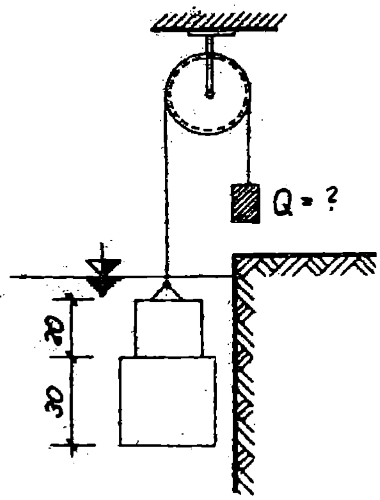
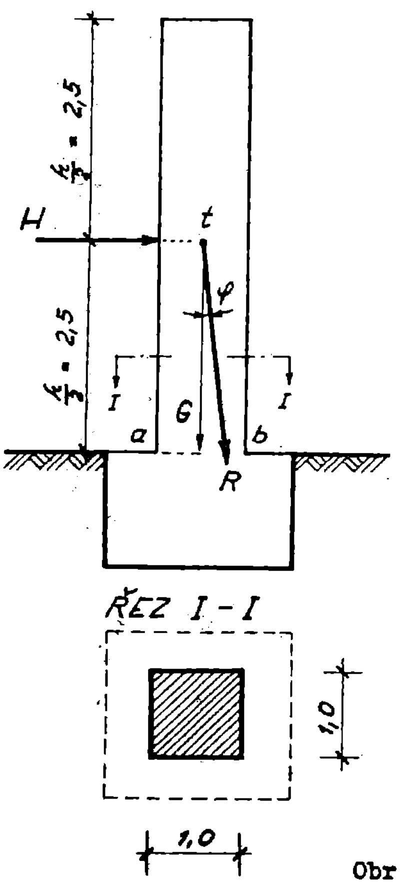
Příklad 8

Jak velkou tíhovou silou Q je možno uvést do rovnováhy těleso, zavěšené na laně přes kladku, je-li tvořeno dvěma žulovými kostkami o rozměrech 30/30/30cm a 20/20/20 cm /obr. 18/? Obě kostky jsou ponořeny ve vodě a mají objemovou /měrnou/ hmotu 2500 kg/m^3. Tření lana na kladce a váhu zavěšeného lana zanedbáváme.

Odpověď: $Q = 52{,}50\ kp\ (\downarrow)$



Obr. 18



Obr.23

Příklad 9.

O cihelný pilíř průřezu 1,0 x 1,0 m a výšky $h = 5\ m$ se opírá vodorovně vítr velikostí 150 kp/m^2 /obr.23/. Stanovte výsledný účinek na spáru pilíře $a - b$, je-li měrná hmota cihelného zdiva $\rho = 1700\ kg/m^3$!

Analytické řešení

Spára $a - b$ je namáhána silou R, která představuje výslednici z tíhy pilíře G a tlaku větru H. G působí svisle v těžišti t pilíře a H vodorovně v jedné polovině výšky pilíře.

$$G = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 1700 = 8500\ kp$$

$$H = 1{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot 150 = 750\ kp$$

Výslednice R má velikost

$$R = \sqrt{8500^2 + 750^2} = 8533\ kp$$

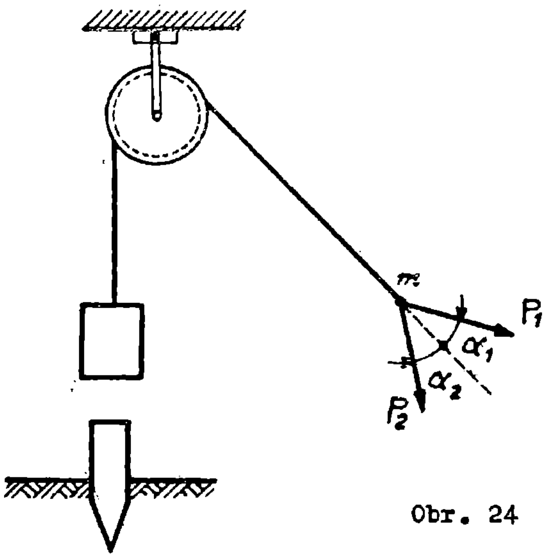
a je odkloněna od svislice o úhel φ

$$\sin\varphi = \frac{H}{R} = \frac{750}{8533} = 0{,}0879$$

$$\varphi = 5°03'$$

Příklad 10.

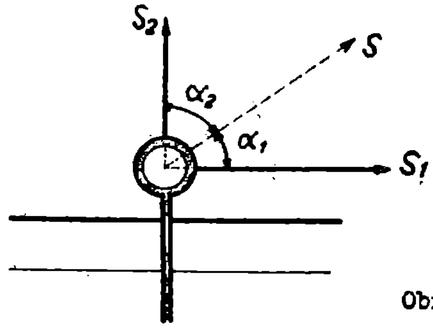
Tažné lano beranidla táhnou dva muži stejnými silami $P_1 = P_2 = 30\ kp$ odchýlenými od směru lana o úhel $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ /obr.24/. Jakou výslednou sílu R vyvinou na tažné lano ?



Obr. 24

Odpověď

Výsledná síla R má velikost 51,75 kp a její směr je souhlasný se směrem lana v bodě m .



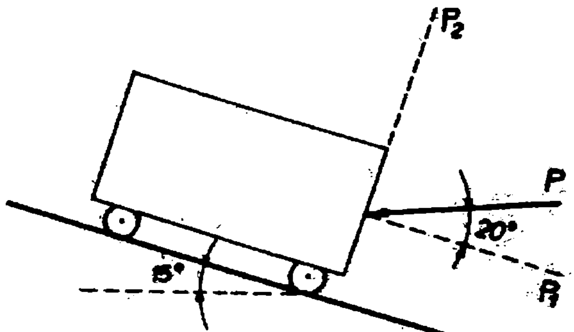
Obr. 25

Příklad 11.

Hák je tažen silami $S_1 = 86{,}6$ kp a $S_2 = 50$ kp navzájem kolmými /obr.25/. Stanovte výslednou tažnou sílu !

Odpověď

$S = 100\ kp$; $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 60°$



Obr. 31

Příklad 15

Vozík na nakloněné rovině je tlačen silou $P = 426$ kp /obr. 31/. Proveďte nahrazení síly P dvěma složkami, z nichž jedna P_1 je rovnoběžná a druhá P_2 kolmá k nakloněné rovině !

Odpověď

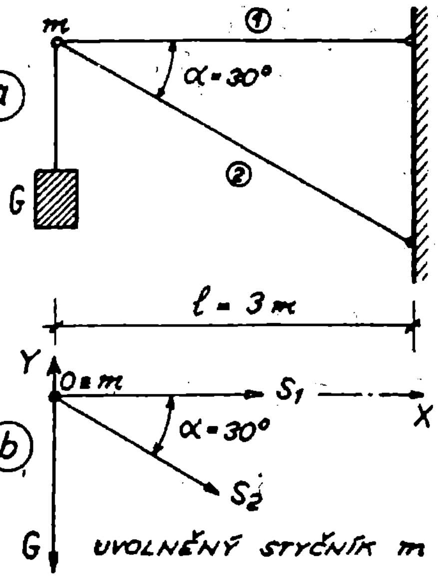
$P_1 = 400\ kp\ (\leftarrow)$; $P_2 = 145{,}6\ kp\ (\downarrow)$

Příklad 19

Stanovte osové síly v prutech 1 a 2 dané konstrukce na obr. 37, zatížené v uzlu - styčníku m břemenem G = 300 kp !

Analytické řešení

Styčník m uvolníme /obr. 37b/. Uvolnit styčník znamená odstranit všechny části konstrukce, jež jsou styčníkem spojeny /v našem případě pruty 1,2/ a jejich účinek na styčník nahradit příslušnými osovými silami. Předem ovšem nevíme, zda budou pruty 1 a 2 namáhány tlakem či tahem, budou-li tedy jejich osové síly S_1 a S_2 mířit do styčníku či ze styčníku. Při analytickém řešení předpokládáme vždy ve vyšetřovaném prutu tah /obr. 37b/. Správné znaménko a tím i druh namáhání prutu nám vyjde z numerického řešení. Vyjde-li znaménko ⊕ , náš předpoklad je správný a prut je tažen; při znaménku ⊖ musíme předpokládaný smysl změnit - síla míří do styčníku a prut je tlačen.



Obr. 37

Po uvolnění styčníku m , dostáváme rovnováhovou soustavu sil působící v rovině na bod m , pro kterou můžeme napsat dvě podmínky rovnováhy ve tvaru

$$\sum P_{ix} = 0 : S_1 \cos 0° + S_2 \cos 330° + G \cos 270° = 0$$

$$\sum P_{iy} = 0 : S_1 \sin 0° + S_2 \sin 330° + G \sin 270° = 0$$

a nebo výhodněji pomocí ostrých úhlů

$$S_1 + S_2 \cos 30° = 0$$

$$-S_2 \cdot \sin 30° - G = 0 ,$$

jejichž řešením dostáváme

$$S_2 = -\frac{G}{\sin 30°} = -\frac{300}{0,5} = -600 \text{ kp } (\text{tlak});$$

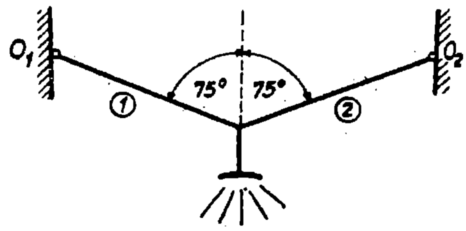
$$S_1 = -S_2 \cos 30° = 600 . 0,866 = 519,6 \text{ kp } (\text{tah})$$

Příklad 22.

Pouliční lampa tíhy G = 40 kp je zavěšena na dvou lanech /obr.38/. Stanovte síly namáhající lano !

Odpověď

$S_1 = S_2 = 77,60$ kp /tah/



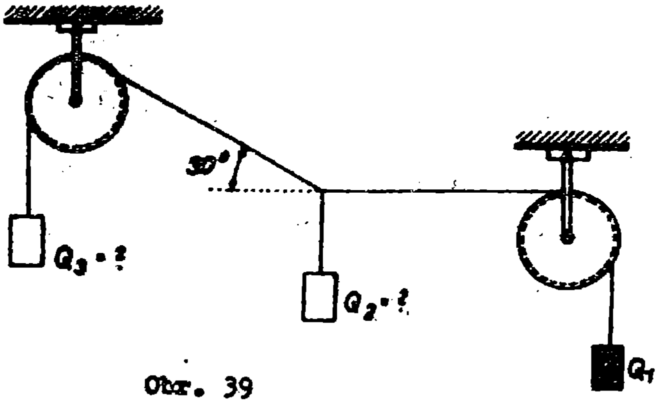
Obr. 38

Příklad 23

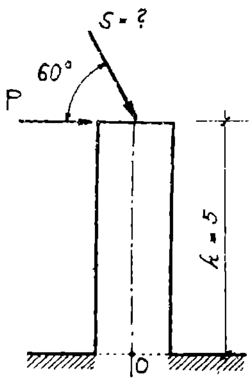
Stanovte velikost závaží Q_2 a Q_3 u mechanismu na obr. 39, která mají být v rovnováze se závažím Q_1 = 100 kp při nakreslené poloze lan! Tření lana na kladce a rovněž tření čepové zanedbáváme.

Odpověď

$Q_2 = 58$ kp ; $Q_3 = 116$ kp



Obr. 39



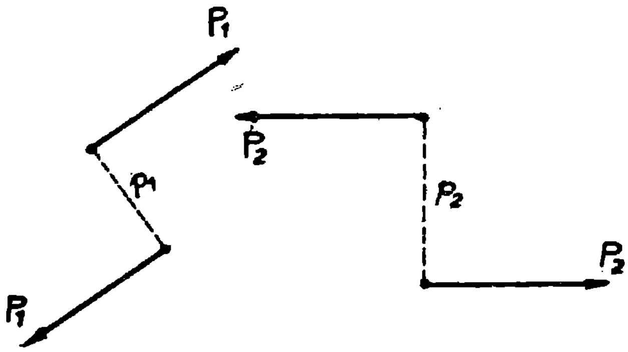
Obr.46

Příklad 27

Na železobetonový vetknutý sloup /obr.46/ působí síla P = 1 Mp. Jak velká by musela být síla S, aby vyvodila ve vetknutí O stejný moment jako síla P?

Odpověď:

$$S = 2 \ Mp$$



Obr. 51

Příklad 29

Složte dvě dvojice sil, působící v jedné rovině, ve výslednou dvojici sil, jejíž jedna síla R = 2 Mp /obr.51/! Dáno: P_1 = 1 Mp, p_1 = 3 m a P_2 = 1,5 Mp, p_2 = 6 m.

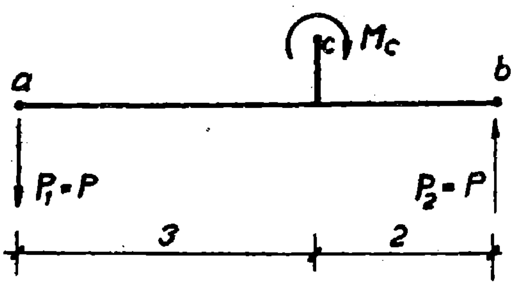
Řešení

Výsledný moment silových dvojic má dle odstavce 10.3. hodnotu

$$M_r = -1.3 + 1,5.6 = 6 \ Mpm$$

a lze ho nahradit dle poučky 3 dvojicí sil (↶) o R = 2 Mp a rameni r

$$M_r = R.r \Rightarrow r = \frac{M_r}{R} = \frac{6}{2} = 3 \ m$$



Obr. 52

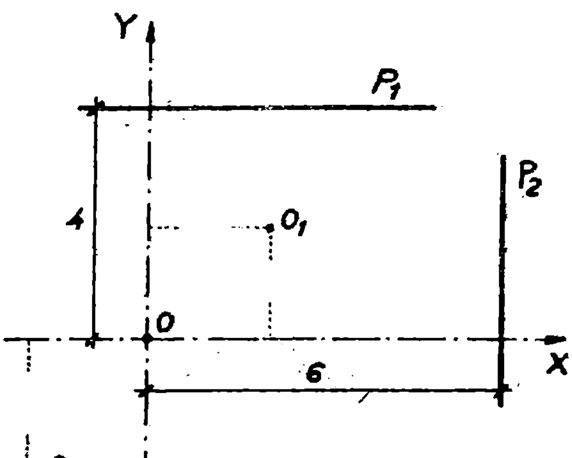
Příklad 30

Stanovte výsledný účinek daného zatížení na prutu dle obr. 52 pro $P_1 = P_2 = P$ = 1 Mp a M_C = 2 Mpm!

Řešení

Výsledný účinek daného zatížení je moment M_r [dvojice sil]

$$M_r = P.p - M_C = 1.5 - 2 = 3 \ Mpm \ (↶)$$



Obr. 63

Příklad 41

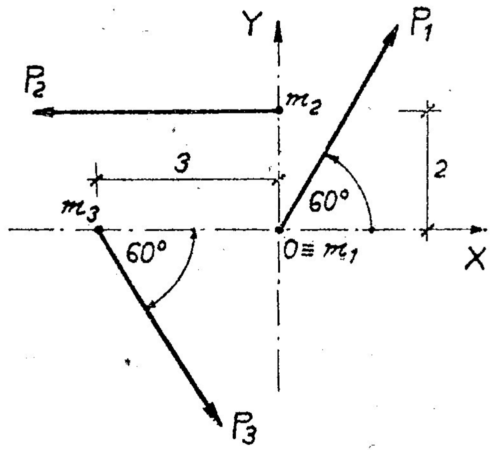
Jsou dány paprsky sil P_1, P_2 /obr.63/ a dva body O_1 (2;2), O_2 (-2;-4). Určete velikost a smysl sil P_1 a P_2 tak, aby daná soustava dvou sil měla k bodům O_1 a O_2 statické momenty M_{O_1} = 60 kpm a M_{O_2} = 80 kpm!

Odpověď:

P_1 = 10 kp (→); P_2 = 20 kp (↑)

Příklad 35

Stanovte výsledný účinek soustavy sil /obr.58/ $P_1 = P_2 = P_3 = 1000$ kp!



Obr. 58

Analytické řešení

Průměty výslednice do souřadných os

$$R_x = \sum_{i=1}^{3} P_i \cos \alpha_i' = 1000 \cdot 0{,}5 - 1000 + 1000 \cdot 0{,}5 = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} P_i \sin \alpha_i' = 1000 \cdot 0{,}866 + 0 - 1000 \cdot 0{,}866 = 0$$

Důsledek: $R = 0$

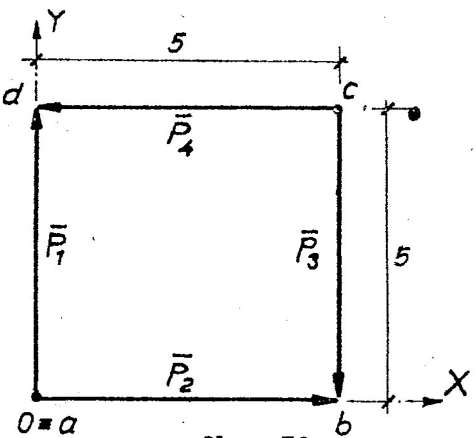
Statický moment soustavy sil k počátku souřadnic 0

$$M_0 = \sum_{i=1}^{3} (P_{iy} \cdot x_i - P_{ix} \cdot y_i) = - P_{2x} \cdot y_2 + P_{3y} \cdot x_3 = -(-1000) \cdot 2 + (-1000 \cdot 0{,}866) \cdot (-3) = 4598 \text{ kpm}$$

Výsledný účinek dané soustavy sil není posuvný - síla, ale otočný - moment M_0

Příklad 36

Síly P_1, P_2, P_3 a P_4 mají stejnou velikost 5 Mp, leží ve stranách čtverce a jejich smysl je zobrazen na obr. 59. Stanovte jejich výslednici, je-li strana čtverce a = 5 m!



Obr. 59

Početní řešení

$$R_x = \sum_{i=1}^{4} P_{ix} = P_2 - P_4 = 5 - 5 = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{4} = P_1 - P_3 = 5 - 5 = 0$$

$$R = 0$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^{4} P_i p_i = - P_3 \cdot 5 + P_4 \cdot 5 = - 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 0$$

Daná soustava sil je v rovnováze /viz rov.39/. Rovnovážný stav dané silové soustavy lze rovněž prokázat podmínkami rovnováhy /40/

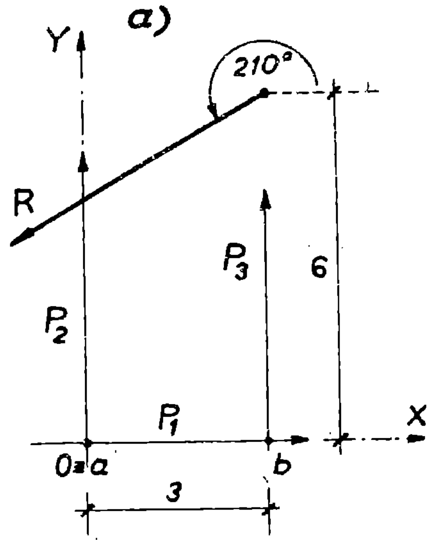
$$\sum_{i=1}^{4} P_{ix} = 0 : P_2 - P_4 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{4} M_{ia} = 0 : - P_3 \cdot 5 + P_4 \cdot 5 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_{ia} = 0 : - P_3 \cdot 5 + P_4 \cdot 5 = 0 \quad \text{nebo} \quad \sum_{i=1}^{4} M_{ib} = 0 : - P_1 \cdot 5 + P_4 \cdot 5 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} M_{ib} = 0 : - P_1 \cdot 5 + P_4 \cdot 5 = 0 \qquad \sum_{i=1}^{4} M_{ic} = 0 : - P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 5 = 0$$

Příklad 43

Sílu R = 5 Mp nahraďte třemi silami P_1, P_2 a P_3 jsou-li známy paprsky, v nichž působí /obr.66a/!



Obr. 66

Analytické řešení

Zvolme souřadné osy X, Y dle obr.66a a ~~smysl~~ neznámých sil předpokládejme souhlasný s kladnými osami X, Y. Pro danou soustavu sil lze napsat 3 statické rovnice

$$\sum_{i=1}^{3} P_{ix} = R_x : P_1 \cos 0° + P_2 \cos 90° + P_3 \cos 90° = R \cos 210°$$

$$\sum_{i=1}^{3} P_{iy} = R_y : P_1 \sin 0° + P_2 \sin 90° + P_3 \sin 90° = R \sin 210°$$

$$\sum_{i=1}^{3} M_{io} = M_{Ro} : P_3 \sin 90° . 3 = R . \sin 210° . 3 - R \cos 210° . 6$$

po dosazení a úpravě

$$P_1 = -4,33 \qquad P_2 + P_3 = -2,50 \qquad 3P_3 = 18,48$$

řešení:

$$P_1 = -4,33 \text{ Mp } (\leftarrow) \qquad P_2 = -8,66 \text{ Mp } (\downarrow) \qquad P_3 = 6,16 \text{ Mp } (\uparrow)$$

S použitím momentových výminek dle obr.66a dostaneme snadněji a rychleji

$$P_3 \ldots a\ (P_1 \times P_2)$$

$$M_a = P_3 . 3 = R \sin 210° . 3 - R \cos 210° . 6$$

$$P_3 = \frac{1}{3}[5.(-0,5).3 - 5(-0,866).6] = 6,16 \text{ Mp } (\uparrow)$$

$$P_2 \ldots b\ (P_1 \times P_3)$$

$$M_b = -P_2 . 3 = R \sin 210° . 0 - R \cos 210° . 6$$

$$P_2 = \frac{1}{3}[5(-0,866).6] = -8,66 \text{ Mp } (\downarrow)$$

$$P_1 \ldots \infty\ (P_2 \times P_3) \ldots \Rightarrow \sum P_{ix} \quad \text{neboť } X \perp P_2, P_3$$

$$\sum P_{ix} = P_1 = R \cos 210° \quad \text{odtud: } P_1 = 5(-0,866) = -4,33 \text{ Mp } (\leftarrow)$$

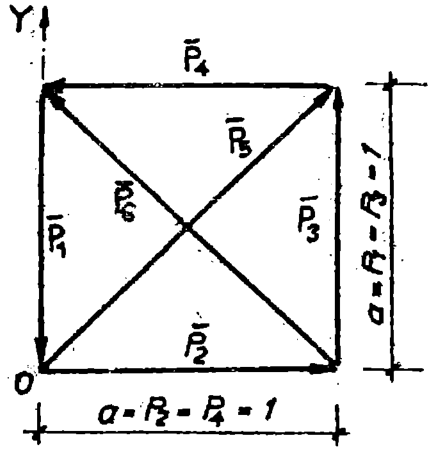
Příklad 38

Stanovte výslednici R soustavy šesti sil /obr.61/ působících ve stranách a diagonálách čtverce, jejichž velikosti jsou dány délkami příslušných úseček čtverce!

<u>Odpověď:</u>

$$R = R_y = 2\,Mp;\quad \alpha = 90°;$$

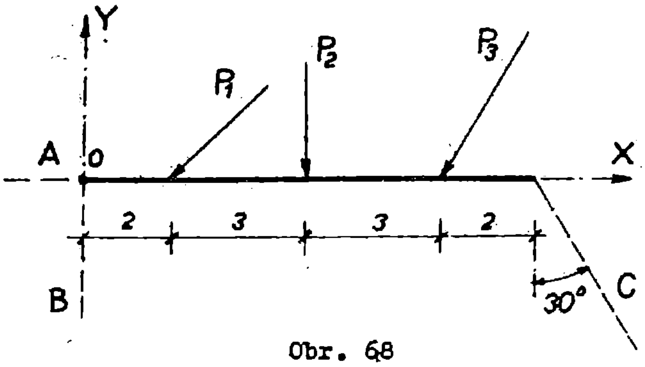
$$M_o = 3\,Mpm;\quad r = 1{,}5\,m$$



Obr. 61

Příklad 45

Rozložte výslednici dané soustavy sil /obr.68/, působící ve svislé rovině na vodorovný nosník, do tří složek, jejichž paprsky jsou dány, pro $P_1 = 4$ Mp, $\alpha_1 = 225°$; $P_2 = 3$ Mp, $\alpha_2 = 270°$; $P_3 = 3{,}5$ Mp, $\alpha_3 = 240°$!



Obr. 68

<u>Odpověď:</u>

$$A = 7{,}17\,Mp\,(\leftarrow);\quad B = 4{,}36\,Mp\,(\downarrow);$$

$$C = 5{,}18\,Mp\,(\searrow)$$

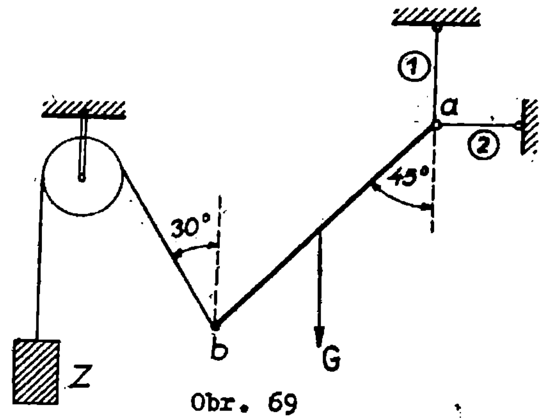
Příklad 46

Tuhý nosník $\overline{ab}$ tíhy $G = 100$ kp je upevněn ke zdi pomocí dvou prutů a udržuje se pod úhlem 45° ke svislici pomocí lana, vedeného přes kladku a nesoucího závaží Z /obr.69/. Stanovte velikost závaží Z a osové síly S_1, S_2 v prutech 1, 2, svírá-li napnuté lano se svislicí úhel 30° a zanedbáváme-li tření lana na kladce!

<u>Odpověď:</u>

$$Z = 36{,}6\,kp;\quad S_1 = 68{,}3\,kp\,(\uparrow);$$

$$S_2 = 18{,}4\,kp\,(\rightarrow)$$



Obr. 69

Příklad 44

Stanovte početně i graficky osové síly v prutech 1, 2, 3, na nichž je zavěšen vodorovný nosník zatížený břemenem R = 5 Mp /obr.67/ pro $\alpha_2 = 135^\circ$ a $\alpha_3 = 30^\circ$!

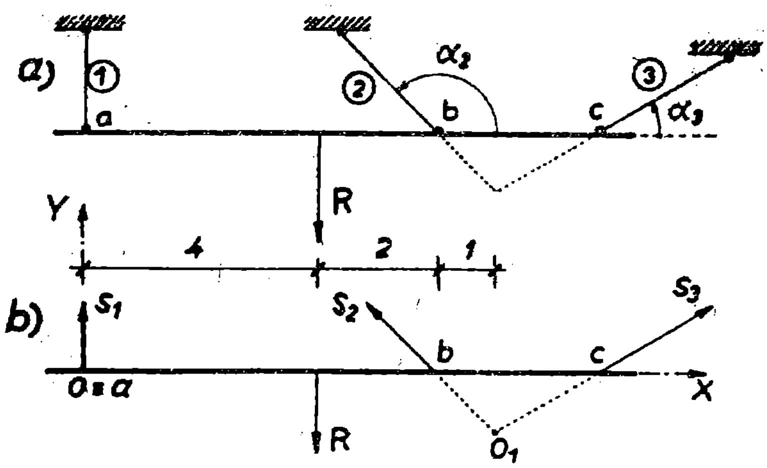
Analytické řešení

Po uvolnění nosníku z vazeb - prutů /obr.67/ dostáváme rovnováhovou soustavu sil působící v rovině porůznu, pro kterou můžeme napsat tři statické podmínky rovnováhy

$$\sum P_{ix} = 0: \; S_2 \cos 135^\circ + S_3 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum P_{iy} = 0: \; S_1 + S_2 \sin 135^\circ + S_3 \sin 30^\circ - R = 0$$

$$\sum M_{iO_1} = 0: \; -S_1 \cdot 7 + R \cdot 3 = 0$$



Obr. 67

Třetí rovnice momentová musí být splněna nejen pro zvolený počátek O souřadného systému, ale pro libovolný bod roviny. Zde byl s výhodou použit momentový střed O_1, tvořený průsečíkem paprsků sil S_2 a S_3. Po dosazení a úpravě má soustava rovnic tvar

$$-0{,}707 S_2 + 0{,}866 S_3 = 0$$

$$S_1 + 0{,}707 S_2 + 0{,}500 S_3 = 5$$

$$S_1 \cdot 7 = 15$$

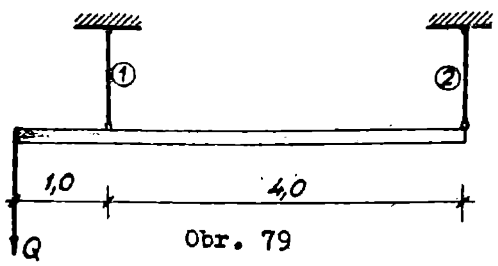
a řešení: $S_1 = 2{,}14$ Mp; $S_2 = 2{,}58$ Mp; $S_3 = 2{,}10$ Mp

Předpokládaný smysl sil S_1, S_2 a S_3 na obr. 67b je správný, neboť řešením vyšla jejich znaménka kladná.

Příklad 53

Stanovte osové síly v tuhých ocelových prutech nesoucích vodorovný nosník, zatížený břemenem Q = 500 kp /obr.79/!

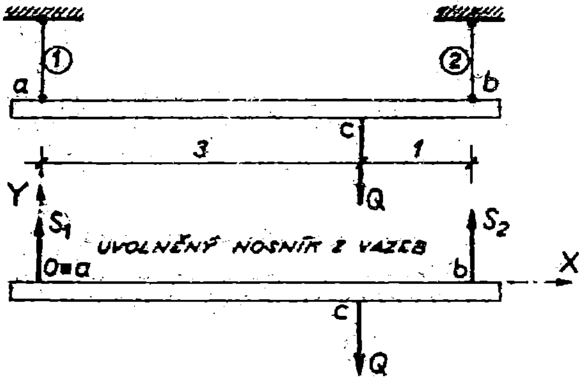
Odpověď: S_1 = 625 kp (tah);
S_2 = - 125 kp (tlak)



Obr. 79

Příklad 49

Stanovte osové síly v prutech 1 a 2, na nichž je zavěšen vodorovný nosník, zatížený břemenem $Q = 800$ kp /obr. 75/!



Obr. 75

Analytické řešení

Nosník uvolníme z vazeb - prutů a účinek prutů na nosník nahradíme příslušnými osovými silami S_1 a S_2, o nichž předpokládáme, že jsou tahové [míří od nosníku]. Po uvolnění nosníku z vazeb tvoří zatížení tj. břemeno Q a osové síly S_1, S_2 v prutech 1, 2, rovnovážnou soustavu rovnoběžných sil v rovině, pro kterou můžeme napsat 2 statické podmínky rovnováhy /50/

$$1)\quad S_1 + S_2 - Q = 0$$

$$2)\quad S_2 . 4 - Q . 3 = 0,$$

jejichž řešením dostáváme

$$S_2 = \frac{3}{4} Q = 600\,kp\,(\uparrow);\; S_1 = Q - S_2 = 800 - 600 = 200\,kp\;(\uparrow)$$

Předpokládaný smysl sil S_1 a S_2 je správný. Místo statických podmínek rovnováhy /50/ lze s výhodou použít výminek momentových k momentovým středům a, b

$$1)\;\sum M_{ia} = 0 : S_2 . 4 - Q . 3 = 0 \Rightarrow S_2 = 600\,kp\,(\uparrow),$$

$$2)\;\sum M_{ib} = 0 : -S_1 . 4 + Q . 1 = 0 \Rightarrow S_1 = 200\,kp\,(\uparrow),$$

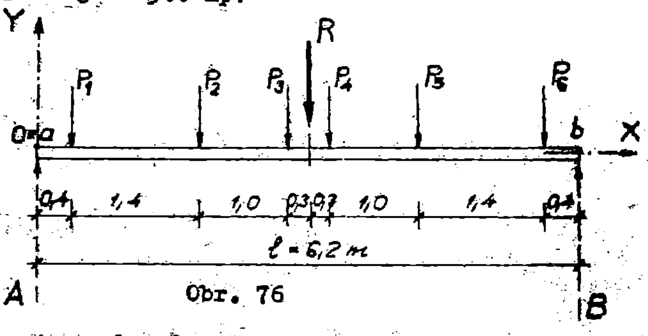
ležících na paprscích sil S_1 a S_2.

Kontrola:

$$\sum P_{iy} = 0 : S_1 + S_2 - Q = 200 + 600 - 800 = 0$$

Příklad 50

Zrušte soustavu svislých sil P_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ působících na vodorovný nosník /obr. 76/ dvěma silami A, B v daných paprscích pro $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 500$ kp!



Obr. 76

Analytické řešení

Předem zvolíme opět smysl neznámých sil A, B dle obr. 76. Jejich velikost a správný smysl stanovíme z podmínek rovnováhy /50/

$$A + B - \sum_{i=1}^{6} P_i = 0$$

$$M_{ia} = B . \ell - \sum_{i=1}^{6} P_i p_i = 0$$

Po dosazení a úpravě

$$A + B - 6 . 500 = 0 \Rightarrow \quad A + B = 3000$$

$$B . 6{,}2 - 500 (0{,}4 + 1{,}8 + 2{,}8 + 3{,}4 + 4{,}4 + 5{,}8) = 0 \Rightarrow 6{,}2 B = 500 . 18{,}6$$

Řešení: $B = 1500\,kp\,(\uparrow)$; $A = 1500\,kp\,(\uparrow)$

Složky A, B lze stanovit velmi snadno využitím symetrie zatížení na nosníku. Výslednice zatížení

$$R = \sum_{i=1}^{6} P_i = -6 . 500 = -3000\,kp\,(\downarrow)$$

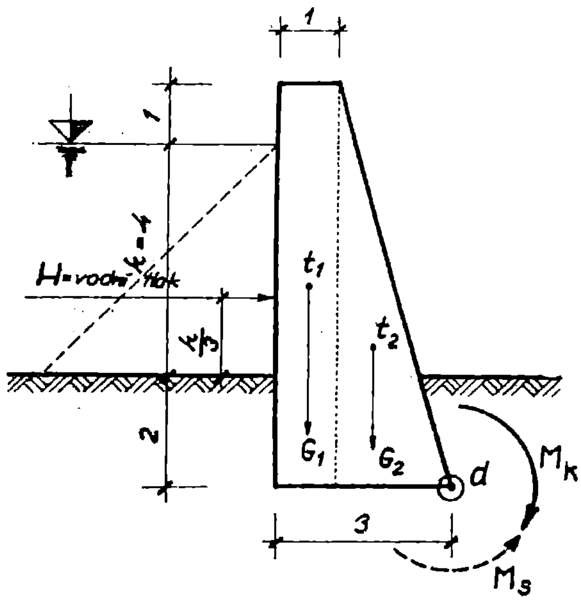
leží v ose symetrie nosníku a její účinek bude zrušen silami

$$A = B = -0{,}5 R = 1500\,kp\;(\uparrow)$$

mající opačný smysl než R.

Příklad 25.

Stanovte stupeň bezpečnosti s proti překlopení betonové hráze zachycující tlak vody, je-li měrná hmota betonu $\rho_b = 2400\ kg/m^3$ a vody $\rho_v = 1000\ kg/m^3$ /obr.44/! Odpor zeminy zanedbáváme.



Obr. 44

Řešení

Pro řešení uvažujeme pruh hráze o šířce $s^{\nu} = 1{,}0$ m, jehož celková tíha G je dána součtem dílčích tíh G_1 a G_2

$$G_1 = 1.7.1.1.2400 = 16\,800\ kp$$

$$G_2 = 2.7.0{,}5.1.2400 = 16\,800\ kp$$

$$G = G_1 + G_2 = 2.16\,800\ kp = 33\,600\ kp$$

Vodní tlak, který je zachycován tímto prutem, má hodnotu

$$H = \frac{1}{2}\cdot h^2 \cdot s^{\nu}\cdot \rho_v = \frac{1}{2}\cdot 4^2 . 1.1000 = 8000\ kp$$

a působí ve výšce $\frac{h}{3}$ ode dna.

Síla H se snaží převrhnout hráz kol hrany d klopícím momentem M_K

$$M_K = -H\left(\frac{h}{3}+2\right) = -8000(1{,}33+2) = -26640\ kpm$$

Převržení hráze brání její vlastní tíha + zv. momentem stability M_S k bodu d

$$M_S = G_1 x_1 + G_2 x_2 = 16\,800.2{,}5 + 16\,800.1{,}33 = 64\,350\ kpm$$

Stupeň bezpečnosti hráze proti překlopení je dán poměrem momentu stability a momentu klopícího

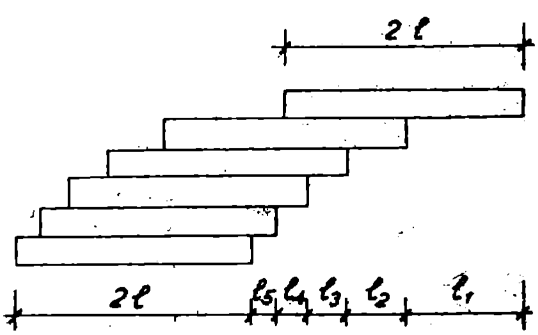
$$s = \frac{M_S}{M_K} = \frac{64\,300}{26\,640} = 2{,}41 > 2{,}0$$

Příklad 54

Šest stejných desek délky 2ℓ je uloženo tak, že část každé desky přečnívá nad deskou spodní /obr.80/! Stanovte mezní délky přečnívajících částí, při kterých se bude soustava desek nacházet v rovnováze!

Odpověď:

Při řešení se postupně sčítávají tíhy desek. Délky přečnívajících částí dle obr 80 : $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = \frac{\ell}{2}$, $\ell_3 = \frac{\ell}{3}$, $\ell_4 = \frac{\ell}{4}$, $\ell_5 = \frac{\ell}{5}$.



Obr. 80