110{,}93 = 1{,}41\,P_1 + 1{,}93\,P_2 + 2\,P_3$$

$P_1 = -35{,}53$ kN ; $P_2 = 29{,}64$ kN ; $P_3 = -59{,}02$ kN .

Záporná znaménka u vypočtených sil znamenají, že síly působí proti předpokládanému kladnému smyslu.



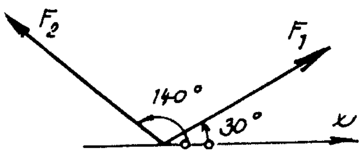
Obr. 2.1.

P ř í k l a d 2.1. Jsou dány síly F_1 =300kN, F_2 = -400 kN, F_3 = 150 kN. Určete sílu F_4 tak, aby soustava byla v rovnováze. Podmínka rovnováhy $R = \sum_{i=1}^{4} F_i = 0$ tedy $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$. Po dosazení bude: $300 - 400 + 150 + F_4 = 0$ odtud $F_4 = -50\,kN$. Smysl síly F_4 odpovídá smyslu síly F_2 . Kladný smysl byl zvolen ve směru osy +x. Výsledná síla uzavírá složkový obrazec z koncového bodu 3' do výchozího bodu 0 .

P ř í k l a d 2.2. Pod úhlem 30° od osy +x působí síla F_1 =200kN, F_2 =100 kN působí pod úhlem 140°, dle obr. 2.3 a). Určete velikost a směr výslednice R- síly ekvivalentní se silami F_1 a F_2.

Úhel α = 110° cos α = – 0,3420 sin α = 0,9397

Velikost výslednice dle 1.1 je $R = \sqrt{4\cdot10^4 + 1\cdot10^4 + 2\cdot2\cdot10^4\cos\alpha} = 190,58\,N$



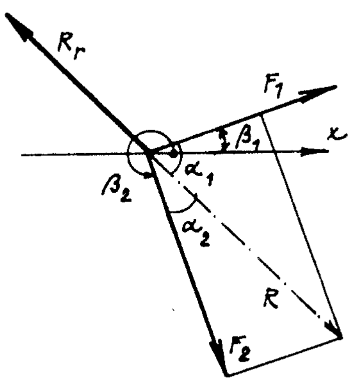
Obr. 2.3.

Úhly, které svírá R se silami F_1 a F_2 určíme ze sinové věty 2.1.

$$\sin\alpha_1 = \frac{F_2}{R}\cdot\sin\alpha = \frac{100}{190,58}\cdot 0,9397 = 0,431 \qquad \alpha_1 \doteq 29°32'35''$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_1}{R}\cdot\sin\alpha = \frac{200}{190,58}\cdot 0,9397 = 0,9862 \qquad \alpha_2 = 80°27'24''$$

Obr. 2.4.



P ř í k l a d 2.3. Zjistěte sílu R_r, která uvede soustavu sil F_1 a F_2 dle obr.2.4 do rovnováhy. Řešení ověřte graficky. F_1 = 100 kN, F_2 = 200 kN, úhly, které svírají paprsky sil s osou +x, měřené proti chodu ručiček hodinových jsou β_1 = 20° a β_2 = 290°.

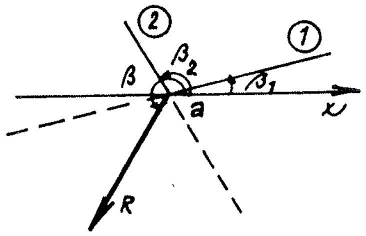
Úhel, který svírají paprsky obou sil je α' = 270°, ostrý úhel α = 90°; sin α = 1, cos α = 0.

Výslednice: $R = \sqrt{4\cdot10^4 + 1\cdot10^4 + 2\cdot2\cdot10^4\cdot 0} = 223,61\,kN$

úhly: $\sin\alpha_1 = \dfrac{200}{223,61}\cdot 1 = 0,8944 \qquad \alpha_1 = 63°25'60''$

$\sin\alpha_2 = \dfrac{100}{223,61}\cdot 1 = 0,4472 \qquad \alpha_2 = 26°33'58''$

Síla R_r, která uvede soustavu do rovnováhy působí v paprsku výslednice R , ale má opačný smysl obr. 2.4a).



Obr. 2.5.

P ř í k l a d 2.4. Proveďte rozklad síly R = 800 kN do dvou směrů definovaných úhly β_1 = 15° a β_2 = 120° dle obr. 2.5. Paprsek R svírá s osou +x úhel β = 240°. Ze situace sil je zřejmé, že složky F_1 a F_2 síly R budou z bodu a směřovat do 3. a 4. kvadrantu. Úhel α, který svírají je $\alpha = 120° - 15° = 105°$.

$\sin\alpha = \sin 15° = 0{,}9659 \qquad \cos\alpha = -\cos 15° = -0{,}2588$

Pro úhly, které svírají paprsky sil s výslednicí:

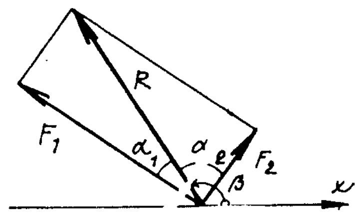
$\sin\alpha_1 = \sin 45° = 0{,}7071 \qquad \sin\alpha_2 = \sin 60° = 0{,}8660$

Velikosti složek:

$$\underline{F_1} = \frac{R}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha_2 = \frac{800}{0{,}9659}\cdot 0{,}8660 = \underline{\underline{717{,}258\ kN}}$$

$$\underline{F_2} = \frac{R}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha_1 = \frac{800}{0{,}9659}\cdot 0{,}7071 = \underline{\underline{585{,}651\ kN}}$$

P ř í k l a d 2.5. Rozložte sílu R = 1000 kN, která svírá s osou +x úhel β = 120° do dvou k sobě kolmých složek F_1 a $F_2 = 0{,}5 F_1$. Určete úhly α_1 a α_2. Dle obr. 2.2. platí $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; v našem případě α = 90°, $\sin\alpha$ = 1. Dále $\sin\alpha_1 = \cos\alpha_2$ a $\sin^2\alpha_2 = 1 - \cos^2\alpha_2$



Obr. 2.6.

Ze sinové věty: $F_1 = \dfrac{R}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha_2 = 1000\sin\alpha_2$ (a)

$$F_2 = 0{,}5F_1 = \frac{R}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha_1 = 1000\sin\alpha_1$$

po dosazení: $0{,}5\,F_1 = 10^3\cos\alpha_2$ (b)

Po úpravě (a) bude: $F_1^2 = 10^6\cdot\sin^2\alpha_2$

$$F_1^2 = 10^6\cdot(1 - \cos^2\alpha_2)$$

dosadíme za $\cos^2\alpha_2$ z (b): $\cos^2\alpha_2 = \dfrac{1}{4}\cdot 10^{-6}F_1^2$

$F_1^2 = 10^6 - \dfrac{1}{4}F_1^2$; $\qquad \underline{F_1} = 10^3\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \underline{\underline{894{,}4\ kN}} \qquad \underline{F_2} = 0{,}5F_1 = \underline{\underline{447{,}2\ kN}}$

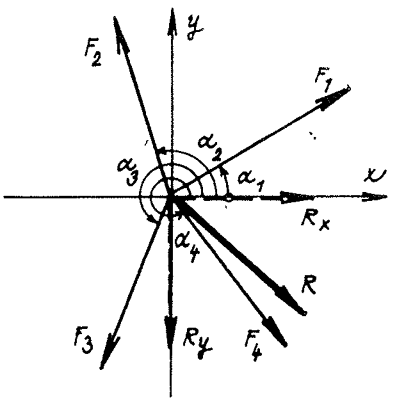
Úhly α_1 a α_2 se určí např. zpětným dosazením do vztahu (b) nebo přímo ze sinové věty:

$\cos\alpha_2 = 0{,}5\cdot 894{,}4\cdot 10^{-3} = 0{,}4472 \qquad \underline{\underline{\alpha_2 = 63°\,26'\,05''}}$

$\sin\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0{,}4476 \qquad \underline{\underline{\alpha_1 = 90 - \alpha_2 = 26°33'55''}}$

Stejné výsledky dostaneme jednoduše rozložením síly R do směrů sil F_1 a F_2:

$F_1 = R\cos\alpha_1 = 894{,}4\ kN$; $\quad F_2 = R\cdot\cos\alpha_2 = 447{,}2\ kN$



Obr. 2.7.

P ř í k l a d 2.6. Určete výslednici - sílu ekvivalentní-dané soustavy sil dle obr. 2.7. Zadání i výpočet jsou upraveny tabelárně. Úhly jsou měřeny od osy +x proti chodu ručiček hodinových.

i	F_i [kN]	α_i [°]	$\sin\alpha_i$	$\cos\alpha_i$	F_{ix} [kN]	F_{iy} [kN]
1	120	30	0,5	0,8660	103,92	60
2	60	105	0,9659	-0,2588	-15,53	57,95
3	100	250	-0,9397	-0,3420	-34,20	-93,97
4	120	310	-0,7660	0,6428	77,14	-91,92
				Σ	131,33	-67,94
					R_x	R_y

Složky výslednice: $R_x = \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = 131,33\,kN$

$$R_y = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = -67,94\,kN$$

Výslednice: $\underline{R} = \sqrt{131,33^2 + 67,94^2} = \underline{147,86\,kN}$

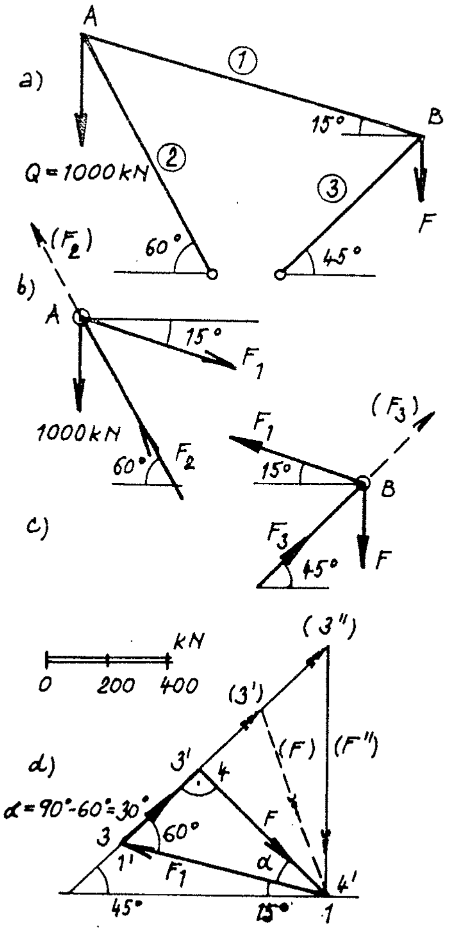
Ostrý úhel, který svírá R s osou +x z jednoho z výrazů 2.5, 2.6.

$$\cos\alpha_R = \frac{131,33}{147,86} = 0,8882\ ; \quad \sin\alpha_R = \frac{-67,94}{147,86} = -0,4595$$

Ze znamének goniometrických funkcí i ze smyslů složek výslednice je zřejmé, že R leží ve 4. kvadrantě.

P ř í k l a d 2.7. Určete velikost síly F, která má zajistit, aby
1) systém dle obr. 2.8 a) byl v rovnováze,
2) velikost síly F, která zajistí rovnováhu byla minimální.

Spojnice bodů A a B představuje paprsek síly F_1, která působí např. na bod A a podle 3. Newtonova zákona "akce a reakce" vyvolá reakci stejně velikou, opačného smyslu, kterou působí z bodu A na bod B (nebo naopak). Předpokládejme, jak je naznačeno na obr. b) c), že F_1 bude působit na oba body tahem. U ostatních sil F_2 a F_3 budeme očekávat, že působí tak, jak směřují šipky na obrázcích. Správný smysl bude dán znaménkem výsledné hodnoty. Vyjdou-li řešením síly kladné, byl předpoklad správný. Je zřejmé, že úloha se rozpadá na řešení dvou svazků sil, o kterých budeme předpokládat, jak bylo uvedeno v úvodu 2.3, že působí na působiště tahem. V úvodu 1 jsme dále napsali, jako dedukci axiomu o rovnováze sil působících v jednom paprsku, že sílu lze v jejím paprsku posunout (čárkovaně). Z rozboru obou obrázků b),c) je zřejmé, že na bod B působí tři neznámé síly, zatím co na bod A pouze dvě: F_1 a F_2. V úvodu odstavce 2.3.2 jsme uvedli, že po zajištění rovnováhy svazku sil máme k dispozici pouze dvě podmínky rovnováhy 2.7. Je tedy nezbytné začít s řešením v bodě A. Při rozepsání podmínek určujeme smysly složek podle obrázku s ohledem na zvolený kladný smysl sil.



Obr. 2.8.

1) bod Ⓐ

$R_x = 0 : \; F_1 \cos 15° - F_2 \cos 60° = 0$ $\qquad \underline{\underline{F_1 = 707,2\,kN}}$

$R_y = 0 : \; 1000 - F_2 \sin 60° + F_1 \sin 15° = 0$ $\qquad \underline{\underline{F_2 = 1366,10\,kN}}$

bod Ⓑ

$R_x = 0 : \; -F_1 \cos 15° + F_3 \cos 45° = 0$ $\qquad \underline{\underline{F_3 = 966,04\,kN}}$

$R_y = 0 : \; -F_1 \sin 15° - F_3 \sin 45° + F = 0$ $\qquad \underline{\underline{F = 866,11\,kN}}$

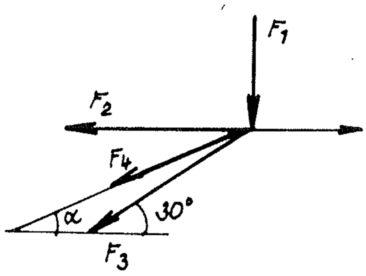
U všech sil byl předpoklad působení správný - znaménka výsledků jsou kladná.

2) Ve druhé úloze je třeba určit dvě neznámé - velikost a směr síly F z rovnováhy bodu B, navíc je tu ale třetí požadavek- minimalizace síly. Z grafického řešení rovnováhy bodu B (obr. d) je zřejmé, že neznámá síla F, která působí ve stejném smyslu jako F_1 a F_3 musí procházet výchozím bodem 1. Síla F_1 je definována z rovnováhy bodu A a nelze měnit ani její velikost ani směr. Pootáčením síly F kolem bodu $1 \equiv 4'$ je možné získat libovolné množství sil F a jim přiřazených (co do velikosti) sil F_3, které budou splňovat podmínku rovnováhy - tj. uzavřený složkový obrazec. Minimální bude síla F tehdy, bude-li působit kolmo na paprsek síly F_3. Velikosti sil F_1 a F_3 ze sinové věty budou

$$\frac{F_3}{\sin 30°} = \frac{F_1}{\sin 90°} \; ; \quad \underline{\underline{F_3}} = 0,5\,F_1 = \underline{\underline{353,6\,kN}} \; ; \quad \frac{F}{\sin 60°} = \frac{F_1}{\sin 90°} \; ; \quad \underline{\underline{F}} = F_1 \cdot 0,866 = \underline{\underline{612,43\,kN}}$$

Správnost výpočtu je možno ověřit znovu podmínkami rovnováhy bodu B. Síla F svírá nyní se silou F_1 úhel $\alpha = 30°$.

P ř í k l a d 2.8. Pod jakým úhlem bude působit a jak veliká bude síla F_4, která nahradí všechny tři zbývající, jsou-li stejně velké a jsou-li orientovány dle obr. 2.9.



Obr. 2.9.

$$F_1 = F_2 = F_3 = 2000\,kN$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} \longrightarrow -F_4 \cos\alpha = -F_2 - F_3 \cos 30°$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} \longrightarrow F_4 \sin\alpha = F_1 + F_3 \sin 30°$$

$$F_4 \cos\alpha = F(1+0{,}866) \qquad \text{(a)}$$

$$F_4 \sin\alpha = F(1+0{,}5) \qquad \text{(b)}$$

Z obou výrazů (a), (b) vyjádříme F_4 a srovnáme:

$$3{,}732^2 \sin^2\alpha = 9 \cos^2\alpha$$

$$3{,}732^2 \sin^2\alpha = 9(1-\sin^2\alpha) \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{22{,}928}} = 0{,}6265$$

$$\underline{\underline{\alpha = 38°47'39''}}$$

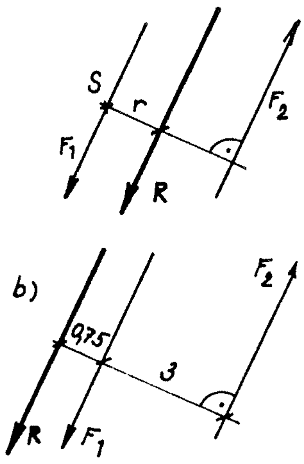
Velikost síly F_4 např. z (b) bude: $\underline{\underline{F_4}} = \frac{3\cdot 10^3}{0{,}6265} = \underline{\underline{4788\,kN}}$

Kontrola ekvivalence do směru os: $(\cos\alpha = 0{,}7794)$

$$X:\ 2000 + 2000\cdot 0{,}866 = 4788\cdot 0{,}7794 \quad \text{——} \quad 3732 = 3732$$

$$Y:\ 2000 + 2000\cdot 0{,}5 = 4788\cdot 0{,}6265 \quad \text{——} \quad 3000 = 3000$$

P ř í k l a d 2.10. Jsou dány dvě rovnoběžné síly $F_1 = 100$ kN a $F_2 = 20$ kN dle obr. 2.14. Určete velikost a polohu paprsku výslednice R. Vektor $\vec{R}$ je dán vektorovým součtem $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$. Jak bylo uvedeno v odst. 2.3.4 bude výslednice rovnoběžná s paprsky sil F_1 a F_2 a její velikost bude dána jejich algebraickým součtem: $R = F_1 + F_2 = 100 - 20 = 80\ kN$, její smysl je dán smyslem síly větší. Polohu R určíme z momentové věty. Zvolíme libovolný bod S, z něhož spustíme kolmici na paprsky sil. S výhodou zvolíme bod na paprsku některé ze soustavy sil - moment této síly se pak v momentové větě neprojeví - síla má rameno $p = 0$. Podle (2.8) bude:

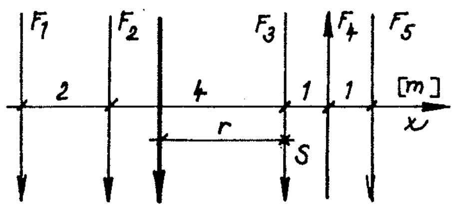


Obr. 2.14.

$$-R \cdot r = F_2 \cdot 3 \qquad \text{odtud} \qquad r = -\frac{60}{80} = -0{,}75\,m$$

Záporné znaménko znamená, že paprsek R je od bodu S posunut na opačnou stranu než byl náš předpoklad. Správná poloha je vyznačena na obr. 2.14b).

P ř í k l a d 2.12. Zjistěte, jaká bude velikost a poloha síly R, která uvede soustavu rovnoběžných sil dle obr. 2.16 do rovnováhy. Velikosti sil jsou: $F_1 = F_2 = F_5 = 100\,kN$, $F_3 = F_4 = 80\,kN$. Jak bylo uvedeno v odst. 2.3.4 a v předchozích dvou příkladech, bude ekvivalentní síla R k dané soustavě opět svislá a její velikost bude dána algebraickým součtem všech sil. Podmínka pro rovnovážnou sílu R bude:



Obr. 2.16.

$$R + F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_5 = 0 \qquad \underline{\underline{R = -300\,kN}}$$

Síla, která zajistí rovnováhu vyšla záporná; směřuje nahoru, proti nakreslenému předpokladu. Polohu síly R předpokládáme dle obr. 2.16. Z momentové věty 2.8 vzhledem k bodu S na paprsku síly F_3 bude:

$$F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4 + F_4 \cdot 1 - F_5 \cdot 2 + R \cdot r = 0$$

$$600 + 400 + 80 - 200 = 300 \cdot r \qquad \underline{\underline{r = 2{,}933\,m}}$$

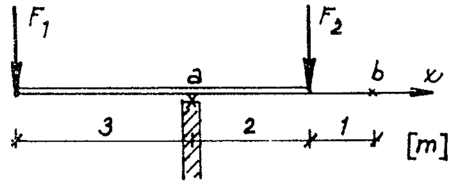
Síla, která uvede soustavu do rovnováhy je $R = 300\,kN$, směřuje ve vzdálenosti $r = 2{,}933\,m$ vlevo od síly F_3 nahoru.

P ř í k l a d 2.11. Na tuhý trám působí na okraji síly F_1 a F_2, trám je podepřen v bodě a dle obr. 2.15. Jak velká musí být síla F_2 je-li F_1 = 100 kN a má-li výslednice R procházet bodem a.

Velikost výslednice není přirozeně známa, je známe její poloha. Momentovou větu aplikujeme na bod a.

Výslednice bude mít nulové rameno. Dle 2.8 bude

$R \cdot 0 = F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 2$ odtud $F_2 = \dfrac{3 \cdot 100}{2} = 150\ kN$



Obr. 2.15.

Při aplikaci momentové věty k libovolnému bodu, např. b budou ve vztahu 2.8 dvě neznámé: R a F_2:

$R \cdot 3 = F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 1, \quad R \cdot 3 = 100 \cdot 6 + F_2 \cdot 1$ (a)

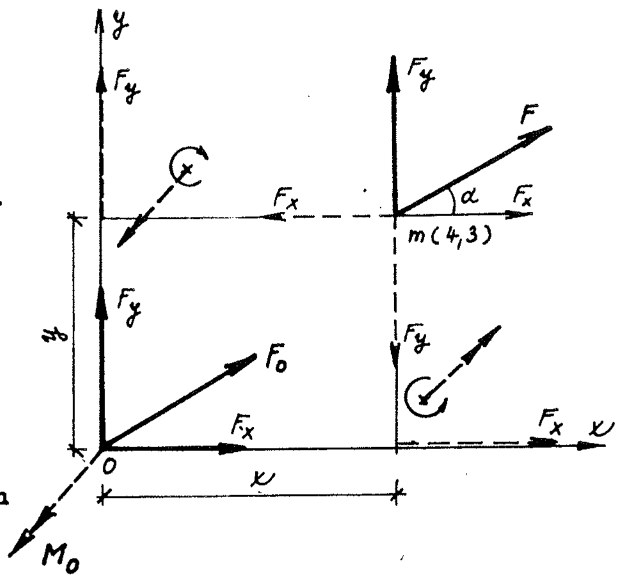
Je třeba uplatnit další podmínku k určení obou neznámých a tou je podmínka ekvivalence $R_y = \sum F_{iy}$

$R = F_1 + F_2, \quad R = 100 + F_2$ (b)

Ze vztahu (b) dosadíme do (a): $(100 + F_2)\,3 = 100 \cdot 6 + F_2 \cdot 1$

$$300 + 3F_2 = 600 + F_2 \Rightarrow F_2 = 150\ kN$$

P ř í k l a d 2.15. Určete velikost momentu M, který je třeba přidat k síle dle obr. 2.20, aby se posunula do počátku $F = 200\,kN$, $\alpha = 30°$



Obr. 2.20.

Posunutí do počátku vyžaduje:

1. určení složek síly:

   $F_x = F \cdot \cos\alpha$; $F_y = F \cdot \sin\alpha$

   O jejich znaméncích platí, co bylo řečeno v odst. 2.3.
2. určení silových dvojic (čárkovaně), které posunují složky F_x a F_y do souřadnicových os.
3. posunutí složek v souřadnicových osách do počátku.

Moment v počátku bude:

$$\boxed{M_0 = -F_x \cdot y + F_y \cdot x} \qquad (2.9)$$

Je zřejmé, že vztah (2.9) je zároveň momentem složek síly F vzhledem k počátku. Po číselném dosazení budou složky:

$$F_x = 200 \cdot 0{,}866 = 173{,}2\,kN\,, \qquad F_y = 200 \cdot 0{,}5 = 100\,kN$$

moment M_0, jehož přičtením k síle $F_0 = F$ získáme ekvivalentní účinek se silou F je: $M_0 = -173{,}2 \cdot 3 + 100 \cdot 4 = -119{,}6\,kNm$.

Vektor momentu směřuje za nákresnu.

P ř í k l a d 2.16. Zadání odpovídá obr. 2.22. Hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Úhly paprsků sil, působících na působiště tahem jsou měřeny proti chodu ručiček hodinových od osy $+x$. (odst. 2.3).

							F_{ix} [kN]	F_{iy} [kN]	M [kNm]	
i	F_i[kN]	x_i[m]	y_i[m]	α_i[°]	$\sin\alpha_i$	$\cos\alpha_i$	$F_i\cos\alpha_i$	$F_i\sin\alpha_i$	$F_{ix}\,y_i$	$F_{iy}\,x_i$
1	100	2	2	30	0,5	0,8660	86,6	50	173,2	100
2	200	-1	0,5	120	0,8660	-0,5	-100	173,2	-50,0	-173,2
3	100	-2	-1	250	-0,9397	-0,3420	-34,2	-94,0	34,20	187,9
4	80	3	-4	150	0,5	-0,866	-69,3	40,0	277,1	120,0
						Σ	-116,9	169,2	434,5	234,7
							R_{xo}	R_{yo}	$M_o = -199,8$	

Hodnota M_0 z analogie (2.12): $M_0 = \Sigma(-R_{xo}y + R_{yo}x)$

Výslednice $= \underline{R_0} = \sqrt{R_{xo}^2 + R_{yo}^2} = \sqrt{116,9^2 + 169,2^2} = \underline{\underline{205,7\ kN}}$

Směrové ostré úhly dle (2.11): $\cos\alpha_R = \dfrac{-116,9}{205,7} = -0,5683 \qquad \alpha = 55°22'04''$

$\sin\alpha_0 = \dfrac{169,2}{205,7} = 0,8226 \qquad \cos < 0,\ \sin > 0 \rightarrow$ II. kvadrant

Moment $M_0 = 669,2\ kNm$ posune výslednici R_0 rovnoběžně z počátku o vzdálenost

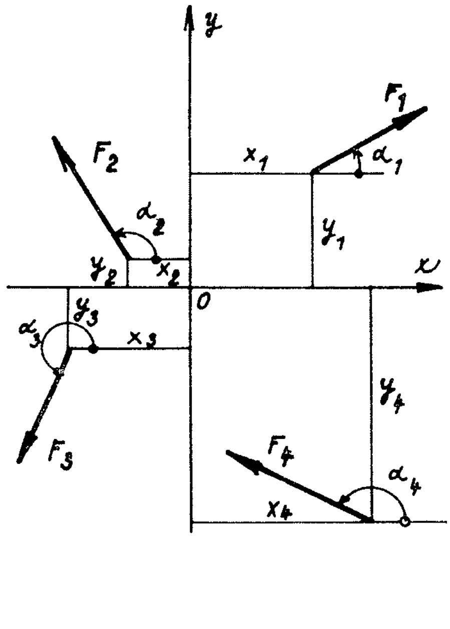
$$\underline{r} = \frac{|M_0|}{R} = \frac{199,8}{205,7} = \underline{\underline{0,97\ m}}$$

Posunutá výslednice R musí otáčet (odst. 2.6) kolem počátku ve stejném smyslu jako M_0, tedy proti chodu ručiček hodinových. Úseky, které vytíná na osách jsou dle 2.14:

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{-199,8}{169,2} = \underline{\underline{-1,18\ m}} \qquad \underline{\underline{\eta}} = -\frac{-199,8}{-116,9} = \underline{\underline{-1,71\ m}}$$

Na obr. 2.23 je tučně vyznačena posunutá výslednice, čárkovaně nahrazované složky R_0 a M_0.

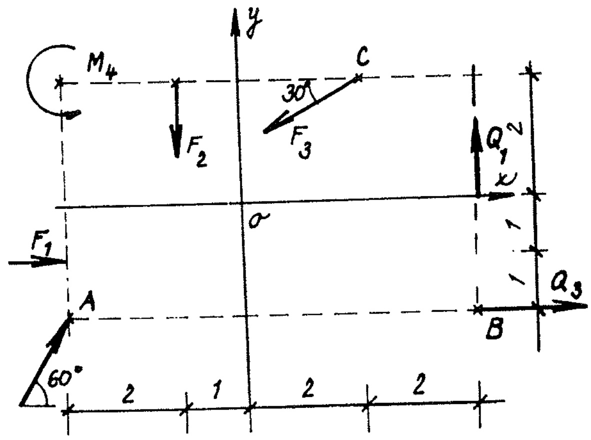
Platí: $r = 0,97 = |\xi|\cdot\sin\alpha_R = 1,18\cdot 0,8226 = |\eta|\cdot\cos\alpha_R =$
$= 1,71\cdot 0,5683$



Obr. 2.22.

P ř í k l a d 2.17. Je zadána soustava sil F_i daných směrů a velikostí a moment M dle obr. 2.25. Zjistěte velikosti sil Q_i daných směrů, které mají zajistit splnění podmínek rovnováhy. F_1 = 100 kN, F_2 = 300 kN, F_3 = 200 kN, F_4 = 100 kNm.

Podmínky rovnováhy napíšeme ve tvaru:



Obr. 2.25.

$$\sum_i F_{ix} + \sum_k Q_{kx} = 0 : \quad -F_3 \cos 30° + F_1 + Q_2 \cos 60° + Q_3 = 0 \qquad (a)$$

$$\sum_i F_{iy} + \sum Q_{ky} = 0 : \quad F_2 + F_3 \cdot \sin 30° - Q_1 - Q_2 \cdot \sin 60° = 0 \qquad (b)$$

Momentovou podmínku rovnováhy napíšeme s výhodou k tomu bodu, ke kterému alespoň některé neznámé vypadnou (mají nulové rameno), např. k bodu A.

$$\curvearrowleft A \quad \sum_i M_{iA} + \sum_k M_{kA} = 0 : \quad Q_1 \cdot 7 - F_3 \cdot \sin 30° \cdot 5 + F_3 \cos 30° \cdot 4 - F_2 \cdot 2 - F_1 \cdot 1 + M_4 = 0 \qquad (c)$$

Místo dvou součtových podmínek (a), (b), stručně zapsaných jako $R_x = 0$; $R_y = 0$ a momentové podmínky (c): $\sum M_A = 0$ je možno zapsat také tři momentové podmínky k bodům (Ritterova metoda), které neleží v jedné přímce a dvěma součtovými podmínkami ověřit správnost získaných výsledků.

bod $\curvearrowleft A$: $\quad F_2 \cdot 5 + M_4 + F_3 \cdot \sin 30° \cdot 2 + F_3 \cdot \cos 30° \cdot 4 - F_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot \sin 30° \cdot 7 = 0$

bod $\curvearrowleft C$: $\quad M_4 + F_2 \cdot 3 + F_1 \cdot 3 + Q_1 \cdot 2 + Q_3 \cdot 4 + Q_2 \cdot \cos 60° \cdot 4 - Q_2 \cdot \sin 60° \cdot 5 = 0$

bod $\curvearrowleft \sigma$: $\quad F_2 \cdot 1 + F_1 \cdot 1 + M_4 + Q_3 \cdot 2 + Q_1 \cdot 4 + F_3 \cdot \cos 30° \cdot 2 - F_3 \cdot \sin 30° \cdot 2 - Q_2 \cdot \sin 60° \cdot 3 + Q \cdot \cos 60° \cdot 2 = 0$

Řešením je $\quad \underline{\underline{Q_1 = 58{,}1714 \text{ kN}}} \quad \underline{\underline{Q_2 = 394{,}7212 \text{ kN}}} \quad \underline{\underline{Q_3 = -124{,}1606 \text{ kN}}}$

Dosazením do vztahů (a) a (b) ověříme správnost řešení:

$$-200 \cdot 0{,}866 + 100 + 394{,}7212 \cdot 0{,}5 - 124{,}1606 = 0$$

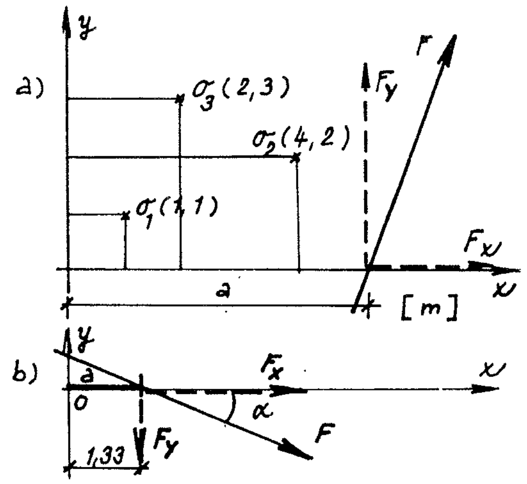
$$300 + 200 \cdot 0{,}5 - 58{,}1714 - 394{,}7212 \cdot 0{,}866 = 0$$

Příklad 2.18. Určete velikost, směr a smysl síly F, která protíná osu x, je-li její momentový účinek vzhledem k bodům o_1, o_2, o_3 dán: $M_1 = 100$ kNm, $M_2 = 400$ kNm, $M_3 = 400$ kNm.
Sílu F rozložíme do dvou složek a vzdálenost a průsečíku síly s osou x od počátku označíme dle obr. 2.26.
Momenty složek F_x a F_y předpokládané síly k bodům budou:

$$F_x \cdot 1 + F_y(a-1) = M_1$$
$$F_x \cdot 2 + F_y(a-4) = M_2$$
$$F_x \cdot 3 + F_y(a-2) = M_3$$

Po vyčíslení je:

$$\underline{\underline{F_x = 120 \text{ kN}}}$$
$$\underline{\underline{F_y = -60 \text{ kN}}}$$



Obr. 2.26.

Velikost síly F je $F = \sqrt{120^2 + 60^2} = \underline{\underline{134,16 \text{ kN}}}$

Vzdálenost průsečíku $\underline{\underline{a = 1,33 \text{ m}}}$

Ostrý úhel, který svírá F s osou x je dán:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{120}{134,16} = 0,894 \; ; \quad \underline{\underline{\alpha = 26°33'41''}} \quad F_y < 0, \text{ tedy } \sin\alpha < 0, \; \cos\alpha > 0$$

Paprsek síly směřuje do 4. kvadrantu (obr. 2.26b)

Příklad 2.19. Jaká musí být kolmá vzdálenost r dvojice sil $F_1 = F_2$, aby soustava sil mohla být uvedena do rovnováhy silou F_5 dle obr. 2.27.
$F_3 = F_4 = 300$ kN, $\alpha = 60°$. Výslednice sil F_3 a F_4 působí svisle:

$$\underline{R_{3,4} = (F_3 + F_4) \cdot \sin 60° = 0,866 \cdot 600 = 519,6 \text{ kN}}$$

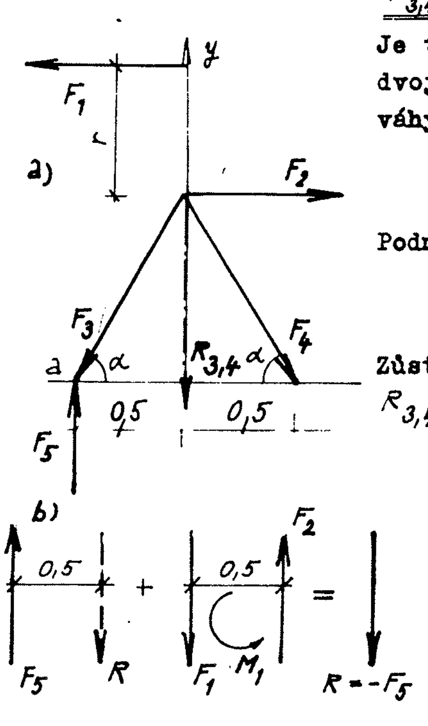
Je třeba posunout výslednici do bodu a, což musí zajistit dvojice sil. Velikost síly F_5 je určena z podmínky rovnováhy do svislého směru $\Sigma F_{iy} = 0$;

$$\underline{\underline{F_5 = R_{3,4} = 519,6 \text{ kN}}}$$

Podmínka rovnováhy sil do osy x je:

$$\Sigma F_{ix} = -F_1 + F_2 - F_3 \cdot \cos\alpha + F_4 \cos\alpha = 0$$

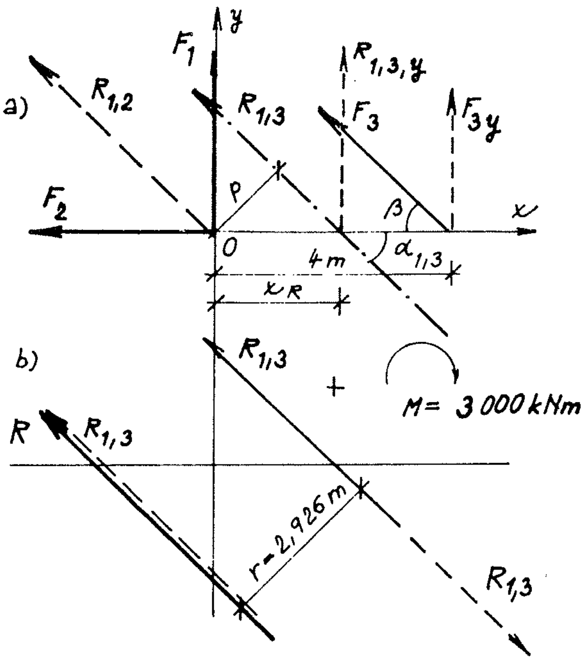
Zůstává ovšem otevřena otázka dvou dvojic sil, a to sil $R_{3,4}$ a F_5 a sil F_1 a F_2. Dvojice mají dle obr. opačný smysl. Dvojice $M_1 = F_1 \cdot r$ má zajistit posunutí $R_{3,4}$ do paprsku síly F_5. Velikost $M_1 = R_{3,4} \cdot 0,5$.
Dvojicí lze v rovině otáčet a posouvat. Je možno si představit pootočení dvojice o 90° proti chodu ručiček hodinových a její posun tak, aby výslednice $R_{3,4}$ byla zrušena silou F_2 a paprsek síly F_1 se ztotožnil s paprskem F_5 (obr. 2.25 b).
Velikost síly



Obr. 2.27.

$\underline{\underline{F_2 = F_1 = 519,6 \text{ kN}}}$, rameno $\underline{\underline{r = 0,5 \text{ m}}}$.

P ř í k l a d 2.20. Je dána soustava sil $F_1 = F_2 = 300$ kN, $F_3 = 600$ kN, $\beta = 45°$, která působí dle obr. 2.28 a. Zjistěte:
a) velikost, směr a smysl výslednice $R_{1,3}$
b) polohu paprsku jediné síly R přidáme-li k dané soustavě moment $M = -3000$ kNm.



Obr. 2.28.

Výslednice $R_{1,2} = \sqrt{2 \cdot 300^2} = 300\sqrt{2}$ kN

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-300}{300\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha_{1,2} = 45° \text{ - 2.kvadrant}$$

$R_{1,2}$ je rovnoběžná se silou F_3, jejich výslednice bude opět rovnoběžná a její velikost

$$\underline{\underline{R_{1,3}}} = 300\sqrt{2} + 600 = \underline{\underline{1024,26 \text{ kN}}}$$
$$\alpha_{1,3} = 45°$$

Z momentové věty určíme její polohu, a to buď běžným způsobem pomocí ramen kolmých k paprskům sil nebo použitím svislých složek sil v průsečících s osou x, čímž určíme x-ovou souřadnici průsečíku x_R výslednice $R_{1,3}$ (čerchovaně).
Momentovou větu napíšeme např. k počátku:

$$F_3 \cdot \sin\beta \cdot 4 = R_{1,3} \cdot \sin\alpha_{1,3} \cdot x_R \qquad \underline{\underline{x_R}} = \frac{4 \cdot 600}{1024,26} = \underline{\underline{2,343 \text{ m}}}$$

Kolmá vzdálenost p od počátku je:

$$\underline{\underline{p}} = x_R \cdot \sin\alpha_{1,3} = 2,343 \cdot 0,7071 = \underline{\underline{1,66 \text{ m}}}$$

b) Nahrazením momentu M dvojicí sil velikosti $R_{1,3}$ (obr. 2.28 b) určíme rameno r.

$$\underline{\underline{r}} = \frac{|M|}{1024,26} = \frac{3000}{1024,26} = \underline{\underline{2,93 m}}$$

Dvojici sil posuneme tak, abychom zajistili posun výslednice $R_{1,3}$ do nového paprsku, ve kterém působí jediná síla nahrazující soustavu $R_{1,3}, M$ - síla $R = R_{1,3}$.

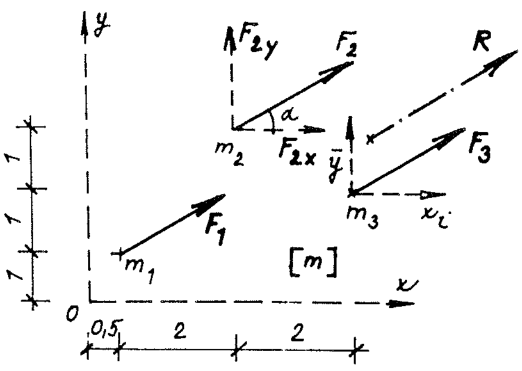
Příklad 2.21. V bodech m_1, m_2, m_3 působí rovnoběžné síly F_1, F_2 a F_3 pod úhlem $\alpha = 30°$ dle obr. 2.29.

$F_1 = -100$ kN, $F_2 = 200$ kN, $F_3 = 300$ kN

Výslednice R bude mít směr složek: $\alpha_R = \alpha$

velikost bude: $R = \sum_{i=1}^{3} F_i = \underline{\underline{400 \text{ kN}}}$

Její působiště určíme z momentové věty (2.8). Směr, smysl a předpokládané působiště naznačíme v situaci sil (čerchovaně). Momentovou větu můžeme aplikovat k počátku nebo k libovolnému bodu např. m_3. Momenty složek sil budou:



Obr. 2.29.

$$\curvearrowleft m_1: -\sum_{i}^{3} F_i \cos\alpha_i\, y_i + \sum_{i}^{3} F_i \sin\alpha_i\, x_i = -R\cos\alpha\, y_R + R\sin\alpha\, x_R$$

po úpravě obecně:

$$\left(R y_R - \sum_{i}^{3} F_i y_i\right)\cos\alpha = \left(R x_R - \sum_{i}^{3} F_i x_i\right)\sin\alpha \qquad (2.16)$$

obě strany se mohou rovnat jen tehdy, budou-li výrazy v obou závorkách rovny nule.

$$R y_R - \sum F_i y_i = 0 \qquad\qquad R x_R - \sum F_i x_i = 0 \quad \text{odkud}$$

$$\boxed{y_R = \frac{\sum F_i y_i}{R}} \qquad\qquad \boxed{x_R = \frac{\sum F_i x_i}{R}} \qquad (2.17)$$

Souřadnice působiště R jsou platné pro jakékoliv α a jsou vztaženy k zvolenému bodu (m_1). Budeme-li nadále interpretovat čitatele (2.17) jako statické momenty k zvolenému bodu, je třeba si uvědomit, že goniometrické funkce ve složkách se krátí a že pořadnice x_i, y_i, x_R, y_R jsou rovnoběžné s osami x a y, zatímco F_i a R působí pod úhlem α.

Je obvyklé volit souřadnicový systém tak, aby jedna z os byla rovnoběžná s paprsky sil a momentovou větu psát vzhledem k počátku. Pak ve výrazu (2.16) je hodnota jedné z goniometrických funkcí nulová a druhá je rovna jedné, takže vlastně aplikujeme přímo výrazy (2.17).

Při vyčíslení příkladu zvolme např. jako střed momentů bod m_3. Výrazy (2.17) rozepíšeme s ohledem na znaménka vzhledem k bodu m_3.

$$\curvearrowleft m_3: \; -R\cos\alpha\, \bar{y}_R = -F_2\cos\alpha\cdot 1 + F_1\cdot\cos\alpha\cdot 1 \qquad \bar{y}_R = \frac{-200-100}{-400} = \underline{\underline{0{,}75 \text{ m}}}$$

$$R\cdot\sin\alpha\, \bar{x}_R = -F_2\sin\alpha\cdot 2 - F_1\cdot\sin\alpha\cdot 4 \qquad \bar{x}_R = \frac{-400+400}{400} = \underline{\underline{0}}$$

Řešení ověříme pootočením soustavy o 60° proti chodu ručiček hodinových. Soustava bude rovnoběžná s osou y. Souřadnice statického středu určíme vzhledem k počátku z druhého ze vztahů (2.17) bude

$$R\cdot x_R = F_1 x_1 + F_2\cdot x_2 + F_3\cdot x_3 \;; \quad x_R = \frac{1}{400}(-100 \cdot 0{,}5 + 200 \cdot 2{,}5 + 300 \cdot 4{,}5) = \underline{\underline{4{,}5 \text{ m}}}$$

Pootočením původní soustavy o 30° po chodu ručiček hodinových dostáváme soustavu vodorovných sil, pro níž určíme y-ovou souřadnici statického středu.

$$-R y_R = -F_1\cdot 1 - F_2\cdot 3 - F_3\cdot 2 \;; \qquad y_R = \frac{1}{400}\, 1100 = \underline{\underline{2{,}75 \text{ m}}}$$

Je zřejmé, že souřadnice statické středu se shodují v obou případech.