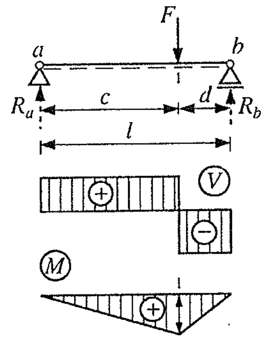
Tabulka 11.2. Průběhy N, V, M na prostém nosníku

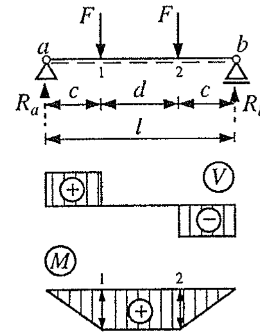
1



$R_a = V_a = \frac{Fd}{l}$, $R_b = -V_b = \frac{Fc}{l}$

$M_1 = M_{max} = \frac{Fcd}{l}$

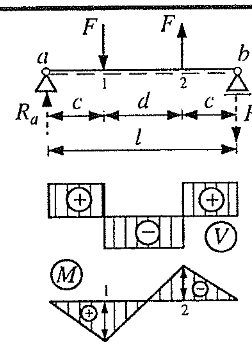
2



$R_a = V_a = F$, $R_b = -V_b = F$

$M_1 = M_2 = Fc$

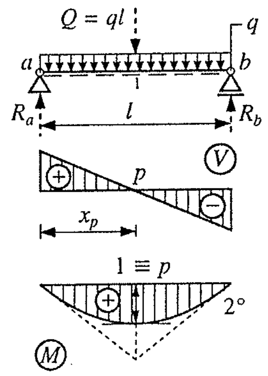
3



$R_a = R_b = \frac{Fd}{l} = V_a = V_b$

$M_1 = -M_2 = \frac{Fcd}{l}$

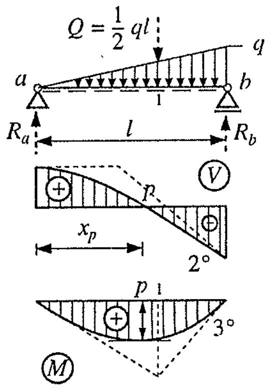
4



$R_a = V_a = \frac{1}{2}ql$, $R_b = -V_b = \frac{1}{2}ql$

$x_p = \frac{l}{2}$, $M_p = \frac{1}{8}ql^2$

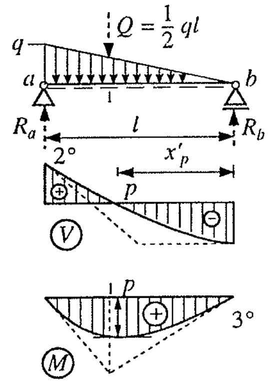
5



$R_a = V_a = \frac{1}{6}ql$, $R_b = -V_b = \frac{1}{3}ql$

$x_p = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $M_p = \frac{\sqrt{3}}{27}ql^2$

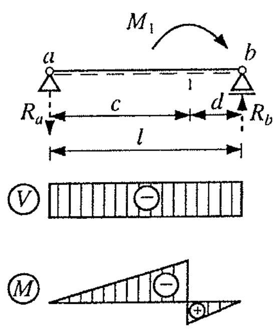
6



$R_a = V_a = \frac{1}{3}ql$, $R_b = -V_b = \frac{1}{6}ql$

$x'_p = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $M_p = \frac{\sqrt{3}}{27}ql^2$

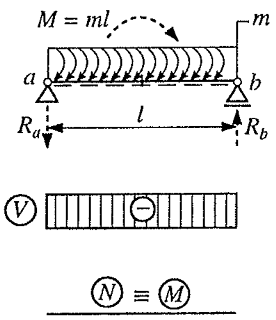
7



$R_a = R_b = \frac{M_1}{l}$, $V_a = V_b = -\frac{M_1}{l}$

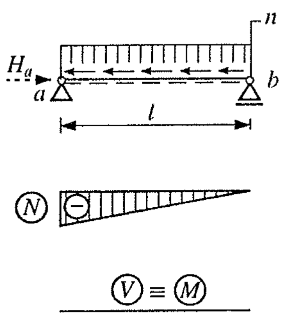
$M_{1a} = -\frac{M_1}{l}c$, $M_{1b} = \frac{M_1}{l}d$

8



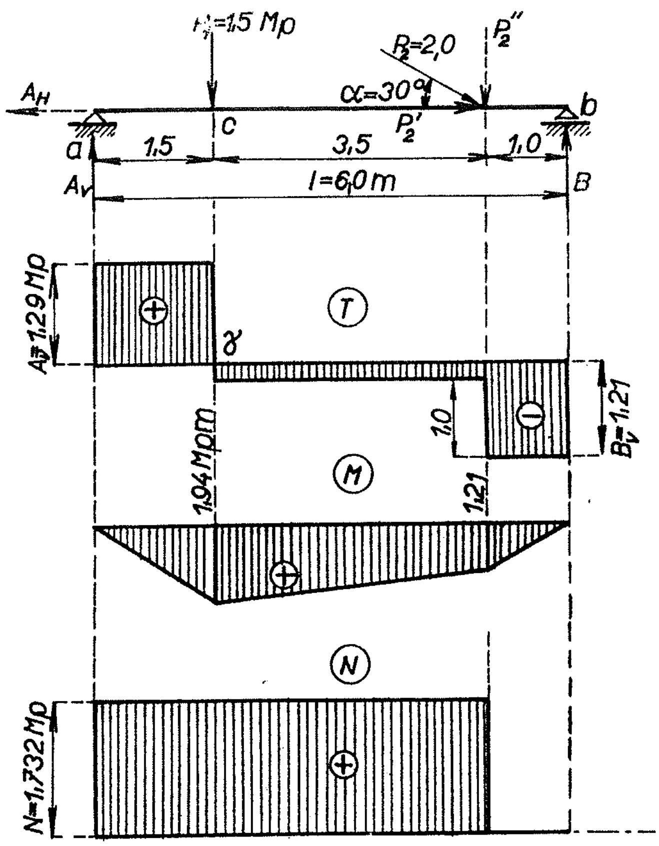
$R_a = R_b = m$, $V_a = V_b = -m$

9



$N_a = H_a = -nl$, $N_b = 0$

Príklad 80. Zistite momentový obrazec a obrazec priečnych a osových síl naznačeného jednoduchého nosníka *(obr. 80)*.



Obr. 80

Riešenie:

Keďže nosník je namáhaný nielen zvislými silami, lež aj vodorovnou zložkou sily P_2, v pevnej podpere a budeme mať aj vodorovnú zložku reakcie, ktorú vypočítame zo súčtovej podmienky rovnováhy vo vodorovnom smere:

$$A_H + P_2 \cos \alpha = 0$$

$$A_H = -2 \cos 30° = -2 \,.\, 0{,}866 = -1{,}732 \text{ Mp}$$

Zvislú zložku ľavej reakcie A_V vypočítame z rovnice

$$A_V \,.\, 6{,}0 - 1{,}5 \,.\, 4{,}5 - 2{,}0 \sin 30° \,.\, 1{,}0 = 0$$

$$A_V = \frac{6{,}75 + 1{,}0}{6{,}0} \doteq 1{,}29 \text{ Mp}$$

Pravú reakciu B určíme z momentovej podmienky k bodu a:

$$B \,.\, 6{,}0 - 2 \sin 30° \,.\, 5{,}0 - 1{,}5 \,.\, 1{,}5 = 0$$

$$B = \frac{5{,}0 + 2{,}25}{6{,}0} \doteq 1{,}21 \text{ Mp}$$

Vodorovná zložka ľavej reakcie A_H má záporné znamienko a čo do veľkosti sa rovná vodorovnej zložke sily P_2. Osová sila sa vyskytuje v našom prípade medzi ľavou podperou a pôsobiskom sily P_2, jej hodnota má kladné znamienko a čo do veľkosti

$$N = 1{,}732 \text{ Mp}$$

Ohybový moment pod bremenom P_1:

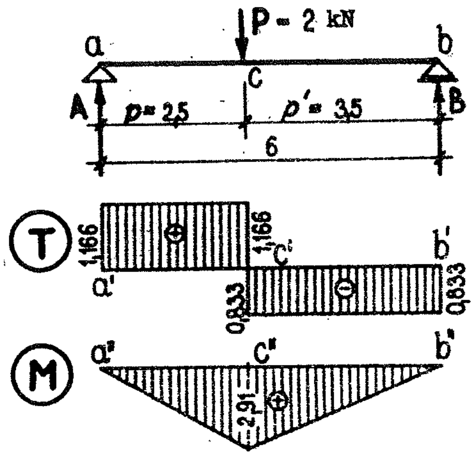
$$M_1 = A_V \,.\, 1{,}5 = 1{,}29 \,.\, 1{,}5 = 1{,}94 \text{ Mpm}$$

pod bremenom P_2:

$$M_2 = B \,.\, 1{,}0 = 1{,}21 \,.\, 1{,}0 = 1{,}21 \text{ Mpm}$$

Příklad 1

Prostý nosník zatížený jedním osamělým břemenem $P = 2$ kN podle obr. 23.



OBR. 23

a) Výpočet reakcí

$$A = \frac{P \cdot p'}{\ell} = \frac{2 \cdot 3{,}5}{6} = 1{,}166 \text{ kN}$$

$$B = \frac{P \cdot p}{\ell} = \frac{2 \cdot 2{,}5}{6} = 0{,}833 \text{ kN}$$

Kontrola:

Y: $A + B - P = 1{,}166 + 0{,}833 - 2 = 0$

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{ac} = A = 1{,}166$ kN

$T_{cb} = A - P = - B = - 0{,}833$ kN

c) Určení polohy přechodného průřezu

$A - P < 0$, $x_c = p = 2{,}5$ m

Přechodný průřez je pod břemenem P.

d) Výpočet ohybových momentů

$M_c = M_{max} = A \cdot x_c = 1{,}166 \cdot 2{,}5 = 2{,}91$ kNm

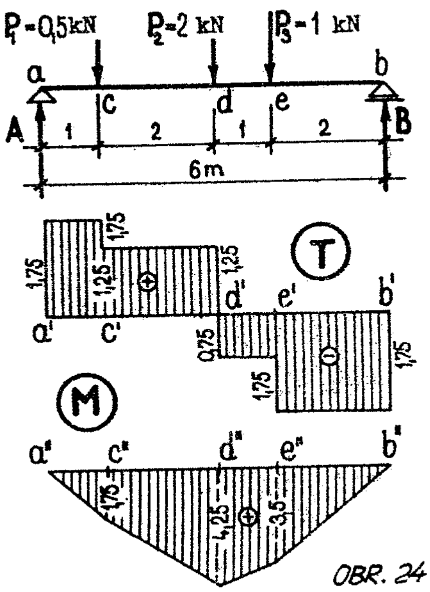
Poznámka: Je-li osamělé břemeno uprostřed nosníku, je $A = B = \frac{P}{2}$,

$$T_{ac} = A, \quad T_{cb} = -B, \quad M_c = \underline{M_{max}} = A\frac{\ell}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \boxed{\frac{1}{4} P\ell} \; \ldots \qquad \ldots (1.10)$$

Příklad 2

Prostý nosník zatížený soustavou tří svislých osamělých břemen podle obr. 24.

$P_1 = 0{,}5$ kN , $P_2 = 2$ kN , $P_3 = 1$ kN .



OBR. 24

a) Výpočet reakcí

$$A = \frac{0{,}5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{6} = 1{,}75 \text{ kN}$$

$$B = \frac{1{,}4 + 2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 1}{6} = 1{,}75 \text{ kN}$$

Kontrola:

$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 1{,}75 + 1{,}75 - 0{,}5 - 2{,}0 - 1 = 0$

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{ac} = A = 1{,}75$ kN

$T_{cd} = A - P_1 = 1{,}75 - 0{,}5 = 1{,}25$ kN

$T_{de} = T_{cd} - P_2 = - 0{,}75$ kN

$T_{eb} = T_{de} - P_3 = - B = - 1{,}75$ kN

c) Výpočet polohy přechodného průřezu

$A - P_1 - P_2 < 0$, $x_d = 3$ m

d) Výpočet ohybových momentů

$M_c = A \cdot 1 = 1{,}75$ kNm

$M_d = M_{max} = A \cdot 3 - P_1 \cdot 2 = 1{,}75 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 2 = 4{,}25$ kNm

$M_e = B \cdot 2 = 1{,}75 \cdot 2 = 3{,}5$ kNm

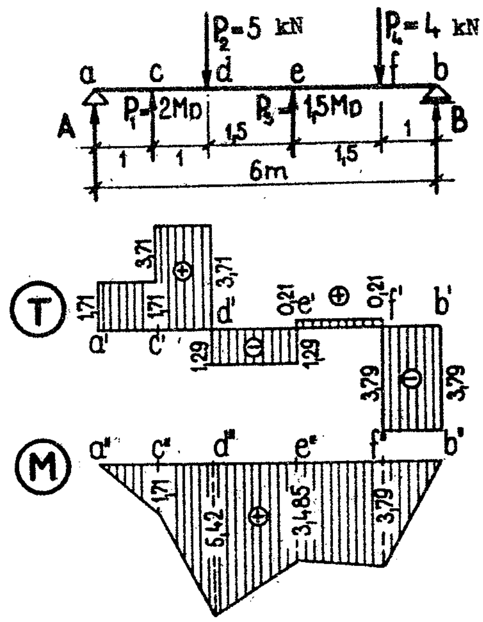
Příklad (3)

Prostý nosník zatížený soustavou čtyř svislých osamělých břemen, z nichž dvě působí směrem vzhůru podle obr. 25. $P_1 = 2$ kN, $P_2 = 5$ kN, $P_3 = 1,5$ kN, $P_4 = 4$ kN.

a) Výpočet reakcí

$$A = \frac{-2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 1,5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 1}{6} = 1,71 \text{ kN}$$

$$B = \frac{-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 1,5 \cdot 3,5 + 4 \cdot 5}{6} = 3,79 \text{ kN}$$



OBR. 25

Kontrola:

$A + B + P_1 - P_2 + P_3 - P_4 = 0$

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{ac} = A = 1,71$ kN

$T_{cd} = T_{ac} + P_1 = 1,71 + 2 = 3,71$ kN

$T_{de} = T_{cd} - P_2 = 3,71 - 5 = -1,29$ kN

$T_{ef} = T_{de} + P_3 = -1,29 + 1,5 = +0,21$ kN

$T_{fb} = T_{ef} - P_4 = 0,21 - 4,0 = -3,79 \text{ kN} = -B$

c) Na lomené momentové čáře jsou tři extrémní hodnoty v průřezech d, e, f.

d) $M_c = A \cdot 1 = 1,71 \cdot 1 = 1,71$ kNm

$M_d = 1,71 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 5,42$ kNm

$M_e = 1,71 \cdot 3,5 + 2 \cdot 2,5 - 5 \cdot 1,5 = 3,485$ kNm

$M_f = B \cdot 1 = 3,79$ kNm

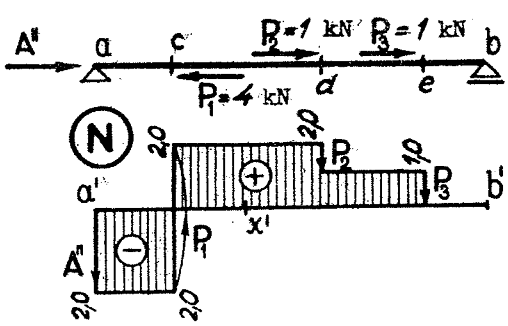
Příklad (4)

Prostý nosník zatížený soustavou tří osamělých břemen, působících v ose nosníku podle obr. 26. $P_1 = 4$ kN, $P_2 = 1$ kN, $P_3 = 1$ kN

a) Výpočet reakcí

$X: A'' - P_1 + P_2 + P_3 = 0$

$A'' = P_1 - P_2 - P_3 = 4 - 1 - 1 = 2$ kN



OBR. 26

b) Výpočet normálných sil

$N_{ac} = -A'' = P_3 + P_2 - P_1 = -2$ kN

$N_{cd} = -A'' + P_1 = P_3 + P_2 = +2$ kN

$N_{de} = -A'' + P_1 - P_2 = P_3 = +1$ kN

$N_{eb} = -A'' + P_1 - P_2 - P_3 = 0$

P o z n á m k a : Na nosníku se nevyskytuje žádné příčné zatížení, proto nosník není namáhán ani posouvajícími silami ani ohybovými momenty.

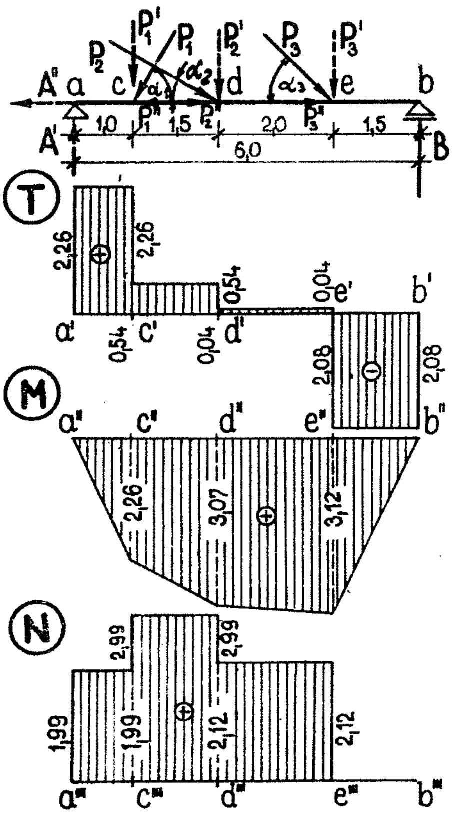
Příklad (5)

Prostý nosník zatížený třemi šikmými osamělými břemeny podle obr. 27.

$P_1 = 2$ kN, $P_2 = 1$ kN, $P_3 = 3$ kN, $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = 45°$.

Při řešení použijeme s výhodou zákona superposice (sečítání účinků). Šikmá břemena rozložíme do složek působících v ose nosníku a do složek kolmých k ose nosníku. Tím obdržíme dvě zatěžovací soustavy ; osové zatížení osamělými břemeny a příčné zatížení osamělými břemeny.

Řešením nosníku zatíženého první soustavou podle příkl. 4 obdržíme složku A'' reakce A a dále průběh normálných sil. Řešením nosníku zatíženého druhou soustavou podle příkl. 3 obdržíme složku A' reakce A, reakci B a průběh posouvajících sil a ohybových momentů.



OBR. 27

Výpočet vodorovných složek

$P_1'' = P_1 \cos 60° = 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}00$ kN

$P_2'' = P_2 \cos 30° = 1 \cdot 0{,}866 = 0{,}87$ kN

$P_3'' = P_3 \cos 45° = 3 \cdot 0{,}707 = 2{,}12$ kN

Výpočet svislých složek

$P_1' = P_1 \sin 60° = 2 \cdot 0{,}866 = 1{,}72$ kN

$P_2' = P_2 \sin 30° = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}50$ kN

$P_3' = P_3 \sin 45° = 3 \cdot 0{,}707 = 2{,}12$ kN

a) **Výpočet reakcí**

$- A'' - P_1'' + P_2'' + P_3'' = 0$, $\underline{A'' = 1{,}99 \text{ kN}}$

$$A' = \frac{1{,}72 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 3{,}5 + 2{,}12 \cdot 1{,}5}{6} = \underline{2{,}26 \text{ kN}}$$

$$B = \frac{1{,}72 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 12 \cdot 4{,}5}{6} = \underline{2{,}08 \text{ kN}}$$

Kontrola: $A' + B - P_1' - P_2' - P_3' = 0$

b) **Výpočet normálných sil**

$N_{ac} = A'' = 1{,}99$ kN

$N_{cd} = A'' + P_1'' = 1{,}99 + 1{,}00 = 2{,}99$ kN

$N_{de} = N_{cd} - P_2'' = 2{,}99 - 0{,}87 = 2{,}12$ kN

$N_{eb} = N_{de} - P_3'' = 2{,}12 - 2{,}12 = 0$

c) **Výpočet posouvajících sil**

$T_{ac} = A' = 2{,}26$ kN

$T_{cd} = A' - P_1' = 2{,}26 - 1{,}72 = 0{,}54$ kN

$T_{de} = T_{cd} - P_2' = 0{,}54 - 0{,}50 = 0{,}04$ kN

$T_{eb} = T_{de} - P_3' = 0{,}04 - 2{,}12 = - 2{,}08$ kN $= - B$

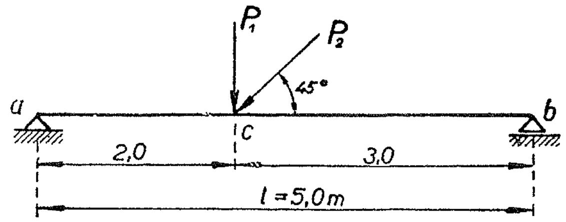
d) **Výpočet ohybových momentů**

$M_c = A' \cdot 1 = 2{,}26$ kNm

$M_d = A' \cdot 2{,}5 - P_1 \cdot 1{,}5 = 2{,}26 \cdot 2{,}5 - 1{,}72 \cdot 1{,}5 = 3{,}07$ kNm

$M_e = M_{max} = B \cdot 1{,}5 = 2{,}08 \cdot 1{,}5 = 3{,}12$ kNm

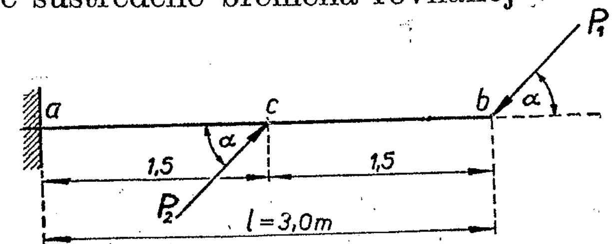
Príklad 145. Vypočítajte M_{max} a nakreslite momentový obrazec a obrazec priečnych a osových síl, keď vo vzdialenosti dvoch metrov od podperového bodu a v bode c pôsobí zvislá sila $P_1 = 2,5$ Mp a šikmá sila $P_2 = 1,2$ Mp (pod uhlom $\alpha = 45°$). Nech $l = 5,0$ m *(obr. 145).*



Obr. 145

[$M_{max} = M_c = 4,02$ Mpm, reakcie $A_H = 0,8484$ Mp; $A_V = 2,01$ Mp; $B =$ $= 1,34$ Mp, osová sila v časti $\overline{ac}$ nosníka $N_{ac} = -0,8484$ Mp.]

Príklad 146. Určte momentový obrazec a obrazec priečnych a osových síl. Konzolový nosník nech je votknutý na ľavom konci. Na voľnom konci a v strede nosníka pôsobia šikmé sústredené bremená rovnakej veľkosti a opačného

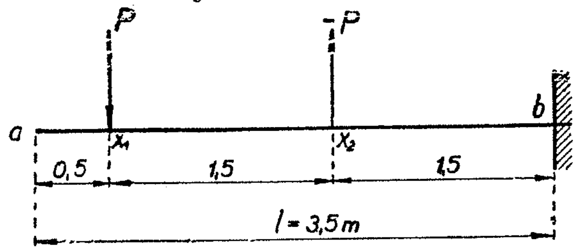


Obr. 146

zmyslu, takže ich zvislé a vodorovné zložky sú rovnako veľké; vodorovná zložka má hodnotu 1 000 kp a spôsobuje tlak *(obr. 146).*

[$M_b = 0$, $M_{max} = M_c = M_a = 1\,500$ kpm. Priečna a osová sila v časti $\overline{bc}$ nosníka $T_{b-c} = 1\,000$ kp; $N_{b-c} = -1\,000$ kp, v bode a je: $T_a = 0$, $N_a = 0$.]

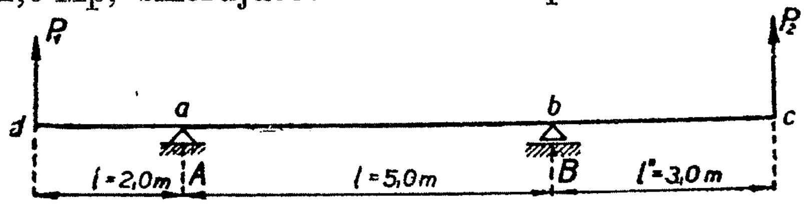
Príklad 153. Zistite počtársky momentový obrazec a obrazec priečnych síl, maximálny ohybový moment a priečnu silu. Naznačený konzolový nosník je zaťažený dvoma rovnakými silami opačného zmyslu, $P = 2,0$ Mp *(obr. 153).*



Obr. 153

[$M_{x_1} = 0$; $M_{x_2} = -3,0$ Mpm $= M_b = M_{max}$. Medzi prierezmi $x_1 - x_2$ je: $T = -2,0$ Mp.]

Príklad 150. Určte momentový obrazec a obrazec priečnych síl, M_{max}, M_a, M_b nosníka s previsnutými koncami, ktorý je zaťažený na ľavom konci silou $P_1 = -2,0$ Mp, smerujúcou hore a na pravom konci silou $P_2 =$



Obr. 150

$= -3,0$ Mp rovnakého zmyslu. Nech $l = 5,0$ m, $l' = 2,0$ m, $l'' = 3,0$ m *(obr. 150).*

[Reakcia $A = -1,0$ Mp; $B = -4,0$ Mp, $M_{max} = M_b = 9,0$ Mpm, $M_a =$ $= 4,0$ Mpm.]

Příklad 6

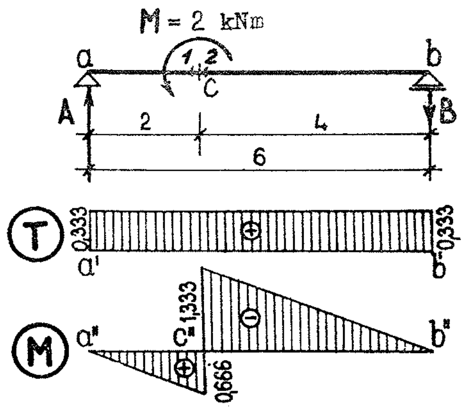
Prostý nosník zatížený jedním osamělým momentem M = 2 Mpm podle obr. 28.

a) Výpočet reakcí

$- A \cdot 6 + 2 = 0, \quad A = \frac{2}{6} = 0{,}333$ kN

$- B \cdot 6 + 2 = 0, \quad B = \frac{2}{6} = 0{,}333$ kN

Kontrola: $A - B = 0$



OBR. 28

b) Výpočet posouvajících sil

V libovolném průřezu nosníku

$T_x = A = B = 0{,}333$ kN = konst.

c) Určení polohy přechodného průřezu

Představíme-li si osamělý moment jako působení dvojice sil $P \cdot r = M$ (síly P uvažujme v poloze svislé) o nekonečně malém rameni r, pak je zřejmé, že v místě působení osamělého momentu M vznikají dvě extrémní hodnoty, protože posouvající síla mění v tomto místě dvakrát znaménko, i když se to v obrazci posouvajících sil neprojeví, protože oba přechodné průřezy jsou nekonečně blízko.

d) Výpočet ohybových momentů

$M_{c1} = A \cdot 2 = - B \cdot 4 + M = 0{,}666$ kNm

$M_{c2} = A \cdot 2 - M = - B \cdot 4 = - 1{,}333$ kNm

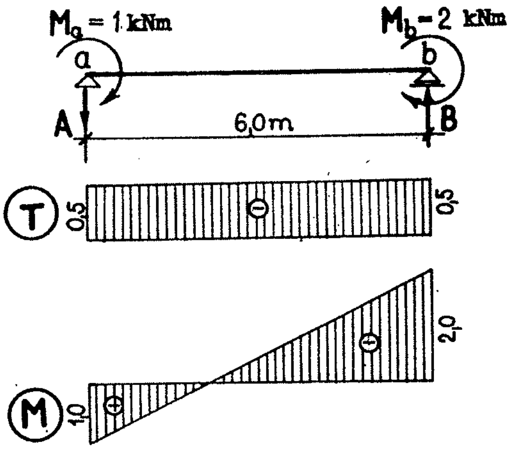
Příklad 7

Prostý přímý nosník zatížený dvěma osamělými momenty působícími v podporách nosníku podle obr. 29. $M_a = 1$ kNm, $M_b = 2$ kNm.

a) Výpočet reakcí

$A \cdot 6 - 1 - 2 = 0, \quad A = \frac{3}{6} = 0{,}5$ kN

$B \cdot 6 - 1 - 2 = 0, \quad B = \frac{3}{6} = 0{,}5$ kN



OBR. 29

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{ab} = - A = - B = - 0{,}5$ kN = konst.

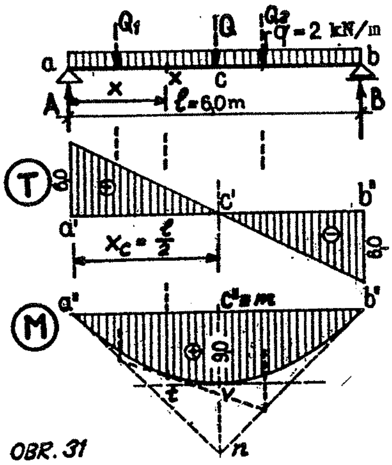
c) Výpočet ohybových momentů

$M_a = + 1$ kNm, $M_b = - 2$ kNm

Poznámka: Uvažte, jaký by byl průběh T a M, kdyby osamělý moment působil jen v jedné podpoře, nebo kdyby oba osamělé momenty měly opačný smysl, případně kdyby byly stejně velké. Kdyby měly oba osamělé momenty stejnou velikost, ale opačný smysl, byly by obě reakce nulové a posouvající síly by se na nosníku nevyskytovaly. Ohybové momenty by byly po celé délce nosníku konstantní.

Příklad (9)

Prostý přímý nosník zatížený po celé délce spojitě rovnoměrně, $q = 2$ kN/m .



OBR. 31

a) **Výpočet reakcí**

$Q = q \cdot \ell = 2 \cdot 6 = 12$ kN

$A = B = \dfrac{Q}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ kN

b) **Výpočet posouvajících sil**

$T_a = A = 6$ kN

$T_b = A - Q = - B = - 6$ kN

c) **Výpočet plochy přechodného průřezu c**

$A - Q_{ac} = \dfrac{1}{2} q\ell - q \cdot x_c = 0, \quad x_c = \dfrac{\ell}{2}$

d) **Výpočet maximálního ohybového momentu**

$$M_{max} = M_c = A \frac{\ell}{2} - Q_{ac} \frac{\ell}{4} =$$

$$= \frac{q\ell}{2} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} \right) = \boxed{\frac{1}{8} q \cdot \ell^2 = \frac{1}{8} Q \cdot \ell} = \frac{1}{8} 12 \cdot 6 = 9 \text{ kNm} \qquad \dots (1.11)$$

Ohybový moment v libovolném průřezu x :

$$M_x = A \cdot x - Q_{ax} \cdot \frac{x}{2} = A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Čára ohybových momentů je kvadratická parabola se svislou osou a s vrcholem v bodě v (obr. 31).

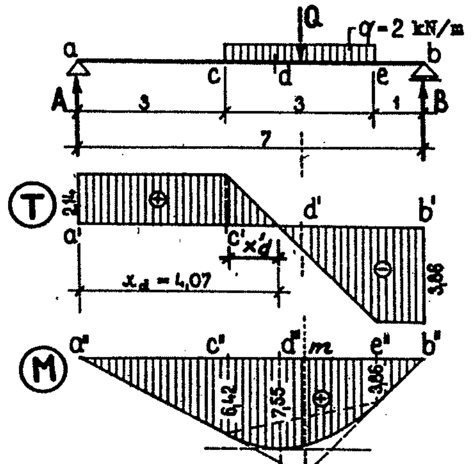
Průsečík n tečen k parabole v bodech a″, b″, můžeme určit jako momentovou pořadnici $\overline{mn}$ pro náhradní osamělé břemeno Q, tedy

$$(M_Q) = \overline{mn} = A \frac{\ell}{2} = \frac{1}{4} Q \cdot \ell \ .$$

Tečnu k momentové parabole pro libovolný průřez x můžeme sestrojit pomocí konstrukce vyznačené v obr. 31.

Příklad (16)

Nosník zatížený částečně rovnoměrně podle obr. 38, $q = 2$ kN/m.



OBR. 38

$Q = 2 \cdot 3 = 6$ kN

a) $-A \cdot 7 + 6 \cdot 2{,}5 = 0; \quad A = \dfrac{6 \cdot 2{,}5}{7} = \underline{2{,}14 \text{ kN}}$

$+B \cdot 7 - 6 \cdot 4{,}5 = 0; \quad B = \dfrac{6 \cdot 4{,}5}{7} = \underline{3{,}86 \text{ kN}}$

Kontrola: $A + B = 6 = Q$

b) $T_{ac} = A = 2{,}14$ kN ; $T_{eb} = A - Q = - B = \underline{-3{,}86 \text{ kN}}$

c) Polohu přechodného průřezu d vypočteme z podmínky, že $T_d = 0$, $T_d = A - q \cdot x'_d = 0$,

$x'_d = \dfrac{A}{q}$, $x_d = 3 + x'_d$

$x_d = 3 + \dfrac{2{,}14}{2} = 4{,}07$ m

d) $M_c = A \cdot 3 = 2{,}14 \cdot 3 = \underline{6{,}42 \text{ kNm}}$

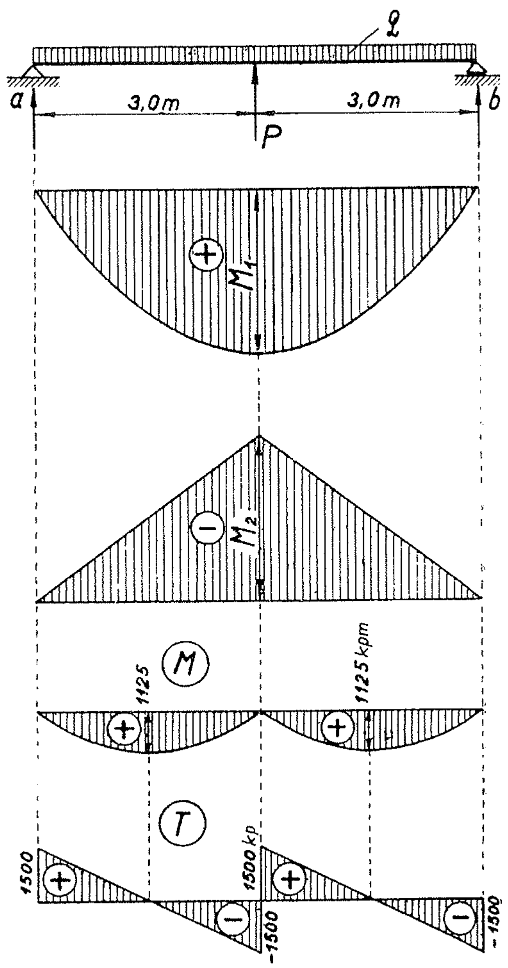
$M_d = M_{max} = 2{,}14 \cdot 4{,}07 - \dfrac{1}{2}\, 2 \cdot 1{,}07^2 =$

$= 8{,}7 - 1{,}145 = \underline{7{,}55 \text{ kNm}}$

$M_e = B \cdot 1 = \underline{3{,}86 \text{ kNm}}$

Tečny ke kvadratické parabole jsou prodloužené krajní strany momentové čáry a protínají se v bodě n na paprsku náhradního břemene Q.

Príklad 84. Akou silou P musíme pôsobiť v strede nosníka, aby plne rovnomerne zaťažený jednoduchý nosník mal pod silou P nulový ohybový moment. Vypočítajte aj maximálny ohybový moment. Nech $l = 6{,}0$ m, $q = 1\,000$ kp/m′ *(obr. 84)*.



Obr. 84

Riešenie:

Najprv vypočítame veľkosť ohybového momentu M_1 v prípade, že by na nosník pôsobilo iba plné rovnomerné zaťaženie:

$$M_1 = \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{8} \,.\, 1\,000 \,.\, 6{,}0^2 = 4\,500 \text{ kpm}$$

Potom zistíme, aký ohybový moment M_2 by vznikol v strede nosníka od sústredeného bremena P:

$$M_2 = -\frac{P}{2} \,.\, \frac{l}{2} = -\frac{Pl}{4} =$$

$$= -\frac{P \,.\, 6{,}0}{4} = -1{,}5P \text{ kpm}$$

V našom prípade sa súčet obidvoch týchto momentov musí rovnať nule:

$$4\,500 - 1{,}5P = 0$$

z čoho

$$P = \frac{4\,500}{1{,}5} = 3\,000 \text{ kp}$$

Za pôsobenia obidvoch zaťažení maximálny ohybový moment bude v krajných štvrtinách nosníka a jeho hodnota

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \,.\, 1\,000 \,.\, 3{,}0^2 = 1\,125 \text{ kpm}$$

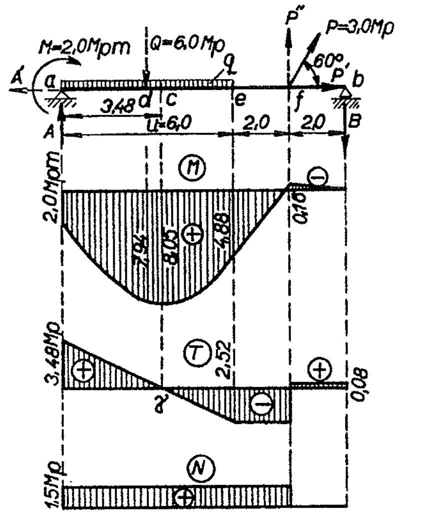
Ak chceme zostrojiť obrazec priečnych síl, treba určiť reakcie. Zo súčtovej podmienky rovnováhy vo zvislom smere vyplýva:

$$Q - P - A - B = 0; \quad 6\,000 - 3\,000 - A - B = 0; \quad A + B = 3\,000$$

a keďže konštrukcia aj zaťaženie je symetrické,

$$A = B = \frac{3\,000}{2} = 1\,500 \text{ kp}$$

Príklad 85. Na základe počtárskeho riešenia naznačte veľkosť ohybových momentov, priečnych a osových síl jednoduchého nosníka s rozpätím $l = 10{,}0$ m zaťaženého momentom $M = 2{,}0$ Mpm, čiastočným rovnomerným zaťažením $q = 1{,}0$ Mp/m' a šikmou silou $P = 3{,}0$ Mp *(obr. 85)*.



Obr. 85

Riešenie:

Keďže na nosník pôsobí aj šikmé zaťaženie P, rozložíme ho na zložku zvislú

$$P'' = P \sin 60° = 3{,}0 \,.\, 0{,}866 \doteq 2{,}6 \text{ Mp}$$

a na zložku vodorovnú

$$P' = P \cos 60° = 3{,}0 \,.\, 0{,}5 = 1{,}5 \text{ Mp}$$

Táto vodorovná zložka P' sily P je jedinou silou pôsobiacou vo vodorovnom smere a zo súčtovej podmienky rovnováhy vo vodorovnom smere vypočítame veľkosť vodorovnej zložky A' šikmej reakcie A:

$$A' + P \cos 60° = 0; \quad A' + P' = 0; \quad A' = -P' = -1{,}5 \text{ Mp} \leftarrow$$

Zvislú zložku A'' reakcie A určíme z momentovej podmienky rovnováhy k podperovému bodu b:

$$A''l + M - Q(l - u/2) + P'' \,.\, 2{,}0 = 0$$

$$A'' \,.\, 10{,}0 + 2{,}0 - 6{,}0 \,.\, 7{,}0 + 2{,}6 \,.\, 2{,}0 = 0$$

$$A'' = \frac{-2{,}0 + 42{,}0 - 5{,}2}{10{,}0} = 3{,}48 \text{ Mp}$$

Z momentovej podmienky rovnováhy k bodu a vyplýva rovnica

$$Bl + P''(u + 2{,}0) - Qu/2 - M = 0$$

$$B = \frac{-2{,}6 \,.\, 8{,}0 + 6{,}0 \,.\, 3{,}0 + 2{,}0}{10{,}0} = -0{,}08 \text{ Mp}$$

Zo súčtovej podmienky rovnováhy vo zvislom smere môžeme skontrolovať veľkosť reakcie B:

$$Q - P'' = A'' + B''$$

$$B'' = Q - P'' - A'' = 6{,}0 - 2{,}6 - 3{,}48 = -0{,}08 \text{ Mp}$$

Ohybové momenty:

$$M_a = M = 2{,}0 \text{ Mpm}$$

$$M_d = M + A'' \,.\, u/2 - q \,.\, u/2 \,.\, u/4 = 2{,}0 + 3{,}48 \,.\, 3{,}0 - 1{,}0 \,.\, 3{,}0 \,.\, 1{,}5 =$$
$$= 2{,}0 + 10{,}44 - 4{,}5 = 7{,}94 \text{ Mpm}$$

$$M_e = M + A'' \,.\, u - qu \,.\, u/2 = 2{,}0 + 3{,}48 \,.\, 6{,}0 - 1{,}0 \,.\, 6{,}0 \,.\, 3{,}0 =$$
$$= 4{,}88 \text{ Mpm}$$

Ak ideme sprava:

$$M_e = B \,.\, 4{,}0 + P'' \,.\, 2{,}0 = -0{,}08 \,.\, 4{,}0 + 2{,}6 \,.\, 2{,}0 = 4{,}88 \text{ Mpm}$$

$$M_f = B \,.\, 2{,}0 = -0{,}08 \,.\, 2{,}0 = -0{,}16 \text{ Mpm}; \quad M_b = 0$$

Maximálny ohybový moment je v prechodovom priereze c, kde priečna sila mení znamienko.

$$T_c = 0; \qquad A'' - qc = 0; \qquad c = \frac{A''}{q} = \frac{3{,}48}{1{,}0} = 3{,}48 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M_c = M + A'' \,.\, c - qc \,.\, c/2 = 2{,}0 + 3{,}48 \,.\, 3{,}48 -$$
$$- 1{,}0 \,.\, 3{,}48^2 \,.\, 0{,}5 = 8{,}05 \text{ Mpm}$$

Priečne sily

$$T_a = A'' = 3{,}48 \text{ Mp}; \quad T_e = A'' - Q = 3{,}48 - 6{,}0 = -2{,}52 \text{ Mp}$$

$$T_b = B = 0{,}08 \text{ Mp}; \quad T_f = B - P'' = 0{,}08 - 2{,}6 = -2{,}52 \text{ Mp} = T_e$$

(Reakcia B je záporná, jej zmysel ide dolu; ako priečna sila má však kladnú hodnotu.)

Osové sily pôsobia iba medzi pôsobiskom f šikmej sily P a podperovým bodom a. Majú kladnú hodnotu:

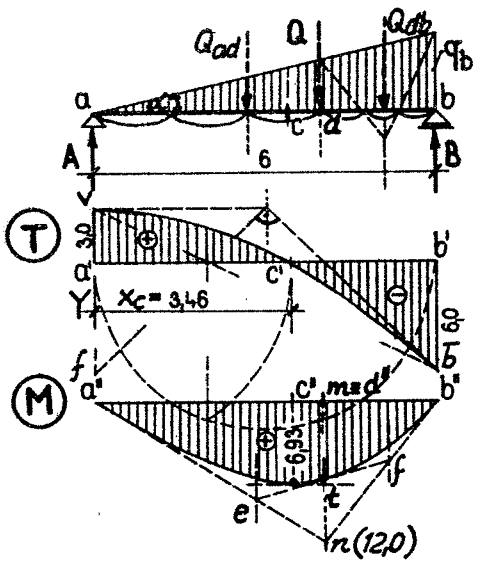
$$N_{af} = A' = P \cos 60° = 3{,}0 \,.\, 0{,}5 = 1{,}5 \text{ Mp}$$

(Vodorovná zložka A' šikmej reakcie A má zápornú hodnotu; ako osová sila má však kladné znamienko.)

Příklad 10

Prostý přímý nosník zatížený trojúhelníkovým zatížením, $q_b = 3$ kN/m

$$Q = \frac{1}{2} q \cdot \ell = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 = 9 \text{ kN}$$



OBR. 32

a) Výpočet reakcí

$$A = \frac{1}{3} Q = 3 \text{ kN}, \quad B = \frac{2}{3} Q = 6 \text{ kN}$$

b) Výpočet posouvajících sil

Posouvající síla v libovolném průřezu x

$$T_x = A - Q_{ax}, \quad Q_{ax} = Q \frac{x^2}{\ell^2}, \quad T_x = 0, \text{proto } Q_{ax} = A$$

$$T_x = \frac{Q}{3} - Q \frac{x^2}{\ell^2} = \frac{Q}{3} \left(1 - \frac{3x^2}{\ell^2}\right)$$

Čárouposouvajících sil je kvadratická parabola se svislou osou Y a vrcholem v bodě $\underline{v}$, pod vrcholem $\underline{a}$ zatěžovacího trojúhelníka (obr. 32), tedy v místě, kde $q = 0$ (1.2.8.d)

$$T_a = A = 3 \text{ kN}, \qquad T_b = A - Q = -B = -6 \text{ kN}$$

c) Výpočet polohy přechodného průřezu

$$A - Q_{ac} = 0, \quad Q_{ac} = Q \frac{x_c^2}{\ell^2}, \quad A - Q \frac{x_c^2}{\ell^2} = 0, \quad \underline{x_c} = \sqrt{\frac{A \cdot \ell^2}{Q}} = \sqrt{\frac{Q \cdot \ell^2}{3 \cdot Q}} = \boxed{\frac{\ell}{\sqrt{3}}} \qquad (1.12)$$

V našem případě $x_c = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}} = \dfrac{6}{1{,}732} = 3{,}46$ m

Délku x_c (tím i polohu přechodného průřezu) můžeme též graficky sestrojit jako střední měřicky úměrnou délek ℓ a $\frac{\ell}{3}$, protože $x_c^2 = \ell \cdot \frac{\ell}{3}$ (obr. 32).

d) Výpočet ohybových momentů

Ohybový moment v libovolném průřezu

$$M_x = A \cdot x - Q_{ax} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Q}{3} \cdot x - Q \frac{x^2}{\ell^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{Q \cdot x}{3} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2}\right),$$ což je rovnice

kubické paraboly. Průsečík $\underline{n}$ tečen v bodech a'', b'', ke kubické parabole můžeme určit jako momentovou pořadnici $\overline{mn}$ pro náhradní břemeno Q, tedy

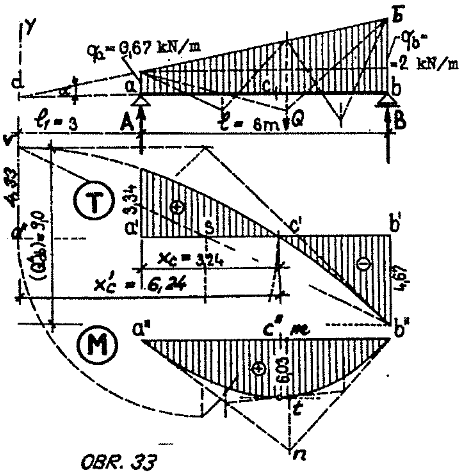
$$(M_Q) = \overline{mn} = A \cdot \frac{2}{3} \ell = 3 \cdot 4 = 12 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = M_c = A \cdot x_c - Q_{ac} \frac{x_c}{3} = \frac{Q \cdot x_c}{3} \left(1 - \frac{x_c^2}{\ell^2}\right) = 0{,}1283 \, Q \cdot \ell = 0{,}1283 \cdot 9 \cdot 6 = 6{,}93 \text{ kNm}$$

V libovolném bodě x, zejména též v přechodném průřezu c, můžeme sestrojit tečnu k momentové čáře tím způsobem, že zatěžovací obrazec (trojúhelník) rozdělíme v bodě x (v obr. 32 je sestrojena tečna pro bod d) na dvě části a určíme paprsky obou náhradních břemen Q_{ax} a Q_{xb}, které procházejí těžišti obou částí. Tyto paprsky protínají tečny $a''n$, $b''n$ v bodech e, f, jejichž spojením získáme hledanou tečnu s bodem dotyku t (obr. 32). Tímto způsobem lze sestrojit libovolný počet tečen k momentové čáře.

Příklad (11)

Prostý přímý nosník zatížený lichoběžníkovým zatížením, $q_a = 0{,}67$ kN/m, $q_b = 2$ kN/m



OBR. 33

$Q^{\square} = q_a \cdot \ell = 0{,}67 \cdot 6 = 4{,}02$ kN

$Q^{\Delta} = \dfrac{1}{2}(q_b - q_a) \cdot \ell = \dfrac{1}{2}\, 1{,}33 \cdot 6 = 3{,}99$ kN

a) Výpočet reakcí

$A = \dfrac{1}{2} Q^{\square} + \dfrac{1}{3} Q^{\Delta} = 2{,}01 + 1{,}33 = 3{,}34$ kN

$B = \dfrac{1}{2} Q^{\square} + \dfrac{2}{3} Q^{\Delta} = 2{,}01 + 2{,}66 = 4{,}67$ kN

b) Výpočet posouvajících sil

Posouvající síla v libovolném průřezu

$T_x = A - Q^{\square}_{ax} - Q^{\Delta}_{ax}$, kde

$Q^{\square}_{ax} = Q^{\square} \cdot \dfrac{x}{\ell} = q_a \cdot x$

$Q^{\Delta}_{ax} = Q^{\Delta} \cdot \dfrac{x^2}{\ell^2}$, takže $\quad T_x = A - Q^{\square}\dfrac{x}{\ell} - Q^{\Delta}\dfrac{x^2}{\ell^2}$

Čára posouvajících sil (jakožto součtová čára zatížení) je kvadratická parabola o svislé ose Y a vrcholu $\underline{v}$, který je v tomto případě pod vrcholem $\underline{d}$ myšleného zatěžovacího trojúhelníka $d b \bar{b}$ (obr. 33).
$T_a = A = 3{,}34$ kN, $T_b = A - Q^{\square} - Q^{\Delta} = -B = -4{,}67$ kN a pořadnice vrcholu kvadratické paraboly $\overline{d'v} = (Q^{\Delta}{db}) - B = 9 - 4{,}67 = 4{,}33$ kN.

c) Výpočet polohy přechodného průřezu

Posouvající síla v přechodném průřezu c se musí rovnat nule, proto

$A - Q^{\square}_{ax} - Q^{\Delta}_{ax} = 0, \quad Q^{\Delta}_{ax} + Q^{\square}_{ax} - A = 0,$ po dosazení Q^{Δ}_{ax} a $Q^{\square}_{ax}$ z odst. b)

$Q^{\Delta}\left(\dfrac{x_c}{\ell}\right)^2 + Q^{\square}\left(\dfrac{x_c}{\ell}\right) - A = 0, \quad \dfrac{x_c}{\ell} = \dfrac{-Q^{\square} \pm \sqrt{Q^{\square 2} + 4A Q^{\Delta}}}{2Q^{\Delta}}$, prakticky má

význam jen kladný kořen, proto $\boxed{x_c = \dfrac{\ell}{2Q^{\Delta}}\left(-Q^{\square} + \sqrt{Q^{\square 2} + 4AQ^{\Delta}}\right)}$ (1.13)

v našem příkladu $x_c = \dfrac{6}{2 \cdot 3{,}99}\left(-4{,}02 + \sqrt{16{,}15 + 53{,}2}\right) = \underline{3{,}24 \text{ m}}$

Polohu přechodného průřezu můžeme také vypočítat pomocí myšleného trojúhelníkového zatížení $d b \bar{b}$.

$\dfrac{x_c'^2}{(\ell_1 + \ell)^2} = \dfrac{(Q^{\Delta}_{dc})}{(Q^{\Delta}_{db})}, \quad \boxed{x_c' = \sqrt{\dfrac{(Q^{\Delta}_{dc}) \cdot (\ell_1 + \ell)^2}{(Q^{\Delta}_{db})}}}$ a $x_c = x_c' - \ell_1$ (1.14)

$(Q^{\Delta}_{dc}) = (Q^{\Delta}_{db}) - B = 9{,}0 - 4{,}67 = 4{,}33$ kN (viz obr. 33), takže

$x_c' = \sqrt{\dfrac{4{,}33 \cdot 81}{9}} = 6{,}24$ a $\underline{x_c} = 6{,}24 - 3 = \underline{3{,}24 \text{ m}}$

d) Výpočet ohybových momentů

Ohybový moment v libovolném průřezu

$M_x = A \cdot x - Q^{\square}_{ax}\dfrac{x}{2} - Q^{\Delta}_{ax}\dfrac{x}{3}$

Čára ohybových momentů, jakožto součtová čára posouvajících sil, je kubická parabola s extrémem v bodě $\underline{c}$.

Výpočet maximálního momentu

$M_{max} = M_c = A \cdot x_c - Q^{\square}_{ac}\dfrac{x_c}{2} - Q^{\Delta}_{ac}\dfrac{x_c}{3} = 3{,}34 \cdot 3{,}24 - 2{,}17\dfrac{3{,}24}{2} - 1{,}16\dfrac{3{,}24}{3} = \underline{6{,}03 \text{ kNm}}$

Průsečík $\underline{n}$ tečen v bodech $\underline{a}$, $\underline{b}$ ke kubické parabole můžeme určit jako momentovou pořadnici $\overline{mn}$ pro náhradní břemeno $Q = Q^{\square}_{ab} + Q^{\Delta}_{ab}$, působící v těžišti zatěžovacího lichoběžníka. Další tečny k momentové čáře lze sestrojit dělením zatěžovacího obrazce na dvě části, jak bylo uvedeno u trojúhelníkového zatížení (příklad 10) a jak je též vyznačeno v obr. 33.

Příklad 17

Nosník zatížený částečně trojúhelníkovým zatížením podle obr. 39; $q = 3$ kN/m.

a) $Q = \frac{1}{2}\, 4 \cdot 3 = 6$ kN

$-A \cdot 7 + 6 \cdot 4{,}33 = 0; \quad A = \frac{6 \cdot 4{,}33}{7} = \underline{3{,}72 \text{ kN}}$

$+B \cdot 7 - 6 \cdot 2{,}66 = 0; \quad B = \frac{6 \cdot 2{,}66}{7} = \underline{2{,}28 \text{ kN}}$

Kontrola: $A + B = 6 = Q$

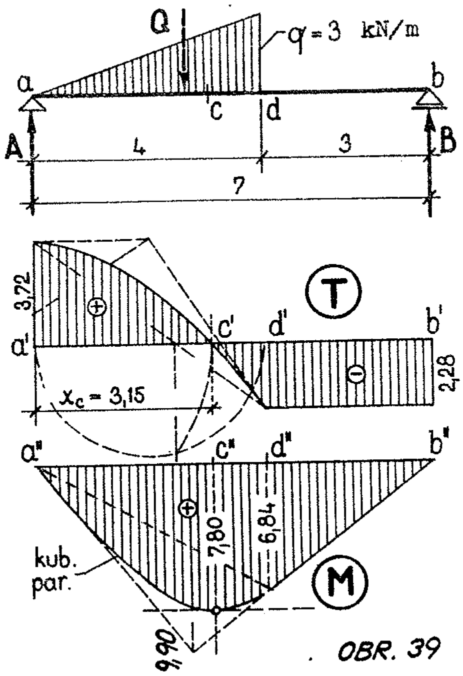
b) $T_a = A = \underline{3{,}72 \text{ kN}}$

$T_{db} = A - Q = -B = \underline{-2{,}28 \text{ kN}}$

c) Polohu přechodného průřezu c vypočteme z podmínky, že $T_c = 0$, $T_c = A - Q^{\Delta}_{ac} = 0$,

$Q^{\Delta}_{ac} = Q\,\frac{x_c^2}{4^2}, \qquad Q^{\Delta}_{ae} = A,$

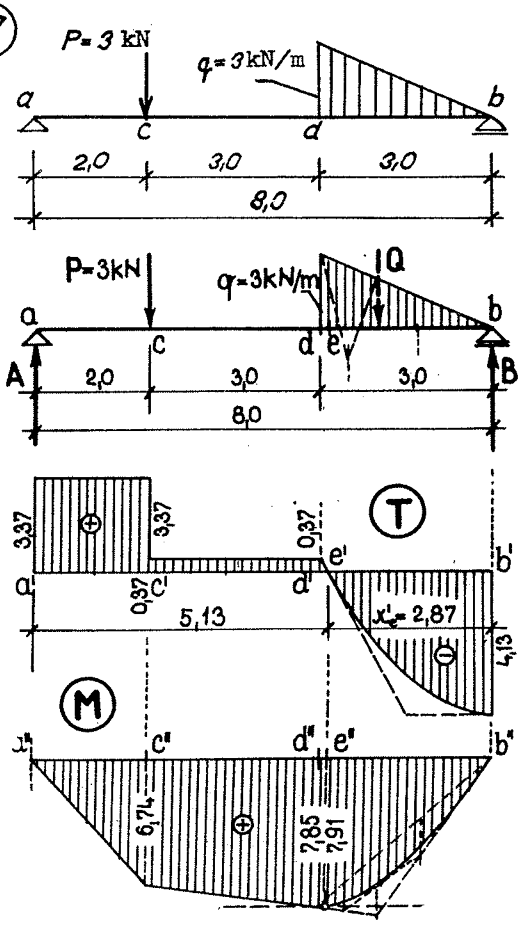
$x_c = \sqrt{\frac{A \cdot 4^2}{Q}} = \sqrt{\frac{3{,}72 \cdot 4^2}{6}} = 3{,}15 \text{ m}$



OBR. 39

d) $M_c = M_{max} = A \cdot x_c - Q^{\Delta}_{ac} \cdot \frac{x_c}{3} = A\,\frac{2}{3}\,x_c - 3{,}72\,\frac{2}{3}\,3{,}15 = \underline{7{,}8 \text{ kNm}}$

27



Příklad (18)

Nosník zatížený částečně lichoběžníkovým zatížením podle obr. 40;
$q_d = 1{,}5$ kN/m, $q_b = 3$ kN/m.

$$Q^{\square} = 1{,}5 \cdot 4 = 6 \text{ kN}, \qquad Q^{\triangle} = \frac{1}{2}\, 1{,}5 \cdot 4 = 3 \text{ kN}$$

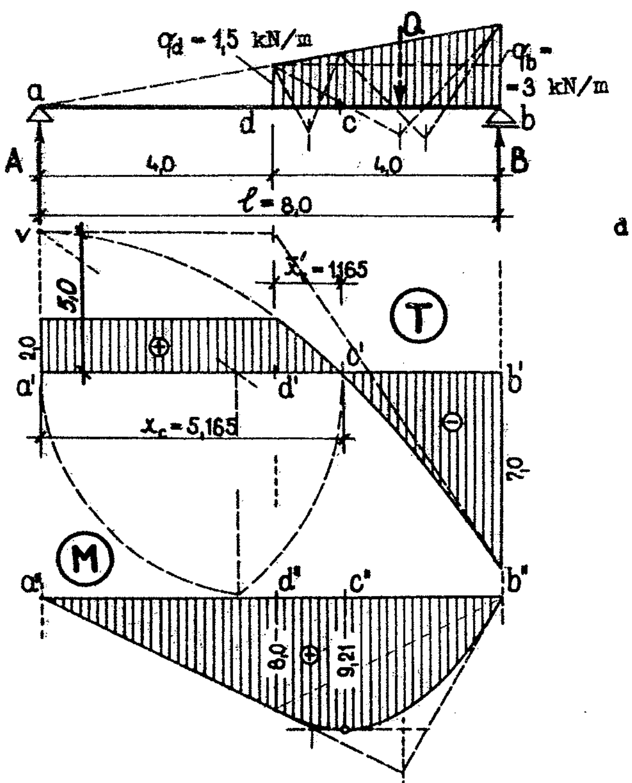
$$Q = Q^{\square} + Q^{\triangle} = 8 + 3 = 9 \text{ kN}$$

a) $-A \cdot 8 + Q^{\square} \cdot 2 + Q^{\triangle} \cdot 1{,}33 = 0 \qquad A = \dfrac{6 \cdot 2 + 3 \cdot 1{,}33}{8} = \underline{2{,}0 \text{ kN}}$

$B = Q - A = 9 - 2 = \underline{7{,}0 \text{ kN}}$

b) $T_{ad} = A = \underline{2{,}0 \text{ kN}}, \qquad T_b = -B = \underline{-7{,}0 \text{ kN}}$

c) $x_c' = \dfrac{4}{2 \cdot 3}\left(-6 + \sqrt{6^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3}\right) = 1{,}165$ m



OBR. 40

$x_c = 4 + 1{,}165 = 5{,}165$ m, nebo též

$$x_c = \sqrt{\frac{(Q_{ac}^{\triangle}) \cdot \ell^2}{(Q_{ab}^{\triangle})}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 64}{12}} = 5{,}165 \text{ m}$$

kde $(Q_{ac}^{\triangle}) = (Q_{ab}^{\triangle}) - B = 12 - 7 = 5$ kN

d) $M_d = A \cdot 4 = 2 \cdot 4 = \underline{8 \text{ kNm}}$

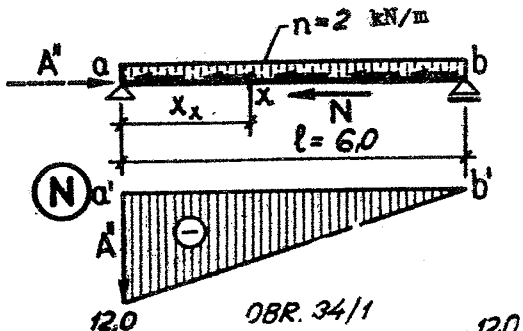
$$M_c = M_{max} = A \cdot x_c - Q_{dc}^{\square} \cdot \frac{x_c'}{2} - Q_{dc}^{\triangle} \cdot \frac{x_c'}{3} = 2 \cdot 5{,}165 - 1{,}75 \cdot \frac{1{,}165}{2} - 0{,}254 \cdot \frac{1{,}165}{3} = 10{,}33 - 1{,}02 - 0{,}097 = \underline{9{,}21 \text{ kNm}}$$

$$Q_{dc}^{\square} = q_d \cdot x_c' = 1{,}5 \cdot 1{,}165 = 1{,}75 \text{ kN}$$

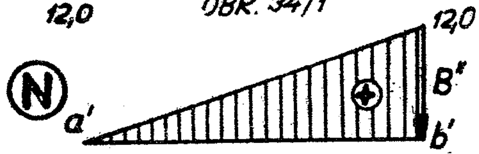
$$Q_{dc}^{\triangle} = Q_{db}^{\triangle} \cdot \frac{x_c'^2}{4^2} = 1{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}165^2}{4^2} = 0{,}254 \text{ kN}$$

Příklad (12)

Nosník zatížený rovnoměrným osovým zatížením podle obr. 34/1, n = 2 kN/m



OBR. 34/1



OBR. 34/2

a) Výpočet reakcí

$A'' = N, \quad N = n \cdot \ell = 2 \cdot 6 = 12$ kN

b) Posouvající síly a ohybové momenty se na nosníku nevyskytují.

c) Výpočet normálných sil

V libovolném průřezu x

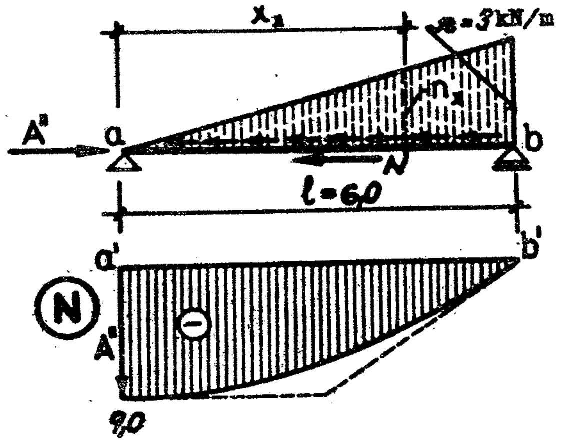
$N_x = - A'' + n \cdot x_x$

V podpoře a je maximální normálná síla (tlak) a rovná se reakci $A'' = N$. Směrem doprava se normálná síla rovnoměrně zmenšuje až k podpoře b, kde se rovná nule (obr. 34/1).

P o z n á m k a : Kdyby byla posuvná levá podpora a pevná pravá, pak všechny normálné síly v nosníku jsou kladné a jejich průběh je vyznačen v obr. 34/2.

Příklad (13)

Nosník zatížený trojúhelníkovým osovým zatížením podle obr. 35/1, n = 3 kN/m .



OBR. 35/1

a) Výpočet reakcí

$A'' = N = \frac{1}{2} n \ell = 9$ kN

b) Posouvající síly a ohybové momenty se na nosníku nevyskytují.

c) Výpočet normálných sil

$n_x = \frac{n \cdot x_x}{\ell}$,

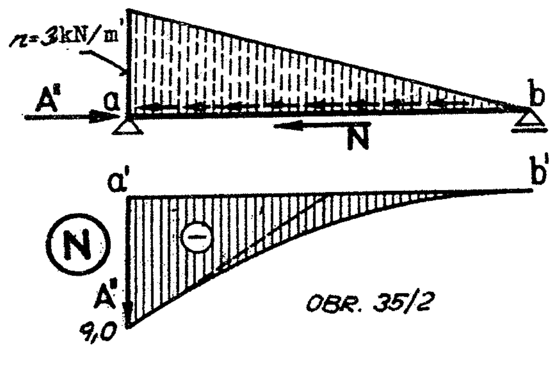
$N_{ax} = \frac{1}{2} n_x \cdot x_x = \frac{1}{2} n \cdot \frac{x_x^2}{\ell}, \quad N_x = -A'' + N_{ax}$

Čarou normálných sil (91) je kvadratická parabola (obr. 35/1).

Extrémní hodnota je v místě, kde n = 0

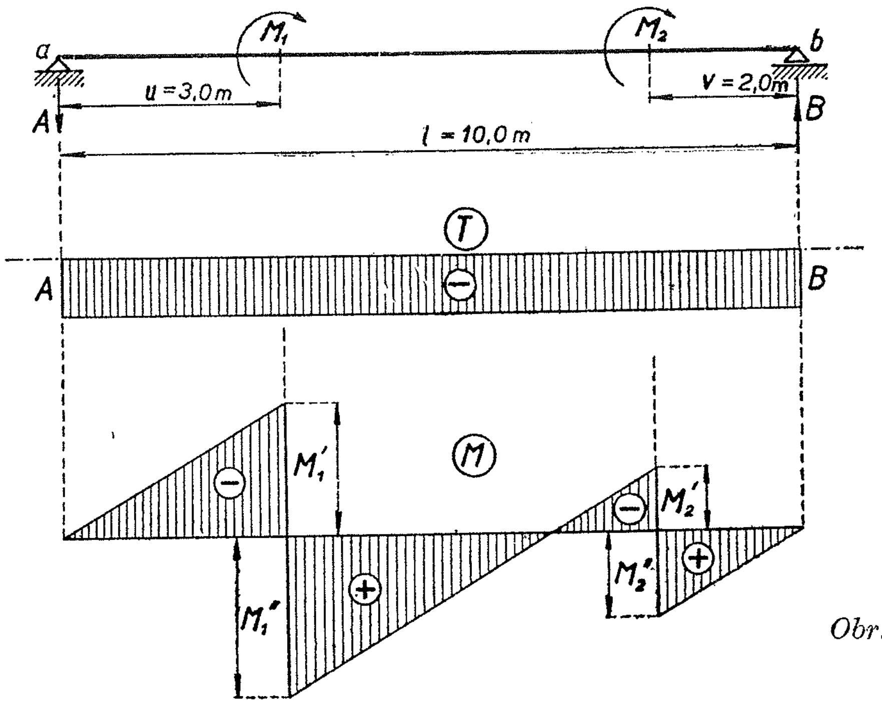
P o z n á m k a : Pro trojúhelníkové osové zatížení s nulovou hodnotou v bodě b, je průběh normálných sil vyznačen v obr. 35/2.

Čára normálných sil má vodorovnou tečnu (extrém) v místě, kde n = 0, tedy v bodě b .



OBR. 35/2

Príklad 83. Vypočítajte priečne sily a ohybové momenty jednoduchého nosníka zaťaženého momentami $M_1 = 4$ Mpm, $M_2 = 2$ Mpm, pôsobiacimi vo vzdialenosti $u = 3$ m, $v = 2$ m od konca nosníka, ktorého rozpätie $l = 10{,}0$ m *(obr. 83)*.



Obr. 83

Riešenie:

Najprv určíme veľkosť reakcií:

$$Al + M_1 + M_2 = 0$$

z čoho

$$A = -\frac{M_1 + M_2}{l} = -\frac{4 + 2}{10} = -0{,}6 \text{ Mp} = -B$$

Reakcia B bude rovnako veľká, ale opačného zmyslu, ako to vyplýva zo súčtovej podmienky rovnováhy vo zvislom smere.

Priečna sila po celej dĺžke nosníka je rovnaká a má zápornú hodnotu.

Tam, kde na nosník pôsobí moment, ohybový moment sa zmení skokom.

Veľkosť ohybového momentu bezprostredne vľavo pred pôsobiskom momentu M_1 označme

$$M_1' = Au = -\frac{M_1 + M_2}{l}\, u = -0{,}6 \,.\, 3{,}0 = -1{,}8 \text{ Mpm}$$

a nekonečne vpravo

$$M_1'' = Au + M_1 = -0{,}6 \,.\, 3{,}0 + 4{,}0 = 2{,}2 \text{ Mpm}$$

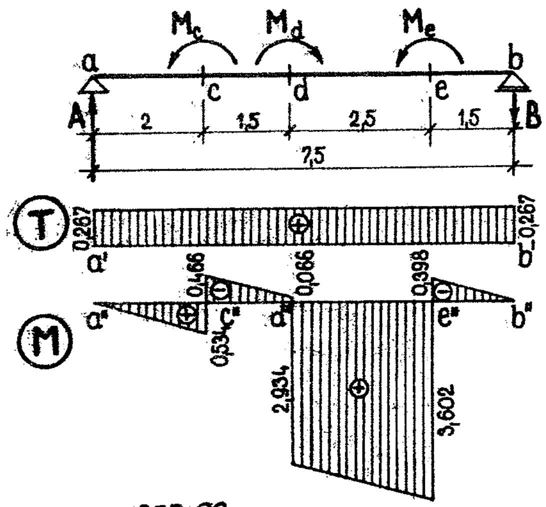
Rovnako ohybový moment

$$M_2'' = Bv = \frac{M_1 + M_2}{l}\, v = 0{,}6 \,.\, 2 = 1{,}2 \text{ Mpm}$$

$$M_2' = Bv - M_2 = 1{,}2 - 2{,}0 = -0{,}8 \text{ Mpm}$$

Příklad (8)

Přímý prostý nosník zatížený třemi osamělými ohybajícími momenty podle obr. 30. $M_c = 1$ kNm, $M_d = 3$ kNm, $M_e = 4$ kNm.



OBR. 30

a) Výpočet reakcí

$-A \cdot 7{,}5 + 1 - 3 + 4 = 0, \quad A = 0{,}267$ kN

$A - B = 0 \qquad B = 0{,}267$ kN

b) Výpočet posouvajících sil

$T_{ab} = A = B = 0{,}267$ kN = konst.

c) Výpočet ohybových momentů

$M_{c1} = 0{,}267 \cdot 2 = 0{,}534$ kNm

$M_{c2} = 0{,}267 \cdot 2 - 1 = -0{,}466$ kNm

$M_{d1} = 0{,}267 \cdot 3{,}5 - 1 = -0{,}066$ kNm

$M_{d2} = 0{,}267 \cdot 3{,}5 - 1 + 3 = 2{,}934$ kNm

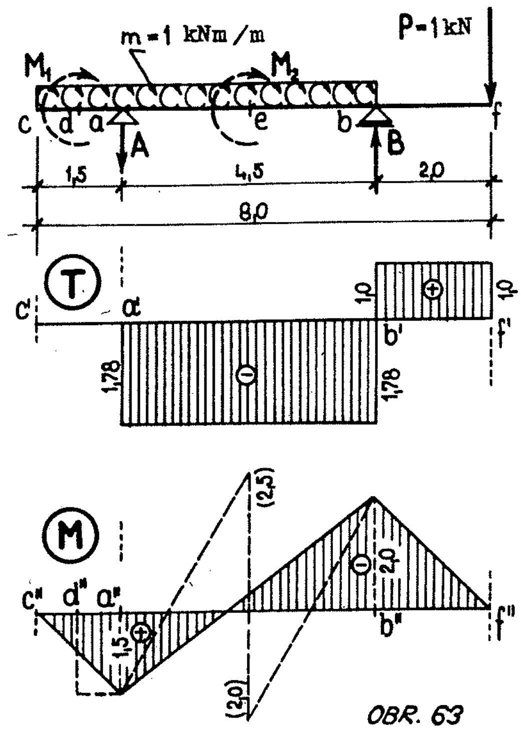
$M_{e1} = 0{,}267 \cdot 6 - 1 + 3 = 3{,}602$ kNm

$M_{e2} = 0{,}267 \cdot 6 - 1 + 3 - 4 = -0{,}398$ kNm

$M_a = M_b = 0$

Příklad (38)

Nosník se dvěma převislými konci, zatížený osamělým břemenem a částečně rovnoměrně spojitými momenty podle obr. 63 ; P = 1 kN, m = 1 kNm/m = 1 kN.



OBR. 63

Náhradní momenty:

$M_1 = m \cdot 1{,}5 = 1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$ kNm

$M_2 = m \cdot 4{,}5 = 1 \cdot 4{,}5 = 4{,}5$ kNm

a) $+A \cdot 4{,}5 - P \cdot 2 - M_1 - M_2 = 0$

$A = \underline{1{,}78 \text{ kN}}$

$+B \cdot 4{,}5 - P \cdot 6{,}5 - M_1 - M_2 = 0$

$B = \underline{2{,}78 \text{ kN}}$

Kontrola: $-A + B - P = 0$

b) $T_{ca} = 0$; $T_{ab} = -A = \underline{-1{,}78 \text{ kN}}$

$T_{bf} = T_{ab} + B = -1{,}78 + 2{,}78 = \underline{1{,}0 \text{ kN}}$

c) Výpočet mom. pořadnic pro náhradní zatížení momenty M_1 a M_2 a břemenem P

$M_c = 0 = M_f$; $M_{da} = M_1 = \underline{1{,}5 \text{ kNm}}$

$M_{e1} = M_1 - A \cdot 2{,}25 = 1{,}5 - 1{,}78 \cdot 2{,}25 = \underline{-2{,}5 \text{ kNm}}$

$M_{e2} = M_{e1} + M_2 = -2{,}5 + 4{,}5 = \underline{2{,}0 \text{ kNm}}$

$M_b = -P \cdot 2 = -1 \cdot 2 = \underline{-2 \text{ kNm}}$

Příklad (14)

Nosník zatížený rovnoměrně momenty podle obr. 36, $m = 2$ kNm/m $= 2$ kN

a) Výpočet reakcí

$A = \dfrac{M}{\ell}$, $B = \dfrac{M}{\ell}$, kde náhradní moment $M = m \cdot \ell = 12$ kNm

takže $A = B = m = 2$ kN

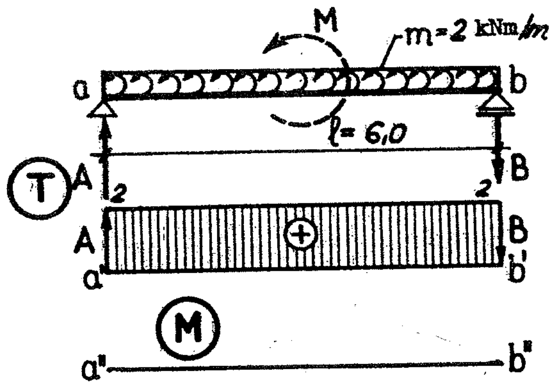
b) Výpočet posouvajících sil

$T_x = A = m = B =$ konst.

c) Výpočet ohybových momentů

$M_x = A \cdot x - m \cdot x = m \cdot x - m \cdot x = 0$,

tedy při rovnoměrném momentovém zatížení, působícím po celé délce nosníku, jsou všechny ohybové momenty nosníku rovny nule.



OBR. 36

Příklad (15)

Nosník zatížený trojúhelníkově momenty podle obr. 37, $m = 3$ kNm/m $= 3$ kN

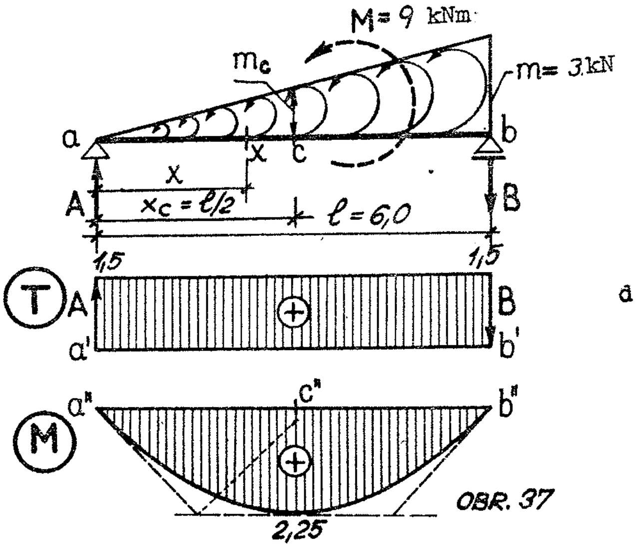
a) Výpočet reakcí

$A = \dfrac{M}{\ell}$, $B = \dfrac{M}{\ell}$, kde náhradní moment $M = \dfrac{1}{2} m \cdot \ell = 9$ kNm,

takže $A = \dfrac{1}{2} \dfrac{m \cdot \ell}{\ell} = \dfrac{m}{2} = B = 1{,}5$ kN

b) Výpočet posouvajících sil

$T_x = A = \dfrac{m}{2} = B =$ konst. $= 1{,}5$ kN



OBR. 37

c) Výpočet ohybových momentů

$M_x = A \cdot x - M_{ax}$, $M_{ax} = M \dfrac{x^2}{\ell^2}$

$M_x = \dfrac{M}{\ell} \cdot x - \dfrac{M}{\ell^2} x^2 = \dfrac{M \cdot x}{\ell^2} (\ell - x)$

Čárou ohybových momentů je kvadratická parabola s vrcholem uprostřed nosníku.

d) Výpočet maximálního momentu

Maximální moment vzniká tam, kde

$\dfrac{dM}{dx} = T - m = 0$ (odst. 1.2.8.d),

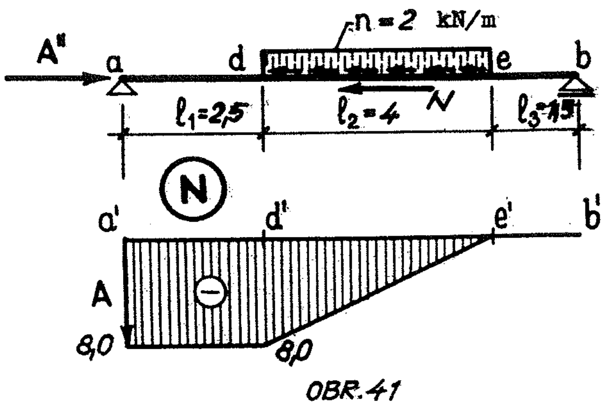
tj. v našem případě uprostřed nosníku, protože

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M}{\ell} - \frac{2M}{\ell^2} x_c = 0, \quad \underline{x_c = \frac{\ell}{2}}, \quad \text{v tomto bodě } T = A = \frac{m}{2} \text{ a } m_c = \frac{m}{2}$$

$$\underline{M_{max}} = M_c = \frac{M \cdot x_c}{\ell^2} (\ell - x_c) = \frac{M \cdot \ell}{2 \, \ell^2} \left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{M}{4} = \boxed{\frac{1}{8} m \ell} = 2{,}25 \text{ kNm} \quad (1.15)$$

Příklad (19)

Nosník zatížený částečně rovnoměrným osovým zatížením podle obr. 41, $n = 2$ kN/m.



OBR. 41

a) Výpočet reakcí

$A = N, \quad N = n \cdot \ell_2 = 8$ kN

b) Výpočet normálných sil

v části ad, $N_x = -A = -8$ kN

v části de, $N_x = -A + n.(x - \ell_1)$

v části eb, $N_x = -A + n.\ell_2 = 0$

c) Posouvající síly a ohybové momenty se na nosníku nevyskytují

V části ad je maximální normálná síla (tlak) a rovná se reakci A''. V části de se normálná síla lineárně zmenšuje až k bodu e, kde se rovná nule.

Příklad (20)

Nosník zatížený částečně rovnoměrně momenty podle obr. 42, $m = 2$ kNm/m.

a) Výpočet reakcí

Reakce vypočteme obdobným způsobem jako při plném rovnoměrném zatížení momenty

$A = \frac{M}{\ell}$, $B = \frac{M}{\ell}$, kde náhradní moment

$M = m.\ell_2 = 8$ kNm,

takže $A = \frac{m.\ell_2}{\ell} = B = 1{,}0$ kN

b) Výpočet posouvajících sil

$T_x = A = \frac{m.\ell_2}{\ell} = B =$ konst. $= 1$ kN

c) Výpočet ohybových momentů

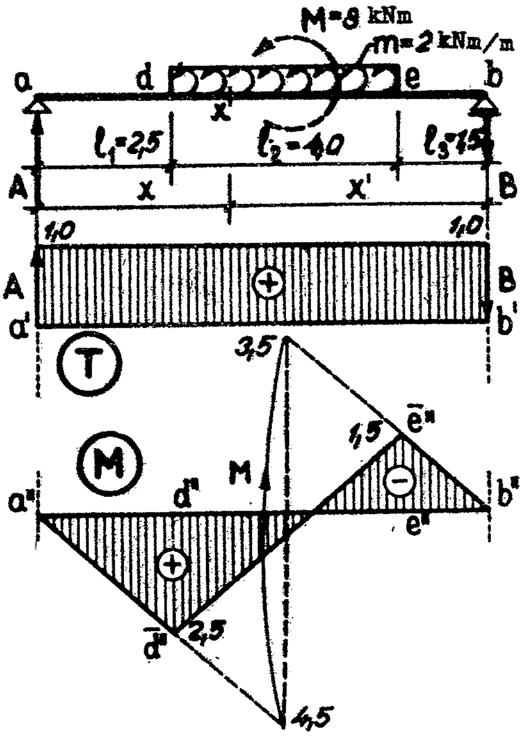
v části ad, $M_x = A.x = \frac{m.\ell_2}{\ell}.x$

$M_d = A.\ell_1 = 2{,}5$ kNm

v části de, $M_x = A.x - m(x - \ell_1)$

$M_e = -B.\ell_3 = -1{,}5$ kNm

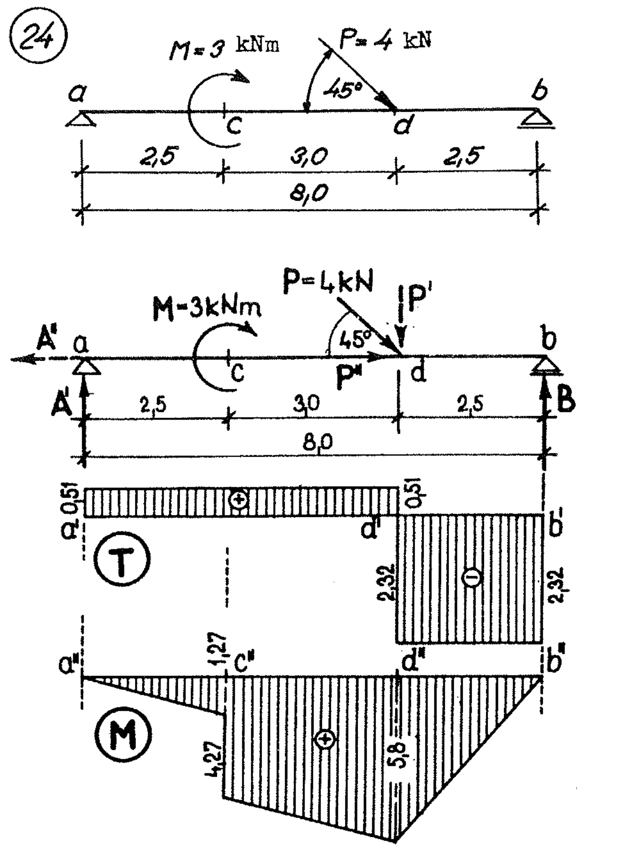
v části eb, $M_x = A.x - m.\ell_2 = -B.x'$

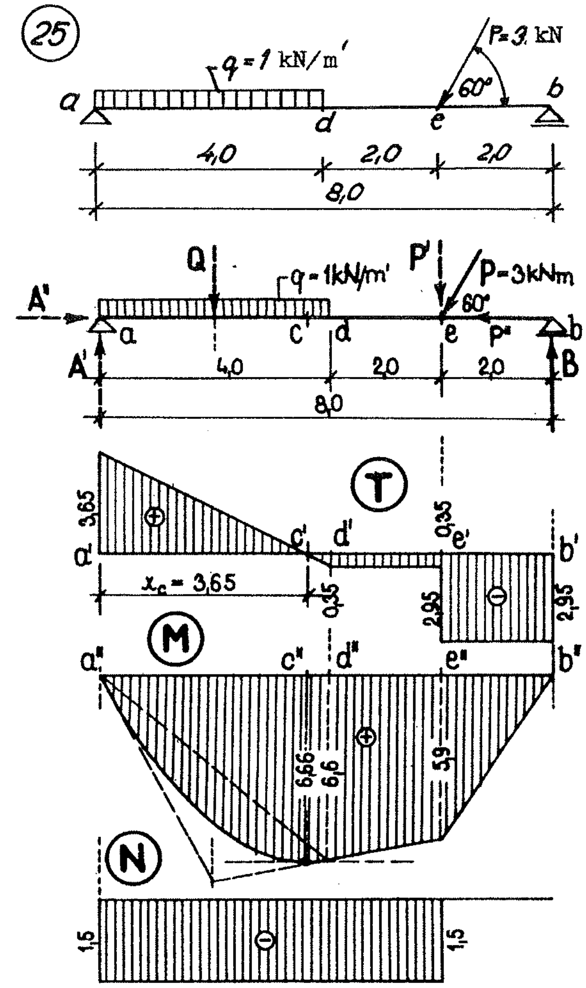


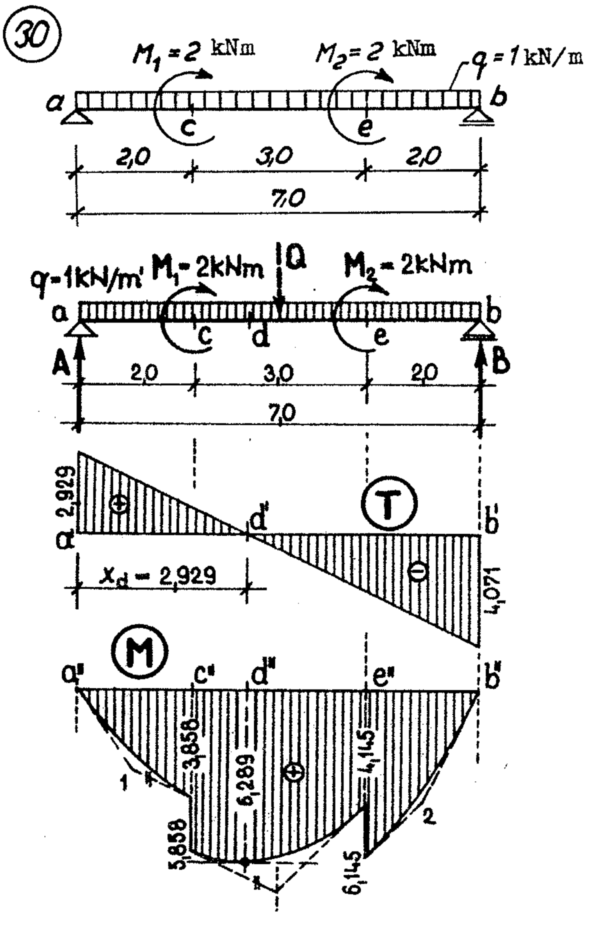
OBR. 42

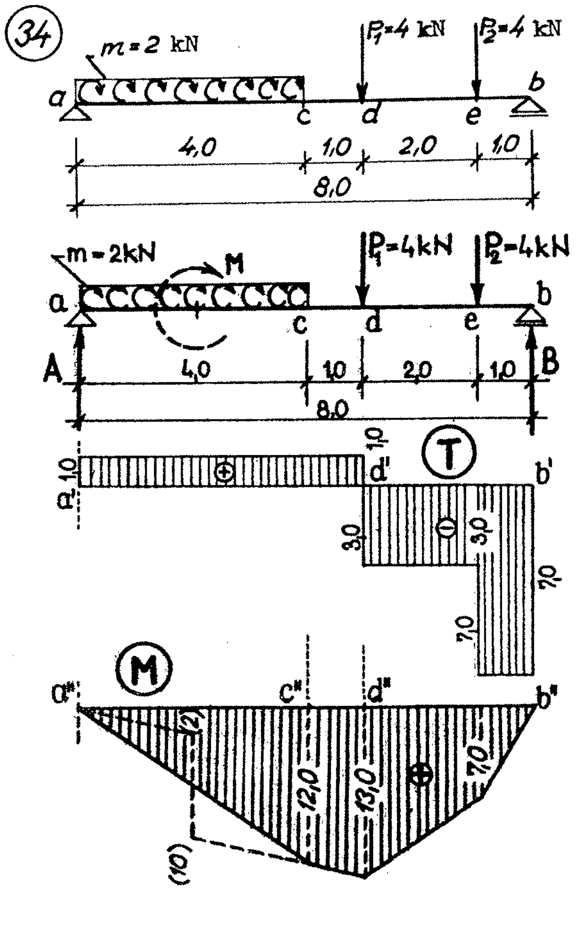
Ohybové momenty se mění ve všech třech úsecích lineárně a protože $A = B$, musí být $\overline{a''\,\bar{d}''} \parallel \overline{\bar{e}''\,b''}$.

Obrazec ohybových momentů sestrojíme nejlépe tak, že nejdříve sestrojíme momentový obrazec pro náhradní moment M, což je v obr. 42 vyznačeno čárkovaně, načež spojnicí bodů $\bar{d}''$, $\bar{e}''$ jej upravíme tak, aby odpovídal spojitému zatížení.

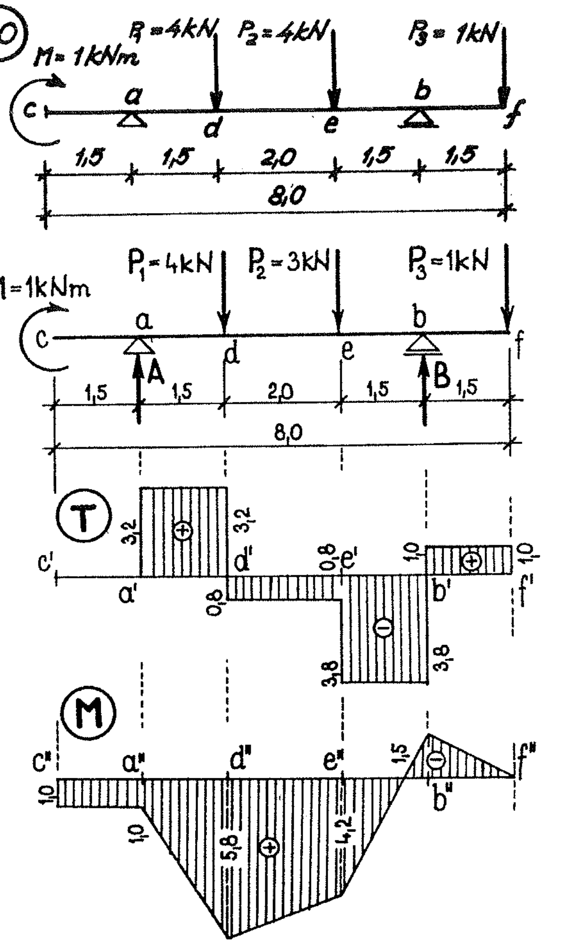

24
M = 3 kNm
P = 4 kN
45°
2,5
3,0
2,5
8,0
M=3kNm
P=4kN
P'
A'
P''
0,51
2,32
1,27
4,27
5,8
T
M


25
q = 1 kN/m'
P = 3 kN
60°
4,0
2,0
2,0
8,0
Q
q=1kN/m'
P'
P=3kNm
A'
P''
B
3,65
x_c = 3,65
0,35
2,95
6,66
6,6
5,9
1,5
T
M
N

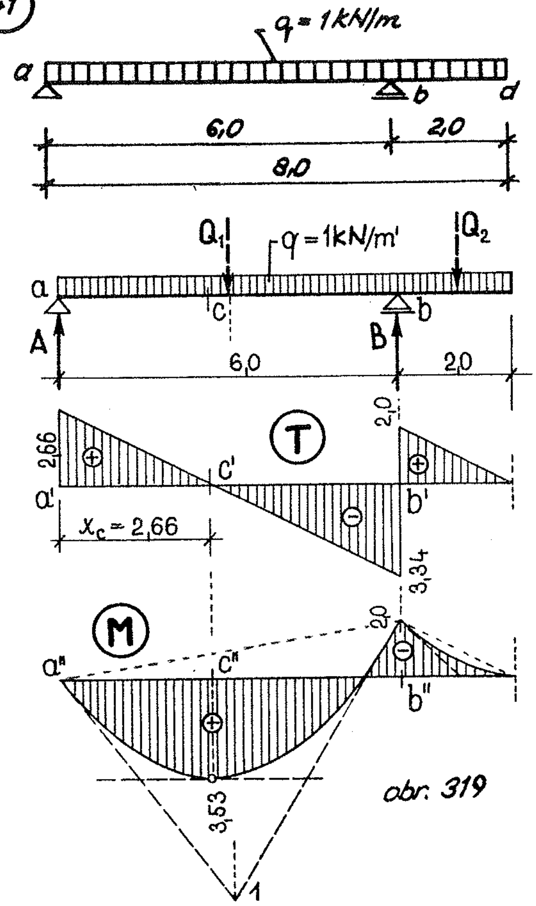

30
M_1 = 2 kNm
M_2 = 2 kNm
q = 1 kN/m
2,0
3,0
2,0
7,0
q=1kN/m'
M_1=2kNm
Q
M_2=2kNm
A
B
2,929
x_d = 2,929
4,071
3,858
5,858
6,289
4,145
6,145
T
M


34
m = 2 kN
P_1=4 kN
P_2=4 kN
4,0
1,0
2,0
1,0
8,0
m=2kN
M
P_1=4kN
P_2=4kN
A
B
1,0
3,0
7,0
(2)
(10)
12,0
13,0
7,0
T
M

40

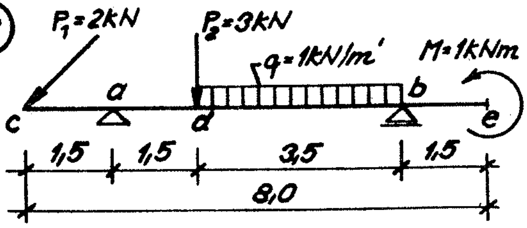


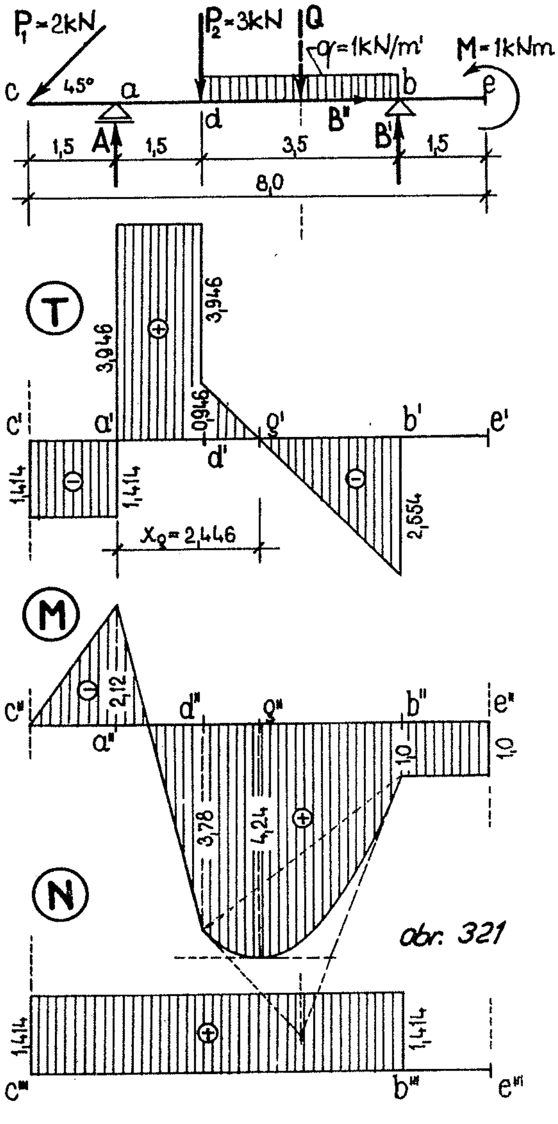
41



obr: 319

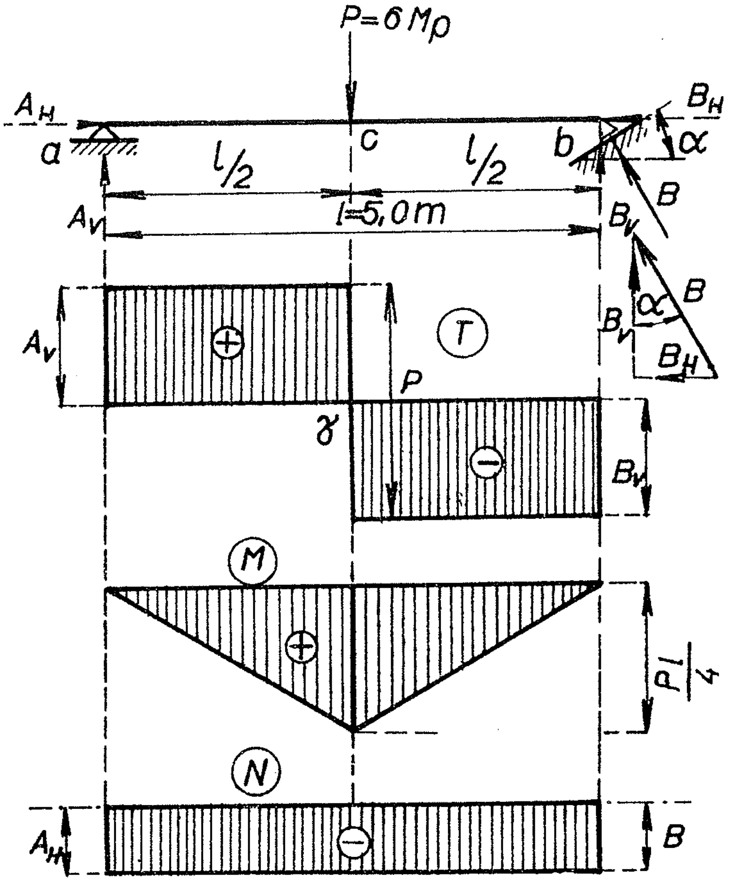
43





obr: 321

Príklad 79. Určte veľkosť reakcií, obrazec M, T, N jednoduchého nosníka s $l = 5{,}0$ m, zaťaženého v strede bremenom $P = 6{,}0$ Mp. Pravý koniec nosníka je posuvný po rovine odklonenej o 30° od vodorovnej *(obr. 79)*.



Obr. 79

Riešenie:

Najprv určíme reakcie $\quad A_V l - P\dfrac{l}{2} = 0$

$$A_V = \frac{P}{2} = B_V = 3{,}0 \text{ Mp}$$

Reakcia B musí ísť šikmo, a to kolmo na rovinu, po ktorej je možný posun podporového bodu b.

Keďže sme vypočítali zvislú zložku B_V reakcie B, z naznačeného pravouhlého trojuholníka vyplýva vodorovná zložka

$$B_H = B_V \operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} 30° = 3 \,.\, 0{,}577\,3 = 1{,}732 \text{ Mp}$$

Zo súčtovej podmienky rovnováhy vo vodorovnom smere vyplýva:

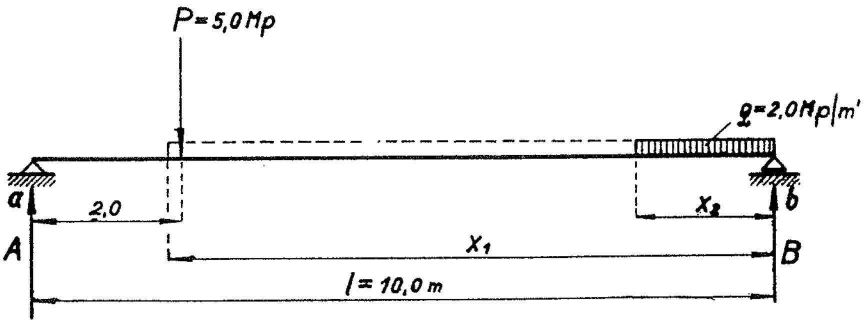
$$A_H = B_H = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha = 1{,}732 \text{ Mp}$$

Po vypočítaní zložiek reakcií už ľahko zostrojíme obrazec posúvajúcich a normálových síl, ako aj obrazec ohybových momentov.

Maximálny ohybový moment je v strede nosníka a jeho veľkosť

$$M_{\max} = A_V \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4} = \frac{6 \,.\, 5{,}0}{4} = 7{,}5 \text{ Mpm} = 7\,500 \text{ kpm}$$

Príklad 75. Na ľavej strane nosníka *(obr. 75)* pôsobí sústredené bremeno $P = 5$ Mp vo vzdialenosti dvoch metrov od ľavej podpery. Na akej dĺžke x musí pôsobiť rovnomerné zaťaženie z pravej strany (nech $q = 2$ Mp/m') nosníka, aby reakcie boli rovnaké? Rozpätie nosníka $l = 10{,}0$ m.



Obr. 75

Riešenie:

Keďže obidve reakcie majú byť rovnaké, momentová podmienka k stredu nosníka (pretože ide o rovnovážhovú sústavu síl) musí sa rovnať nule (pričom momenty neznámych reakcií môžeme vynechať):

$$-5\,(5-2) + 2x\left(5 - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-60}}{1} = \frac{10 \pm 6{,}32}{2}$$

$$x_1 = 8{,}16 \text{ m}; \qquad x_2 = 1{,}84 \text{ m}$$

Úloha má teda dve riešenia.

Veľkosť reakcií:

$$A \,.\, 10{,}0 - 5 \,.\, 8{,}0 - 2 \,.\, 1{,}84^2 \frac{1}{2} = 0; \quad A = 4{,}339 \text{ Mp}$$

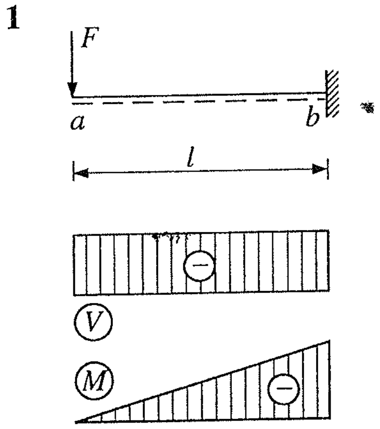
$$B \,.\, 10{,}0 - 2 \,.\, 1{,}84 \left(10 - \frac{1{,}84}{2}\right) - 5 \,.\, 2{,}0 = 0; \quad B = A$$

$$A \,.\, 10 - 5 \,.\, 8{,}0 - 2 \,.\, 8{,}16^2 \,.\, \frac{1}{2} = 0; \quad A = 10{,}66 \text{ Mp}$$

$$B \,.\, 10{,}0 - 2 \,.\, 8{,}16 \left(10 - \frac{8{,}16}{2}\right) - 5 \,.\, 2{,}0 = 0; \quad B = A$$

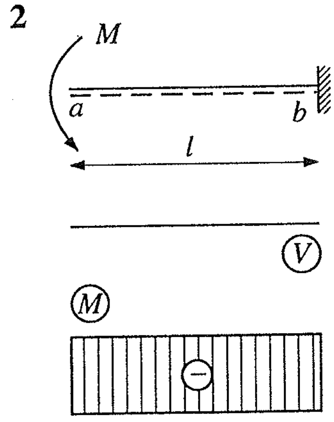
Tabulka 11.3. Průběhy V, M na konzole

1



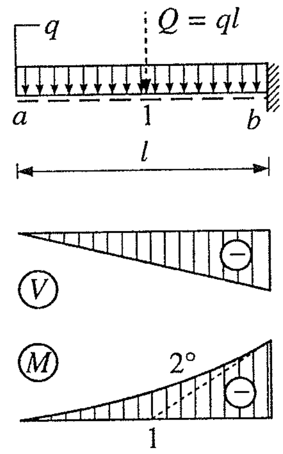
$$V_a = V_b = -F$$
$$M_b = -Fl$$

2



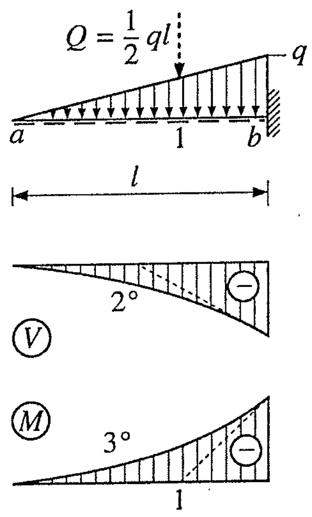
$$V_a = V_b = 0$$
$$M_a = M_b = -M$$

3



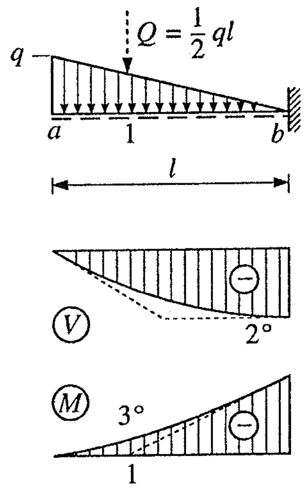
$$V_b = -ql$$
$$M_b = -\frac{1}{2}ql^2$$

4



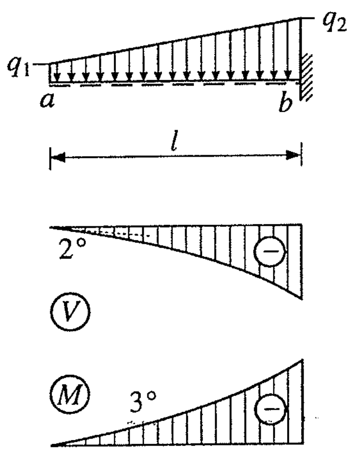
$$V_b = -\frac{1}{2}ql$$
$$M_b = -\frac{1}{6}ql^2$$

5



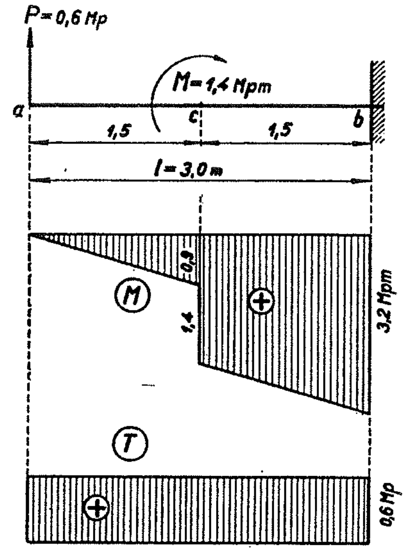
$$V_b = -\frac{1}{2}ql$$
$$M_b = -\frac{1}{3}ql^2$$

6



$$V_b = -\frac{1}{2}(q_1 + q_2)l$$
$$M_b = -\frac{1}{6}(2q_1 + q_2)l^2$$

Príklad 106. Zistite momentový obrazec a obrazec priečnych síl, $M_{\max}$, $T_{\max}$ naznačeného konzolového nosníka. Nech $l = 3{,}0$ m, $P = 0{,}6$ Mp, $M = 1{,}4$ Mpm, 1 m = 2cm, 1 Mp = 2 cm, 1 Mpm = 1,0 cm *(obr. 106).*



Obr. 106

Riešenie:

Ohybové momenty:
Na voľnom konci nosníka je:

nekonečne vľavo $\quad M_a = 0; \quad M_c = P \,.\, 1{,}5 = 0{,}6 \,.\, 1{,}5 = 0{,}9$ Mpm

$$M_c = P \,.\, 1{,}5 + M = 0{,}9 + 1{,}4 = 2{,}3 \text{ Mpm}$$

V mieste votknutia je:

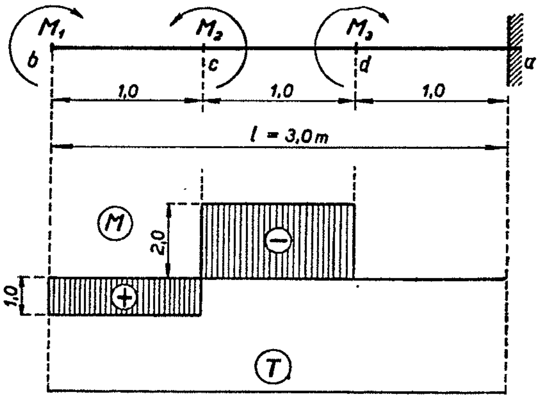
$$M_b = Pl + M = 0{,}6 \,.\, 3{,}0 + 1{,}4 = 1{,}8 + 1{,}4 = 3{,}2 \text{ Mpm} = M_{\max}$$

Priečne sily:

$$T_a = T_c = T_b = P = 0{,}6 \text{ Mp}$$

Vo všetkých prierezoch nosníka je priečna sila konštantná a rovná sa sile P, lebo moment M má iba otáčavý účinok.

Príklad 107. Zistite počtársky veľkosť ohybových momentov a priečnych síl konzolového nosníka zaťaženého momentmi. Nech $l = 3{,}0$ m, $M_1 = 1{,}0$ Mpm, $M_2 = -3{,}0$ Mpm, $M_3 = 2{,}0$ Mpm *(obr. 107).*



Obr. 107

Riešenie:

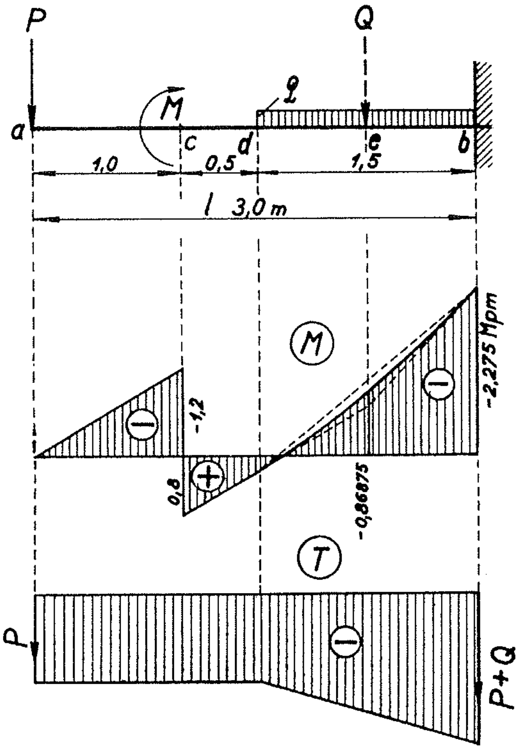
Ohybové momenty:

$$M_b = M_1 = 1{,}0 \text{ Mpm}$$
$$M_c^1 = M_1 = 1{,}0 \text{ Mpm}$$
$$M_c^2 = M_1 - M_2 = 1{,}0 - 3{,}0 = -2{,}0 \text{ Mpm}$$
$$M_d = M_c^2 + M_3 = -2{,}0 + 2{,}0 = 0$$

V časti $\overline{ad}$ nosníka sa ohybový moment rovná nule.

V celej časti $\overline{ab}$ nosníka sa priečna sila rovná nule.

Príklad 108. Určte momentový obrazec, obrazec priečnych síl, $M_{\max}$, $T_{\max}$ pri naznačenom konzolovom nosníku. Nech $l = 3{,}0$ m, $P = 1{,}2$ Mp, $M = 2{,}0$ Mpm, $q = 0{,}6$ Mp/m′, 1 m = 2 cm, 1 Mp = 1 cm, 1 Mpm = 1 cm *(obr. 108)*.



Obr. 108

Riešenie:

Ohybové momenty:
Na voľnom konci nosníka:

$$M_a = 0; \quad M_c = -P \,.\, 1{,}0 = -1{,}2 \,.\, 1{,}0 = -1{,}2 \text{ Mpm}$$

nekonečne vľavo

$$M_c = -P \,.\, 1{,}0 + M = -1{,}2 + 2{,}0 = 0{,}8 \text{ Mpm}$$

$$M_d = -1{,}2 \,.\, 1{,}5 + 2{,}0 = +0{,}2 \text{ Mpm}$$

$$M_b = -1{,}2 \,.\, 3{,}0 + 2{,}0 - 0{,}6 \,.\, 1{,}5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 0{,}5 = -2{,}275 \text{ Mpm} = M_{\max}$$

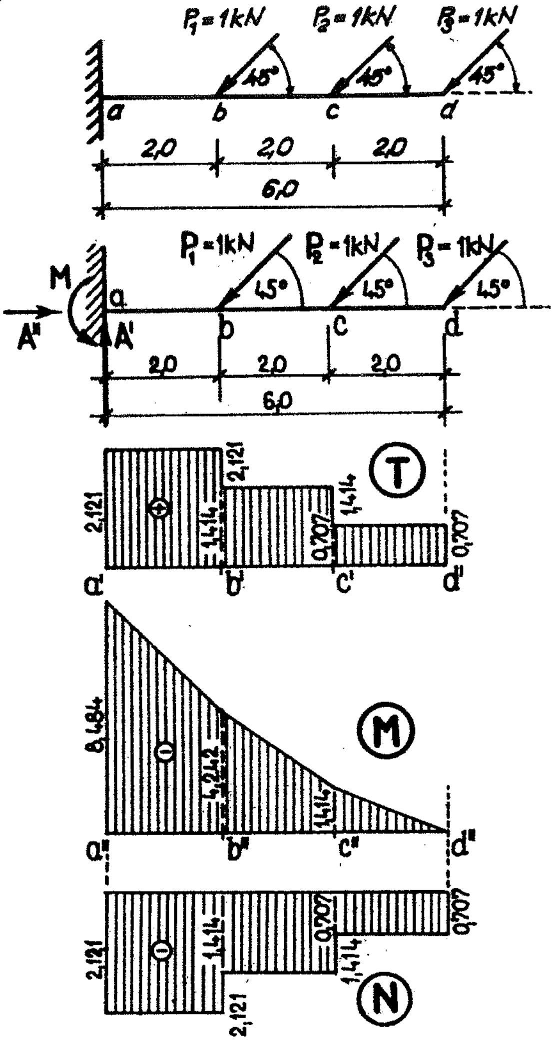
$$M_e = -1{,}2 \,.\, 2{,}25 + 2{,}0 - 0{,}6 \,.\, 0{,}75^2 \,.\, 0{,}5 = -0{,}868\,75 \text{ Mpm}$$

Priečne sily:
Medzi prierezom a—d je:

$$T_a = T_d = -P = -1{,}2 \text{ Mp}$$

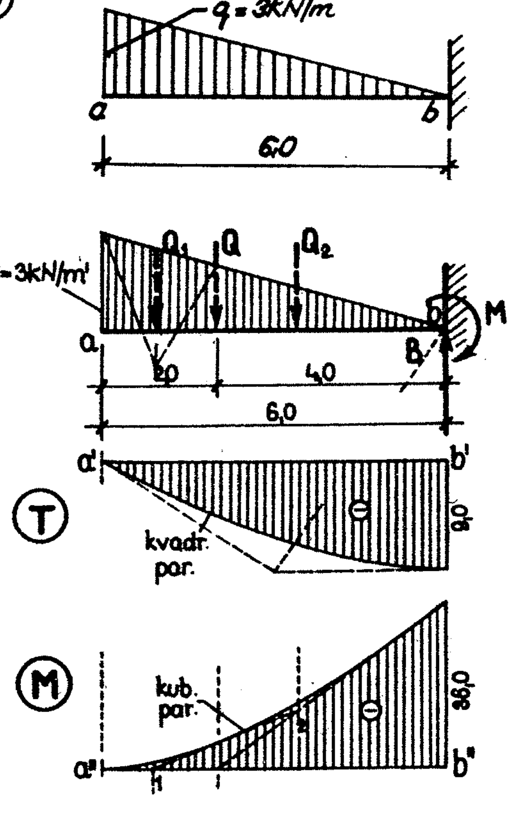
$$T_b = -P - q \,.\, 1{,}5 = -1{,}2 - 0{,}6 \,.\, 1{,}5 = -2{,}1 \text{ Mp} = T_{\max}$$

55



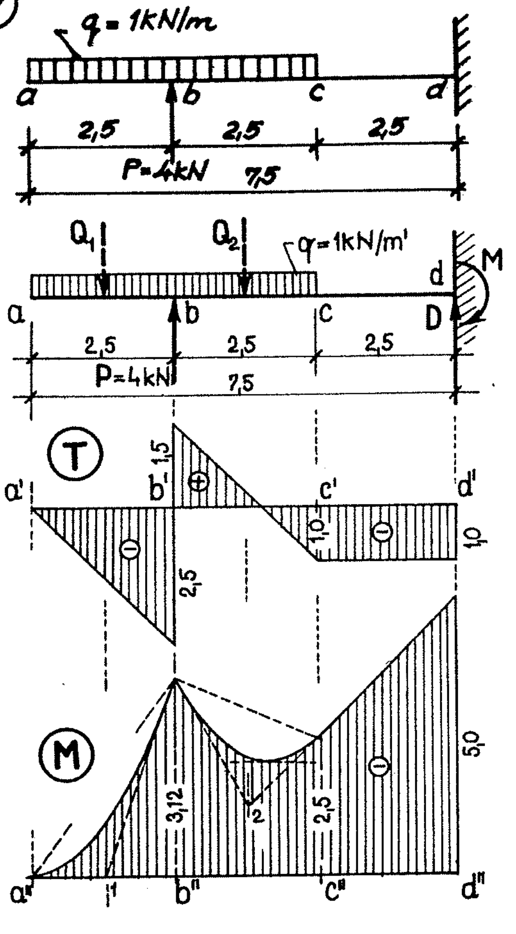
P1 = 1kN
P2 = 1kN
P3 = 1kN
45°
a
b
c
d
2,0
6,0
M
A''
A'
T
2,121
1,414
0,707
a'
b'
c'
d'
M
8,484
4,242
1,414
a''
b''
c''
d''
N

56



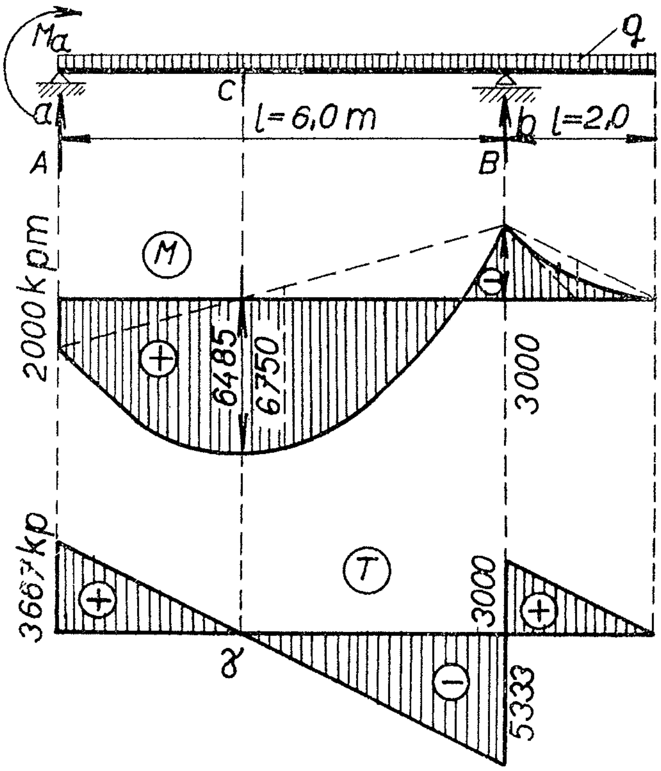
q = 3kN/m
a
b
6,0
Q1
Q
Q2
q = 3kN/m'
M
B
2,0
4,0
T
a'
b'
kvadr. par.
9,0
M
kub. par.
36,0
a''
b''

59



q = 1kN/m
a
b
c
d
2,5
P = 4kN
7,5
Q1
Q2
q = 1kN/m'
M
D
T
a'
b'
c'
d'
1,5
2,5
1,0
M
3,12
2
2,5
5,0
a''
b''
c''
d''

Príklad 97. Nosník s previsnutým koncom je plne rovnomerne zaťažený a na ľavom konci je zaťažený momentom. Máme určiť momentový obrazec a obrazec priečnych síl. Nech $l = 6{,}0$ m, $l' = 2{,}0$ m, $q = 1500$ kp/m$'$, $M_a =$ $= 2\,000$ kpm *(obr. 97).*



Obr. 97

Riešenie:

Najprv vypočítame reakcie.

$$A \,.\, 6{,}0 + 2\,000 - 1\,500 \,.\, 8{,}0\;2{,}0 = 0$$

$$A = \frac{-2\,000 + 24\,000}{6{,}0} \doteq 3\,667 \text{ kp}$$

$$B = q(l + l') - A = 1\,500 \,.\, 8{,}0 - 3\,667 = 8\,333 \text{ kp}$$

Moment v podpere b:

$$M_b = -1\,500 \,.\, 2{,}0 \,.\, 1{,}0 = -3\,000 \text{ kpm}$$

Ak nanesieme podperové momenty M_a a M_b od vodorovnej základnej strany, spojnica koncových bodov podperových momentových poradníc dáva tetivu parabolického úseku, ktorého maximálna poradnica je v strede rozpätia l a jej hodnota je:

$$\frac{1}{8}\,ql^2 = \frac{1}{8}\,1\,500 \,.\, 6{,}0^2 = 6\,750 \text{ kpm}$$

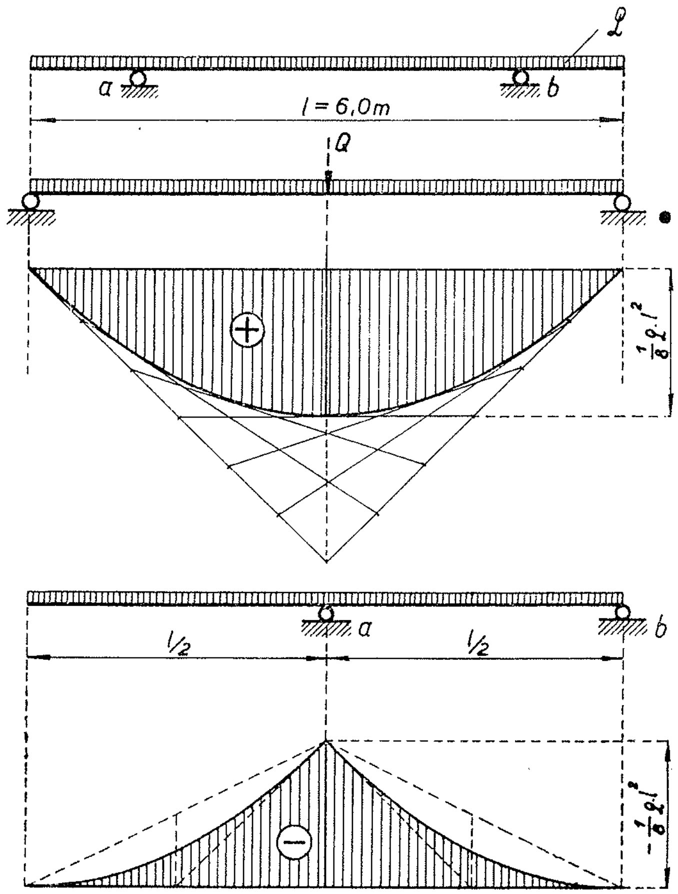
Maximálny moment bude v priereze c, kde priečna sila mení znamienko a prechodový prierez zistíme z rovnice

$$A - qc = 0; \qquad c = \frac{A}{q} = \frac{3\,667}{1\,500} \doteq 2{,}44 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M_c = M_a + Ac - \frac{1}{2}\,qc^2 = 2\,000 + 3\,667 \,.\, 2{,}44 - \frac{1}{2}\,1\,500 \,.\, 2{,}44^2 =$$

$$= 10\,950 - 4\,465 = 6\,485 \text{ kpm}$$

Príklad 96. Priama tuhá tyč zaťažená plným rovnomerným zaťažením sa valí po dvoch valčekoch, ktorých polohu môžeme ľubovoľne meniť. Určte krajné hodnoty ohybových momentov, keď $l = 6{,}0$ m, $q = 1$ Mp/m′ *(obr. 96)*.



Obr. 96

Riešenie:

Ak chceme vyvodiť maximálny kladný moment (zo zaťaženia pôsobiaceho zhora dolu), oddialime podperové valčeky čo najviac, teda dáme ich pod obidva konce tuhej tyče. Vzniknutý ohybový moment od plného rovnomerného zaťaženia bude mať hodnotu

$$M_c = +M_{\max} = \frac{1}{8}\,ql^2 = \frac{1}{8}\,1\,.\,6{,}0^2 = 4{,}5\ \text{Mpm} = 4\,500\ \text{kpm}$$

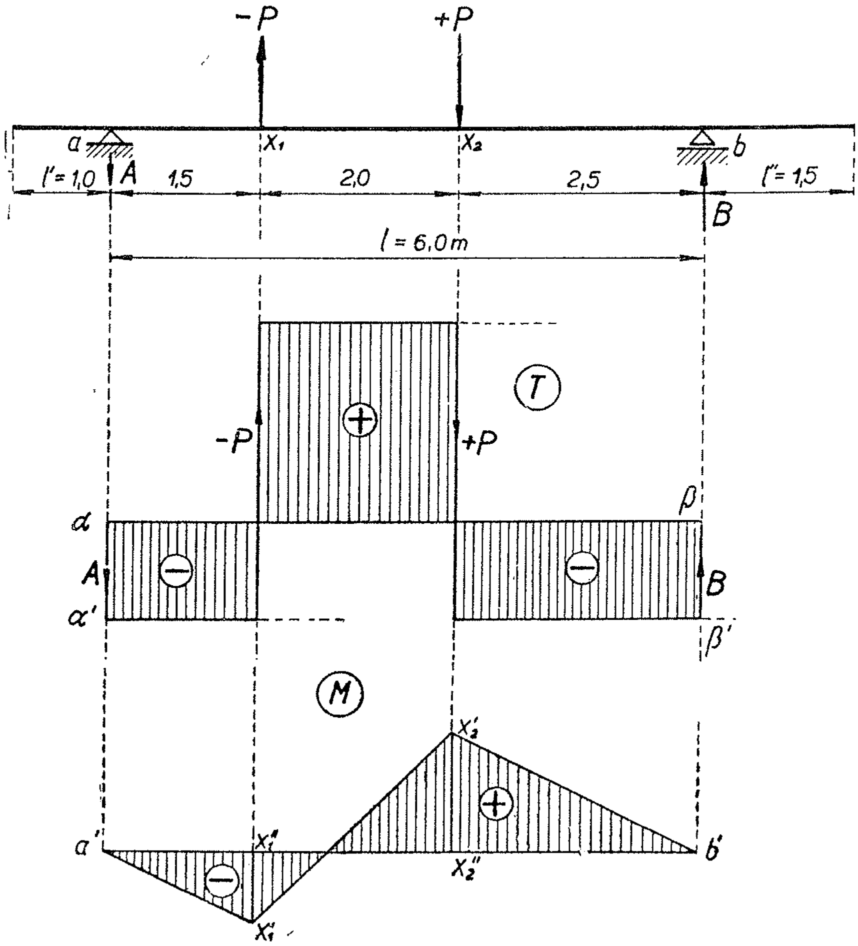
Ak chceme algebricky vyvodiť najmenší ohybový moment (teda najväčší záporný moment) a ak vylučujeme reakcie záporného znamienka:

$$M_a = M_{\min} = -q\,\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} = -\frac{1}{8}\,ql^2 = -4\,500\ \text{kpm}$$

V tomto prípade sme jeden valček umiestnili do stredu tuhej priamej tyče a druhý valček dáme na koniec tyče (nezáleží, na ktorý).

Absolútna hodnota obidvoch krajných momentov je rovnaká.

Príklad 94. Určte momentový obrazec, obrazec priečnych síl a maximálny ohybový moment naznačeného nosníka s rozpätím $l = 6{,}0$ m, $l' = 1{,}0$ m, $l'' = 1{,}5$ m, zaťaženého silami $+P$ a $-P$, keď $P = 3{,}0$ Mp. Sily nech pôsobia vo vzdialenosti $x_1 = 1{,}5$ m, $x_2 = 3{,}5$ m od ľavej podpery a (*obr. 94*).



Obr. 94

Riešenie:

Výpočet reakcií:

$$A \,.\, 6{,}0 + 3{,}0 \,.\, 4{,}5 - 3{,}0 \,.\, 2{,}5 = 0$$

$$A = \frac{-13{,}5 + 7{,}5}{6{,}0} = -\frac{6{,}0}{6{,}0} = -1{,}0 \text{ Mp} = -B$$

Ohybové momenty:

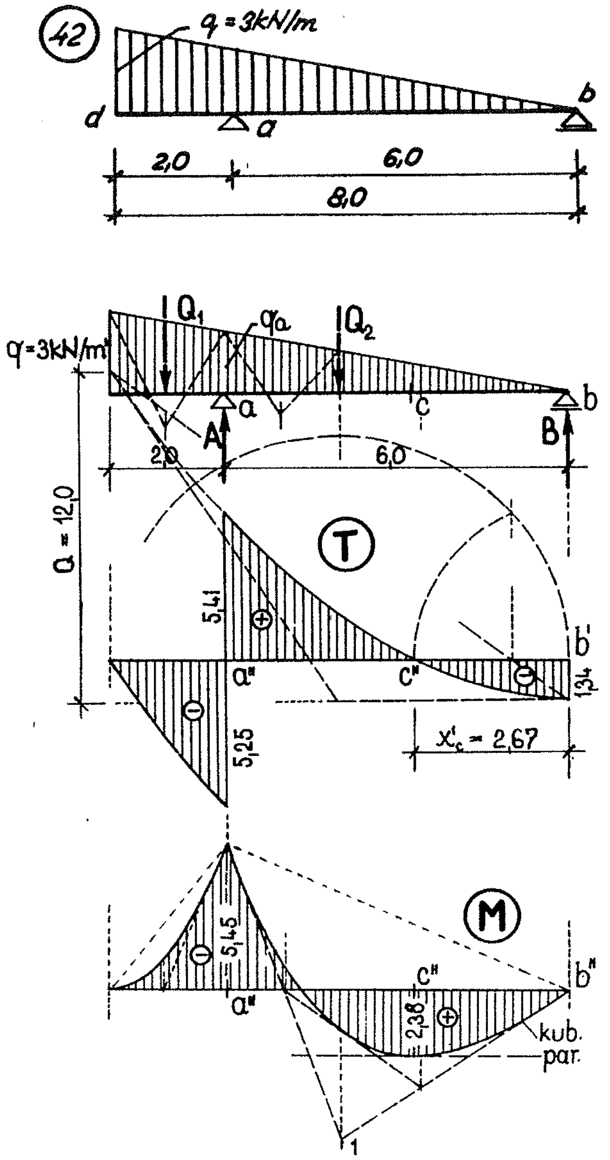
$$M_{x_1} = -1{,}0 \,.\, 1{,}5 = -1{,}5 \text{ Mpm}$$

$$M_{x_2} = B \,.\, 2{,}5 = 1{,}0 \,.\, 2{,}5 = 2{,}5 \text{ Mpm}$$

Ohybové momenty sa menia lineárne. V podperových bodoch, ako aj na obidvoch previsnutých koncoch sú momenty nulové.

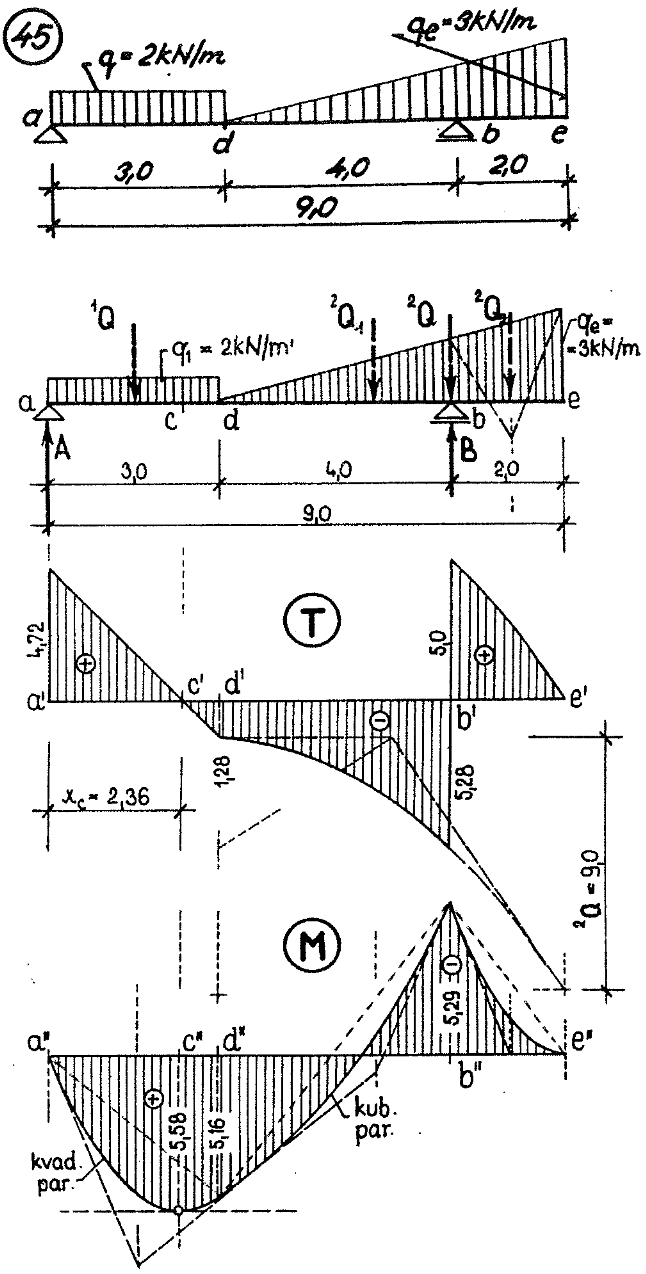
V našom prípade máme medzi podperami dve maximá; záporné maximum je v priereze x_1, kladné v priereze x_2. V obidvoch týchto prierezoch mení priečna sila znamienka; sú to teda prechodové prierezy.

42



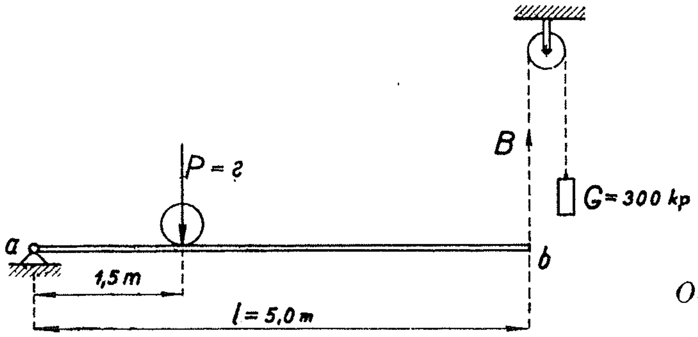
q = 3kN/m
d
a
b
2,0
6,0
8,0
Q1
Q2
qa
q=3kN/m'
A
B
c
Q = 12,0
T
5,41
5,25
a"
c"
b'
1,34
x'c = 2,67
M
5,45
2,38
b"
kub.
par.
1

45



q = 2kN/m
qe = 3kN/m
a
d
b
e
3,0
4,0
2,0
9,0
1Q
2Q1
2Q
2Q2
q1 = 2kN/m'
qe = 3kN/m
c
A
B
T
4,72
a'
c'
d'
b'
e'
5,0
1,28
5,28
xc = 2,36
2Q = 9,0
M
a"
c"
d"
b"
e"
5,58
5,16
5,29
kub.
par.
kvad.
par.

Príklad 140. Ľavý koniec vodorovnej priamej tyče s rozpätím $l = 5{,}0$ m sa pripája k pevnému kĺbu. K pravému koncu tyče je pripevnené vlákno, ktoré ide cez pevnú kladku, a na ňom je zavesené závažie veľkosti $G = 300$ kp.

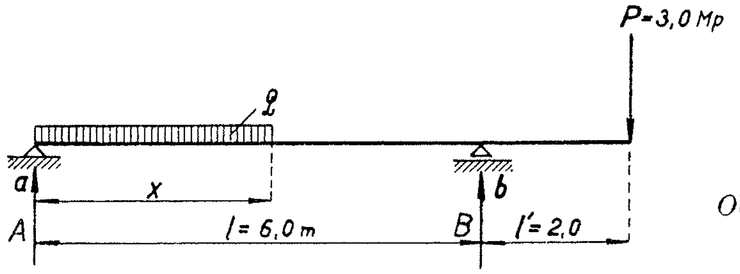


Obr. 140

Zistite veľkosť zaťaženia P, ktoré vo vzdialenosti 1,5 m od ľavého podperového bodu a uvedie naznačenú tyč do rovnováhy *(obr. 140)*.

[Zaťaženie $P = 1\,000$ kp uvedie naznačenú tyč do rovnováhy. Veľkosť vyvodenej reakcie $A = 700$ kp.]

Príklad 76. Na akej dĺžke x môže pôsobiť rovnomerné zaťaženie $q = 1200$ kp/m′, aby reakcia B neprekročila hodnotu 5 000 kp? Nech $l = 6{,}0$ m, $l' = 2{,}0$ m, $P = 3\,000$ kp *(obr. 76)*.



Obr. 76

Riešenie:

Dĺžku x určíme z momentovej podmienky k bodu a:

$$-3(2{,}0 + 6{,}0) + 5 \,.\, 6{,}0 - 1{,}2x\,\frac{x}{2} = 0$$

$$-24 + 30 - 0{,}6x^2 = 0$$

$$0{,}6x^2 = 6$$

$$x^2 = 10; \qquad x = \sqrt{10} \doteq 3{,}16 \text{ m}$$

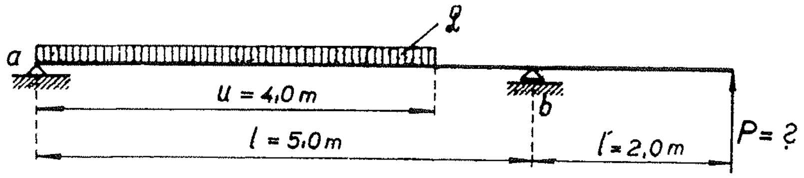
Ak rovnomerné zaťaženie pôsobí na dĺžke $x = 3{,}16$ m, reakcia B bude mať veľkosť 5 000 kp.

Kontrola výpočtu:

$$B \,.\, 6{,}0 - 3 \,.\, 8{,}0 - 1{,}2 \,.\, 3{,}16^2 \,.\, \frac{1}{2} = 0$$

$$B = \frac{24 + 6{,}0}{6{,}0} = 5{,}0 \text{ Mp}$$

Príklad 141. Aká sila P musí pôsobiť na pravom konci nosníka, aby sa reakcia B rovnala nule *(obr. 141)*?

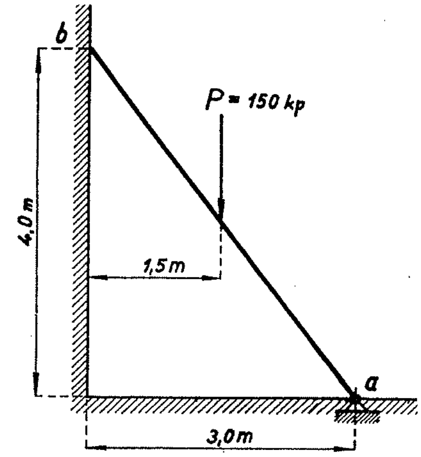


Obr. 141

Nech $l = 5{,}0$ m, $l' = 2{,}0$ m, $q = 2$ Mp/m′, $u = 4{,}0$ m.
[Sila $P \doteq 2{,}286$ Mp.]

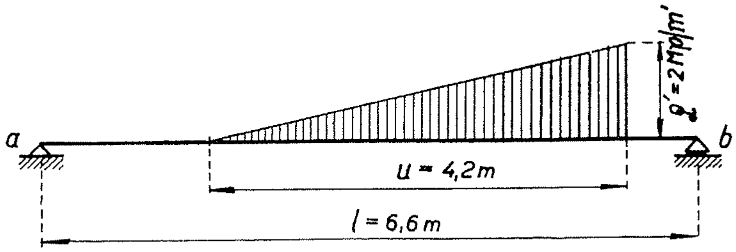
Príklad 142. Určte počtársky i graficky reakcie šikmého nosníka opretého o dokonale hladký múr. Nosník je zaťažený v strede sústredeným bremenom $P = 150$ kp; vlastnú tiaž nosníka zanedbávame. V bode a je nosník pevne podopretý, v bode b je posun možný po dokonale hladkej zvislej stene *(obr. 142)*.

[Reakcia $A \doteq 160$ kp, $B \doteq 56$ kp.]



Obr. 142

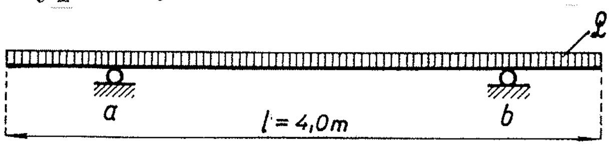
Príklad 143. Ako treba umiestniť čiastočné trojuholníkové zaťaženie, aby vyvodilo rovnaké reakcie? Nech $l = 6{,}6$ m, $u = 4{,}2$ m, $q' = 2$ Mp/m′ *(obr. 143)*.



Obr. 143

[Výslednica Q trojuholníkového zaťaženia musí ísť stredom nosníka. Potom $A = B = 2{,}1$ Mp.]

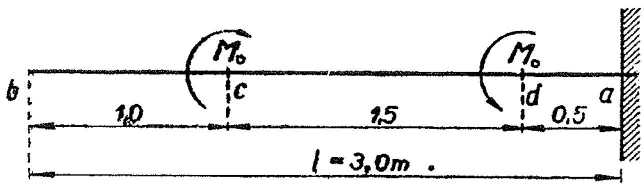
Príklad 144. Priama tyč zaťažená plným rovnomerným zaťažením sa môže valiť po vodorovnej rovine na dvoch valčekoch, ktoré môžu zaujať ľubovoľnú polohu. Vypočítajte krajné možné hodnoty podperových reakcií, ktoré vzniknú vo valčekoch. Nech dĺžka tuhej tyče $l = 4{,}0$ m, $q = 400$ kp/m′ *(obr. 144)*.



Obr. 144

[Ak vylučujeme reakcie záporného znamienka, je:
$A_{max} = 1\,600$ kp, $B_{min} = 0$. Ak chceme vyvodiť B_{max}, potom $B_{max} = 1\,600$ kp, $A_{min} = 0$.]

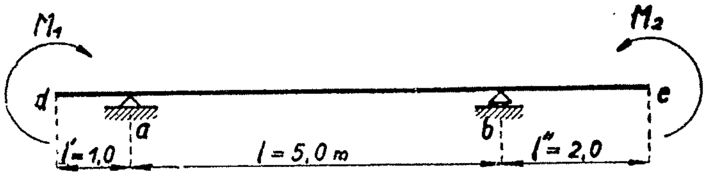
Príklad 148. Na konzolový nosník s vyložením $l = 3{,}0$ m pôsobia dve dvojice rovnakej veľkosti, ale opačného zmyslu. Určte momentový obrazec a obrazec priečnych síl. Nech $M_0 = 2$ Mpm *(obr. 148)*.



Obr. 148

[Ohybový moment sa vyskytuje iba v časti $\overline{cd}$ nosníka a jeho veľkosť $M = M_0 = 2{,}0$ Mpm. Priečna sila na celom nosníku je nulová.]

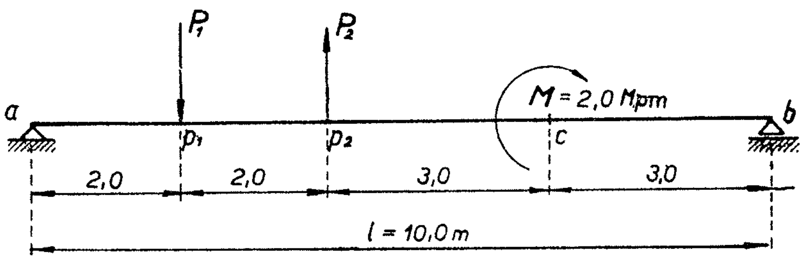
Príklad 152. Určte ohybové momenty a priečne sily nosníka s previsnutými koncami, zaťaženého dvoma momentmi $M_1 = 2{,}0$ Mpm, $M_2 = 3{,}0$ Mpm. Nech $l = 5{,}0$ m, $l' = 1{,}0$ m, $l'' = 2{,}0$ m *(obr. 152)*.



Obr. 152

[Reakcie $A = 0{,}2$ Mp $= -B$; $M_d = 2{,}0$ Mpm $= M_a$; $M_b = 3{,}0$ Mpm $= M_e$. Priečna sila medzi podperami $T_{ab} = 0{,}2$ Mp; na previsnutých koncoch niet priečnej sily.]

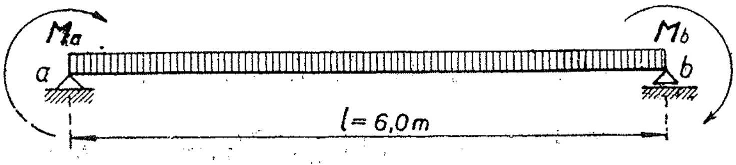
Príklad 151. Vypočítajte hodnotu ohybových momentov a priečnych síl a znázornite ich aj graficky. Nech $l = 10{,}0$ m, $P_1 = 3{,}0$ Mp, $P_2 = -1{,}5$ Mp, $M = 2{,}0$ Mpm *(obr. 151)*.



Obr.151

[Reakcie $A = 1{,}3$ Mp; $B = 0{,}2$ Mp; $M_{p_1} = 2{,}6$ Mpm; $M_{p_2} = -0{,}8$ Mpm; $M_{c_1} = -1{,}4$ Mpm; $M_{c_2} = 0{,}6$ Mpm; $T_a = A = 1{,}3$ Mp; $T_{p_1} = -1{,}7$ Mp; $T_{p_2} = 0{,}2$ Mp; $T_b = 0{,}2$ Mp.]

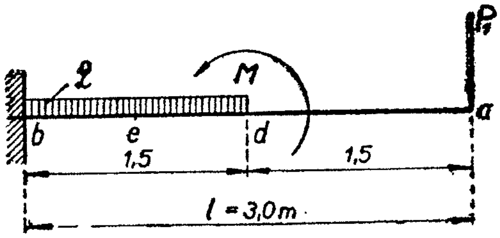
Príklad 147. Zistite maximálny ohybový moment, momentový obrazec a obrazec priečnych a osových síl. Rozpätie $l = 6{,}0$ m, $q = 900$ kp/m′, $M_a = 1\,500$ kpm $= M_b$ *(obr. 147)*.



Obr. 147

[Maximálny ohybový moment je vo vzdialenosti $c \doteq 2{,}44$ m od ľavej podpery $M_{max} = M_c = 4\,190$ kpm. Reakcia $A = 2\,200$ kp; $B = 3\,200$ kp.]

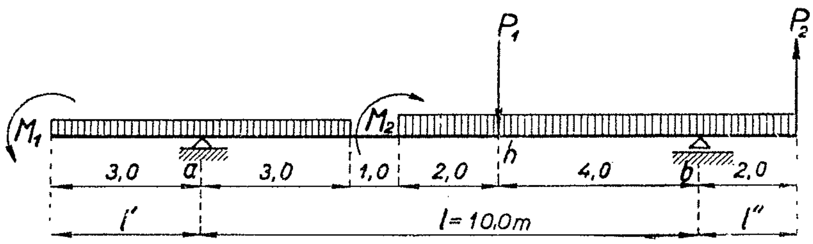
Príklad 149. Zistite počtársky momentový obrazec a obrazec priečnych síl konzolového nosníka zaťaženého kombinovaným zaťažením. Nech $l = 3{,}0$ m, $P_1 = 0{,}6$ Mp, $M = 2{,}0$ Mpm, $q = 1{,}2$ Mp/m′ *(obr. 149)*.



Obr. 149

[$M_a = 0$, $M_{d_1} = -0{,}9$ Mpm, $M_{d_2} = 1{,}1$ Mpm, $M_b = -1{,}15$ Mpm, $M_e = 0{,}312\,5$ Mpm, $T_a = 0{,}6$ Mp $= T_d$, $T_b = 2{,}4$ Mp $= T_{max}$.]

Príklad 154. Naznačte momentový obrazec a obrazec priečnych síl na základe počtárskeho riešenia. Určte M_{max}, M_a M_b, a T_{max} *(obr. 154)*. Nech $l = 10{,}0$ m, $l' = 3{,}0$ m, $l'' = 2{,}0$ m, $M_1 = -1{,}5$ Mpm, $M_2 = 3{,}0$ Mpm, $q_1 = 1{,}0$ Mp/m′, $q_2 = 1{,}4$ Mp/m′, $P_1 = 2{,}0$ Mp, $P_2 = -0{,}5$ Mp.



Obr. 154

[Reakcie $A = 8{,}99$ Mp, $B = 9{,}71$ Mp. Ohybové momenty $M_a = -6{,}0$ Mpm, $M_b = -1{,}8$ Mpm, $M_{max} = M_h = 16{,}64$ Mpm.
Priečne sily $T_{a_1} = -3{,}0$ Mp, $T_{a_2} = 5{,}99$ Mp, $T_{b_1} = 2{,}3$ Mp, $T_{b_2} = -7{,}41$ Mp, $+T_{max} = 5{,}99$ Mp $= T_{a_2}$, $-T_{max} = -7{,}41$ Mp $= T_{b_2}$.]