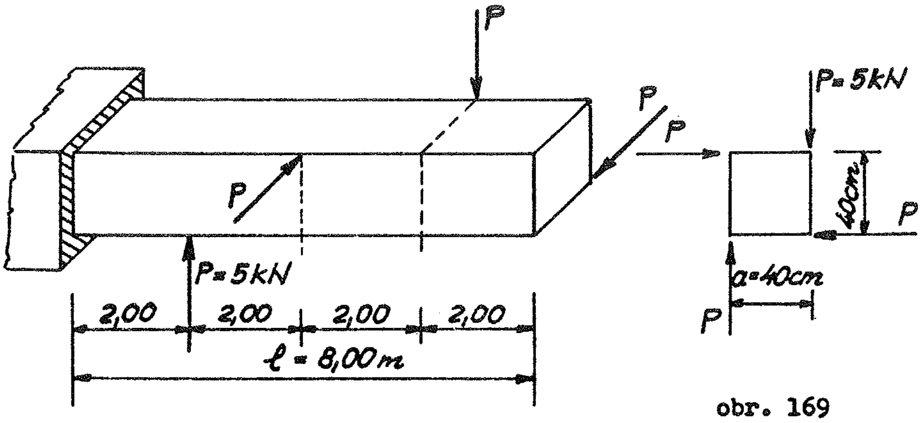
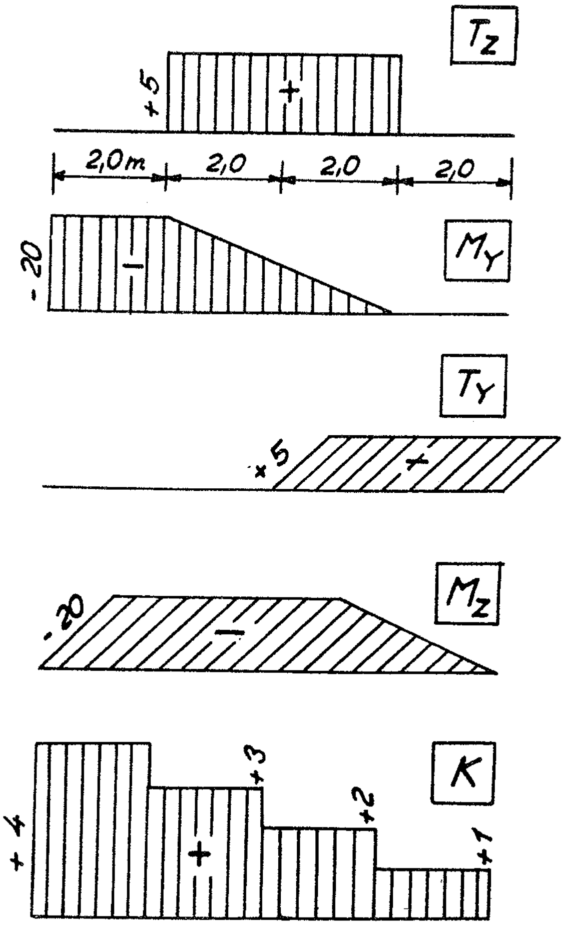
Příklad 111

Konzolový nosník je zatížen stejně velikými silami $P = 5 kN$ podle obr. 169. Určit průběhy posouvajících sil, ohybových a kroutících momentů.



obr. 169

Průběh posouvajících sil, ohybových a kroutících momentů je znázorněn na obr. 369.



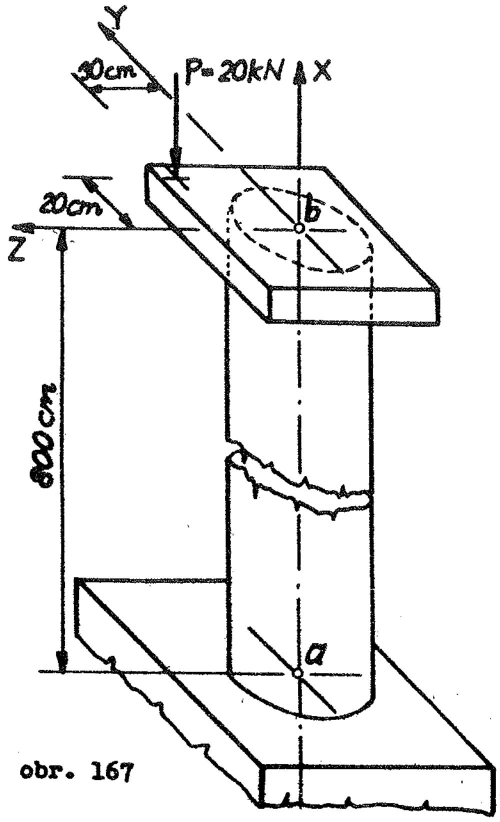
obr. 369

Příklad 110

Sloup je zatížen mimostředným zatížením podle obr. 167, na svém spodním konci je vetknutý, na horním konci je volný, vlastní tíha na 1bm $g = 0{,}400\ kN/m$. Určit průběh normálné síly, posouvajících sil a momentů.

Řešení:

Mysleme si pravotočivý pravoúhlý prostorový osový systém orientován tak, že osa X je ve svislé ose sloupu. Z hlediska pozorovatele stojícího v rovině XZ ve směru osy Z jeví se konstrukce jako vodorovný prut na levém konci vetknutý, na pravém volný, zatížení na volném konci mimostředně silou P rovnoběžnou s osou prutu, viz obr. 168a.



obr. 167

Zatížení P přemístíme do osy prutu X, což je doprovázeno dvěma vnějšími statickými momenty, a to k osám Y, Z:

$M_y = +P.e_z = +20.0{,}3 = +6\ kNm,$

$M_z = +P.e_y = +20.0{,}2 = +4\ kNm.$

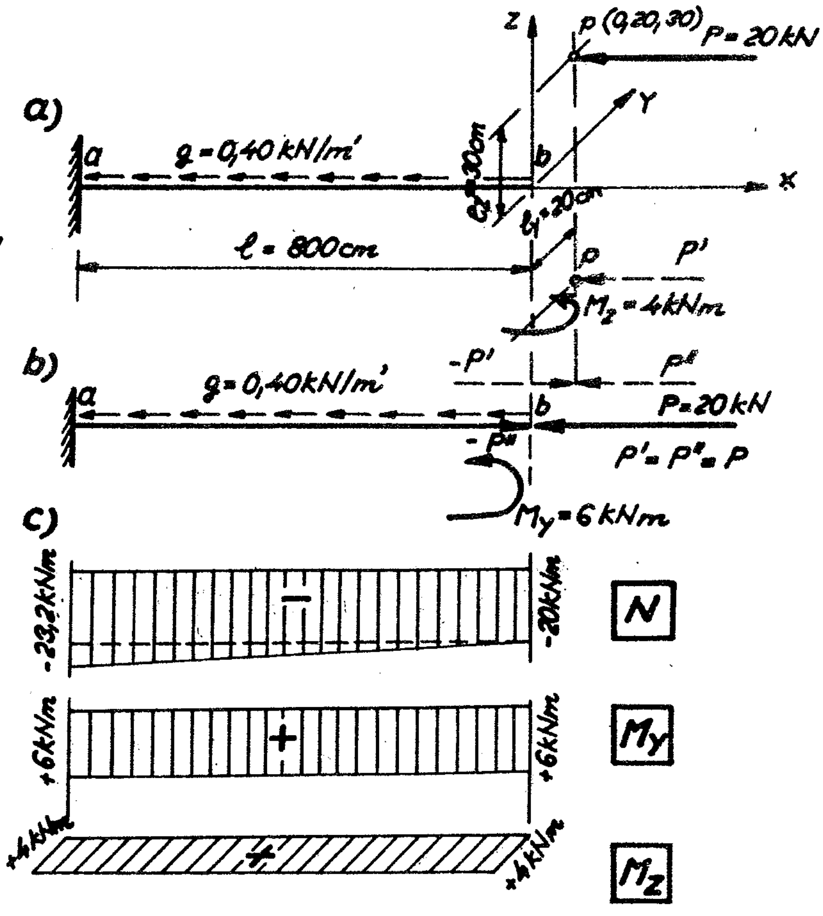
Na prut nepůsobí ani příčné ani zkrucující zatížení, proto jsou posouvající síly a kroutící momenty ve všech průřezech nulové:

$T_y = T_z = 0, \quad K = 0.$

Normálná síla N nabývá hodnot:

$N_b = -P = -20\ kN,$

$N_a = -P - g.\ell = -20 - 0{,}4.8{,}0 = -23{,}2\ kN.$



obr. 168

Ohybové momenty jsou konstantní po celé délce prutu:

$$M_y = +6\ kNm, \qquad M_z = +4\ kNm.$$

Průběh složek N, M_y, M_z je zobrazen na obr. 168c.

Složky reakce ve vetknutí $\underline{a}$:

$$A_x = +23{,}2\ kN, \quad A_y = A_z = 0,$$

$$M_x = 0, \quad M_y = +6\ kNm, \quad M_z = +4\ kNm.$$

<u>Příklad 108 :</u> Konzolový nosník obdélníkového průřezu je zatížen částečně rovnoměrným svislým zatížením q_z a vodorovnou silou P_y podle obr. 163 a.

<u>Řešení:</u>

Zatížení částečně rovnoměrné q_z na délce $\underline{d}$ a osamělé břemeno P_y přemístíme do osy prutu, obr. 163 b, t.zn. že zatížení silové, jež působí v ose prutu podle obr. 163 c, musíme doplnit zatížením momentovým příčným podle obr. 163 d, t.j. částečně rovnoměrně kroutící zatížení o intenzitě $k = q_z \cdot \frac{b}{2}$ na délce $\underline{d}$ a vnějším kroutícím momentem na volném konci b. $K_b = P_y \cdot \frac{h}{2}$

Přímý prut je na konci $\underline{a}$ dokonale vetknut, konec $\underline{b}$ je volný, a proto můžeme sečítat účinky od tohoto volného konce, aniž bychom řešili předem reakce ve vetknutí, které obdržíme jako poslední hodnoty složek výslednice vnitřních sil na levé straně nosníku.

Normálná síla je v každém průřezu nulová, $N = 0$, protože na nosník nepůsobí zatížení ve směru jeho osy.

Působením částečně rovnoměrného zatížení q_z v rovině svislé xz vznikají posouvající síly T_z a ohybové momenty M_y, které se určí známým způsobem, viz kap. 1. tohoto skripta. V průřezech napravo od zatížení q_z je $T_z = 0$, $M_y = 0$. V průřezech i v intervalu $c \leq x \leq (c+d)$ je

$$T_{iz} = q_z \cdot (c+d-x), \quad M_y = -\frac{1}{2} q_z (c+d-x)^2$$

V části vlevo od zatížení až do vetknutí v konci $\underline{a}$ je

$$T_{az} = q_z \cdot d, \quad M_y \text{ mění se lineárně od } -\frac{1}{2} q_z \cdot d^2 \text{ do } -q_z \cdot d\left(c+\frac{d}{2}\right) = M_{ay} \, .$$

Působením síly P_y ve směru osy y na volném konci $\underline{b}$ v rovině vodorovné xy vznikají posouvající síly T_y a ohybové momenty M_z, které určíme známým způsobem podle kap. 1. tohoto skripta, budeme-li přihlížet současně ke znaménkové konvenci podle obr. 160d. V obecném průřezu i, $0 \leq x \leq \ell$, určíme T_{iy} a M_{iz} podle obr. 164.

Ve vetknutí jsou hodnoty $T_{ay} = -P$, $M_{az} = +P_y \cdot \ell$.

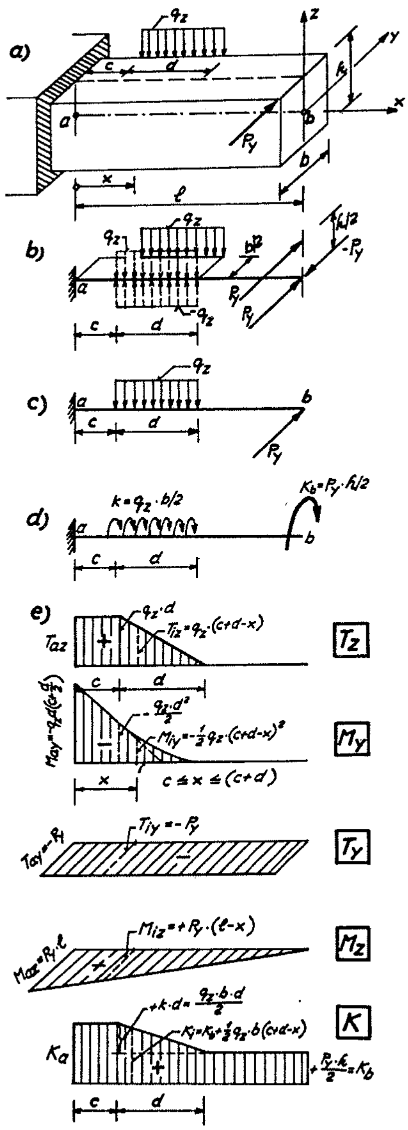
Kroutící momenty vznikají v průřezech konzoly v důsledku mimostředně působícího zatížení, viz obr. 163b a viz dále zatěžovací schéma vnějším kroutícím zatížením na obr. 163d. Vzhledem k rovnicím (3.3.4) a (3.3.5) určíme na konzole kroutící moment v průřezu obdobně jako posouvající sílu, t.j. budeme sečítat vnější kroutící zatížení od volného konce po uvažovaný průřez, viz obr. 165.

Obrazce T_z, M_y, T_y, M_z a K jsou vyneseny na obr. 163 e. Pro větší názornost jsou kresleny obrazce posouvajících sil a ohybových momentů v rovině ohybu, k níž se vztahují, t.j. T_z, M_y v rovině xz, T_y, M_z v rovině xy.

Kontrolou správnosti zjištěných průběhů složek T_z, M_y, T_y, M_z a K může být prověrka, jak jsou plněny diferenciální podmínky (3.3.1) až (3.3.5). Např. pro kroutící moment :

$$\frac{dK_i}{dx} = \frac{d\left[\frac{1}{2} P_y \cdot h + k(c+d-x)\right]}{dx}$$

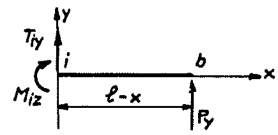
$$\frac{dK_i}{dx} = -k \, .$$



obr. 163

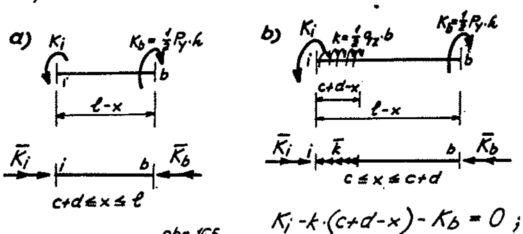
Reakce konzoly v teoretickém bodě vetknutí $\underline{a}$ má složky A_x, A_y, A_z, M_x, M_y, M_z, které jsou rovny co do velikosti vnitřním silám ; zachováme-li pro ně znaménkovou konvenci jako pro složky v řezu prutu, mají i stejná znaménka :

$$A_x = N_a = 0,$$
$$A_y = T_{ay} = -P_y,$$
$$A_z = T_{az} = +q_z \cdot d,$$
$$M_x = K_a = +\frac{1}{2} P_y \cdot h + \frac{1}{2} q_z \cdot b \cdot d,$$
$$M_y = M_{ay} = -q_z d\left(c+\frac{d}{2}\right),$$
$$M_z = M_{az} = +P_y \cdot \ell \, .$$



obr. 164

$$T_{iy} + P_y = 0 \qquad M_{iz} - P_y \cdot (\ell - x) = 0$$
$$T_{iy} = -P \qquad M_{iz} = +P_y \cdot (\ell - x)$$



obr. 165

$$K_i - K_b = 0$$
$$K_i = K_b$$
$$K_i = \frac{1}{2} P_y \cdot h$$

$$K_i - k \cdot (c+d-x) - K_b = 0 \, ;$$
$$K_i = K_b + k \cdot (c+d-x) \, ;$$
$$K_i = \frac{1}{2} P_y \cdot h + \frac{1}{2} q_z \cdot b (c+d-x)$$

Pro $x = c$

$$K_c = \frac{1}{2} P_y \cdot h + \frac{1}{2} q_z \cdot b \cdot d$$

Pro $x = 0$; $K_a = K_c$

Příklad 15.1

Průběh složek vnitřních sil na přímém vodorovném konzolovém nosníku obdélníkového průřezu pro prostorové zatížení $F_1 = F_3 = 1$ kN, $F_2 = 2$ kN, $F_4 = 1{,}5$ kN, $F_5 = 2{,}6$ kN, $q = 2$ kNm^{-1}, $\varphi = 30°$, $M_{d,x} = 1$ kNm (obr. 15.4a).

Řešení

Spojité rovnoměrné šikmé zatížení q rozložíme do dvou pravoúhlých složek q_y, q_z rovnoběžných s osami y, z

$$q_y = q\cos\varphi = 2\cdot\cos 30° = 1{,}73\,\text{kNm}^{-1},\quad q_z = q\sin\varphi = 2\cdot\sin 30° = 1{,}0\,\text{kNm}^{-1}.$$

Posuneme-li rovnoběžně osamělá břemena $F_1, F_2, \ldots, F_5$ a spojitá rovnoměrná zatížení q_y, q_z tak, aby procházela střednicí nosníku, musíme doplnit jejich účinek momentovým zatížením:

$$F_1:\ M_{1,y} = F_1\cdot\frac{h}{2} = 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4\,\text{kNm},\quad M_{1,z} = -F_1\cdot\frac{d}{2} = -1\cdot 0{,}2 = -0{,}2\,\text{kNm},$$

$$F_2:\ M_{2,x} = -F_2\cdot\frac{h}{2} = -2\cdot 0{,}4 = -0{,}8\,\text{kNm},$$

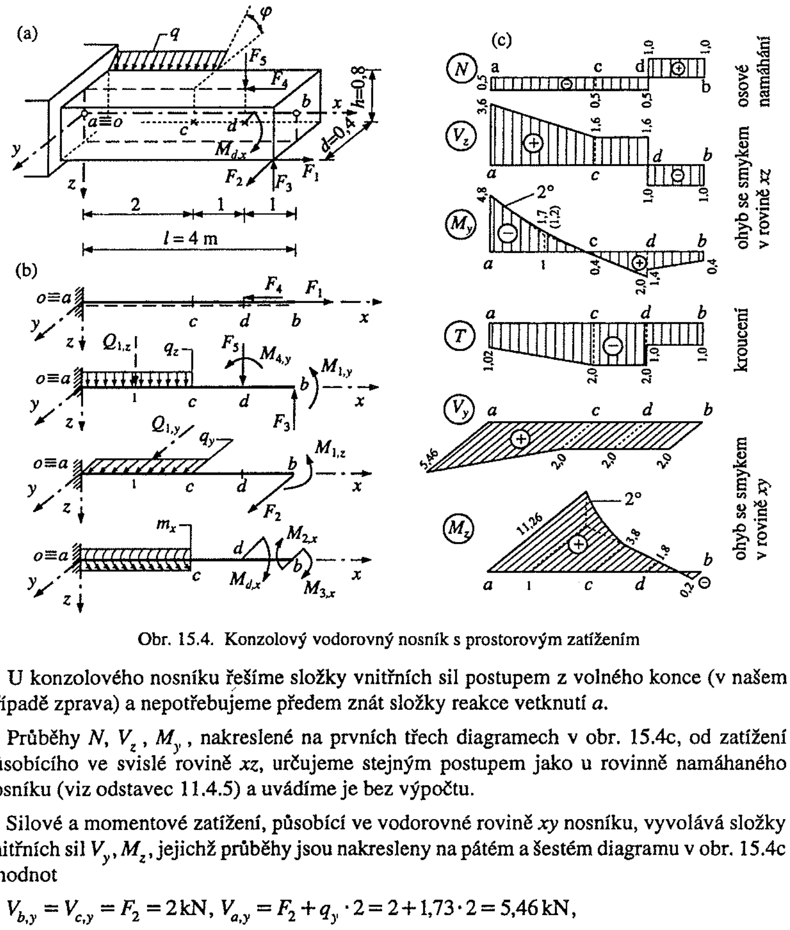
$$F_3:\ M_{3,x} = -F_3\cdot\frac{d}{2} = -1\cdot 0{,}2 = -0{,}2\,\text{kNm},$$

$$F_4:\ M_{4,y} = F_4\cdot\frac{h}{2} = 1{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}6\,\text{kNm}.$$

V případě částečných rovnoměrných spojitých zatížení q_y, q_z připojíme dvě rovnoměrná zkrucující momentová zatížení o výsledné intenzitě

$$m_x = q_y\cdot\frac{h}{2} - q_z\cdot\frac{d}{2} = 1{,}73\cdot 0{,}4 - 1\cdot 0{,}2 = 0{,}49\ \text{kNm·m}^{-1}.$$

Statické schéma zatížení v ose x, v rovinách xz a xy a zkrucujícího momentového zatížení k ose nosníku je uvedeno na obr. 15.4b.



Obr. 15.4. Konzolový vodorovný nosník s prostorovým zatížením

U konzolového nosníku řešíme složky vnitřních sil postupem z volného konce (v našem případě zprava) a nepotřebujeme předem znát složky reakce vetknutí a.

Průběhy N, V_z, M_y, nakreslené na prvních třech diagramech v obr. 15.4c, od zatížení působícího ve svislé rovině xz, určujeme stejným postupem jako u rovinně namáhaného nosníku (viz odstavec 11.4.5) a uvádíme je bez výpočtu.

Silové a momentové zatížení, působící ve vodorovné rovině xy nosníku, vyvolává složky vnitřních sil V_y, M_z, jejichž průběhy jsou nakresleny na pátém a šestém diagramu v obr. 15.4c z hodnot

$$V_{b,y} = V_{c,y} = F_2 = 2\,\text{kN},\ V_{a,y} = F_2 + q_y\cdot 2 = 2 + 1{,}73\cdot 2 = 5{,}46\,\text{kN},$$

$$M_{b,z} = -M_{1,z} = -0{,}2\,\text{kNm},\ M_{d,z} = F_2\cdot 1 - M_{1,z} = 2\cdot 1 - 0{,}2 = 1{,}8\,\text{kNm},$$

$$M_{c,z} = F_2\cdot 2 - M_{1,z} = 2\cdot 2 - 0{,}2 = 3{,}8\,\text{kNm},$$

$$M_{a,z} = F_2\cdot 4 - M_{1,z} - Q_{1,y}\cdot 1 = 2\cdot 4 - 0{,}2 + 1{,}73\cdot 2\cdot 1 = 11{,}26\,\text{kNm}.$$

Zkrucující momentové zatížení na obr. 15.4b vyvolává kroutící momenty $T = M_x$, jejichž průběh na nosníku je nakreslen na obr. 15.4c z hodnot

$$T_{bd} = M_{b,x} = M_{2,x} + M_{3,x} = -0{,}8 - 0{,}2 = -1{,}0\,\text{kNm} = T_{db},$$

$$T_{dc} = T_{db} + M_{d,x} = -1{,}0 - 1{,}0 = -2{,}0\,\text{kNm} = T_{cd} = T_{ca},$$

$$T_{ac} = T_{ca} + m_x\cdot 2 = -2{,}0 + 0{,}49\cdot 2 = -1{,}02\,\text{kNm}.$$

Zápis označení složek vnitřních sil, např. v průřezu b nosníku, je možný též ve tvaru: $N_{x,b}$, $V_{y,b}$, $V_{z,b}$, $M_{y,b}$, $M_{z,b}$, $T_b = M_{x,b}$.

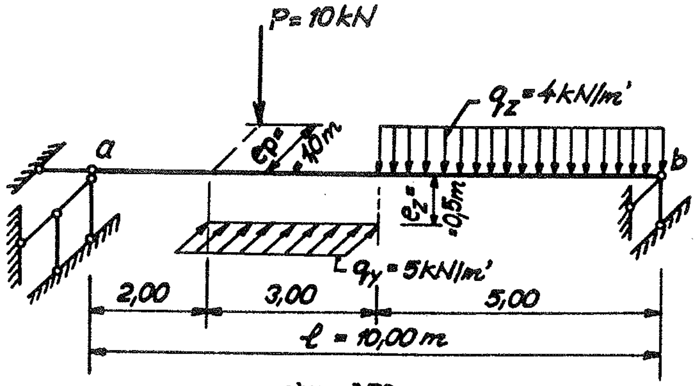
Z hodnot složek vnitřních sil v průřezu a konzolového nosníku (obr. 15.4c) lze stanovit velikosti složek reakcí dokonalého vetknutí a:

$$R_{ax} = 0{,}5\,\text{kN}\ (\rightarrow),\quad R_{ay} = 5{,}46\,\text{kN}\ (\nearrow),\quad R_{az} = 3{,}6\,\text{kN}\ (\uparrow),$$

$$M_{ax} = 1{,}02\,\text{kNm}\ (\gg),\quad M_{ay} = 4{,}8\,\text{kNm}\ (\swarrow\!\!\swarrow),\quad M_{az} = 11{,}26\,\text{kNm}\ (\Uparrow).$$

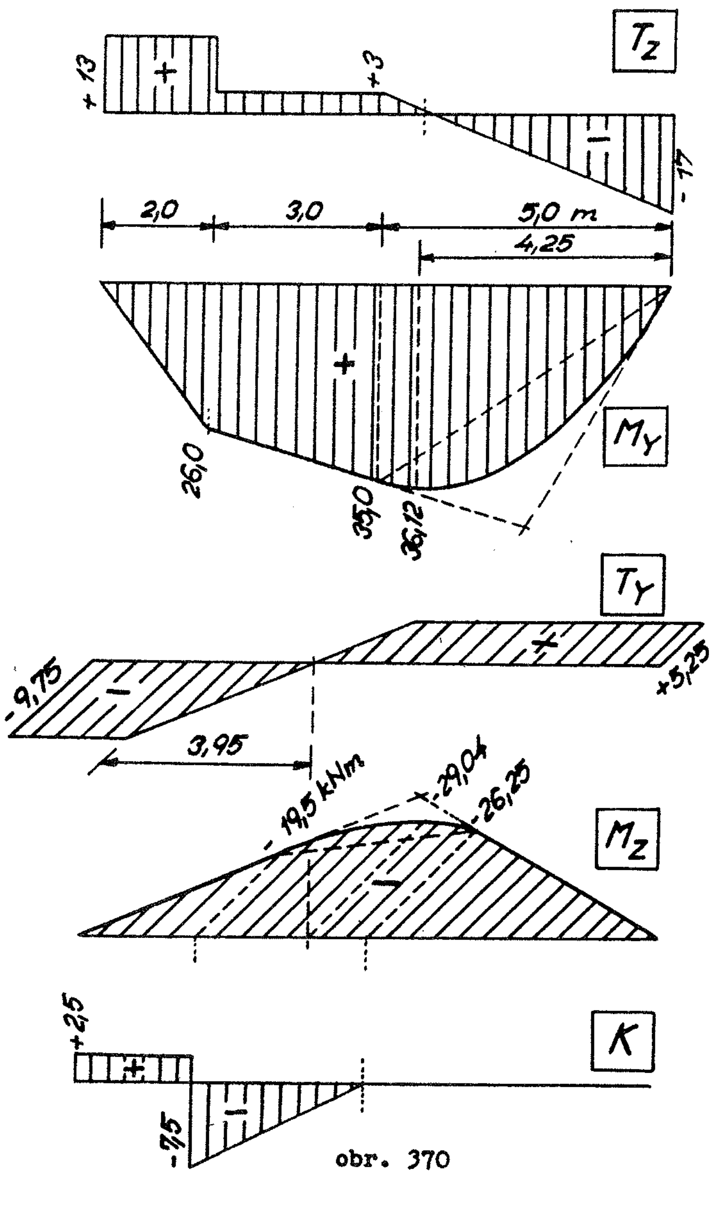
Příklad 112

Určit průběhy složek N, T_y, T_z, K, M_y, M_z na přímém prutu $\overline{ab}$, jenž je prostorově staticky určitě podepřený a zatížený podle obr. 170.



obr. 170

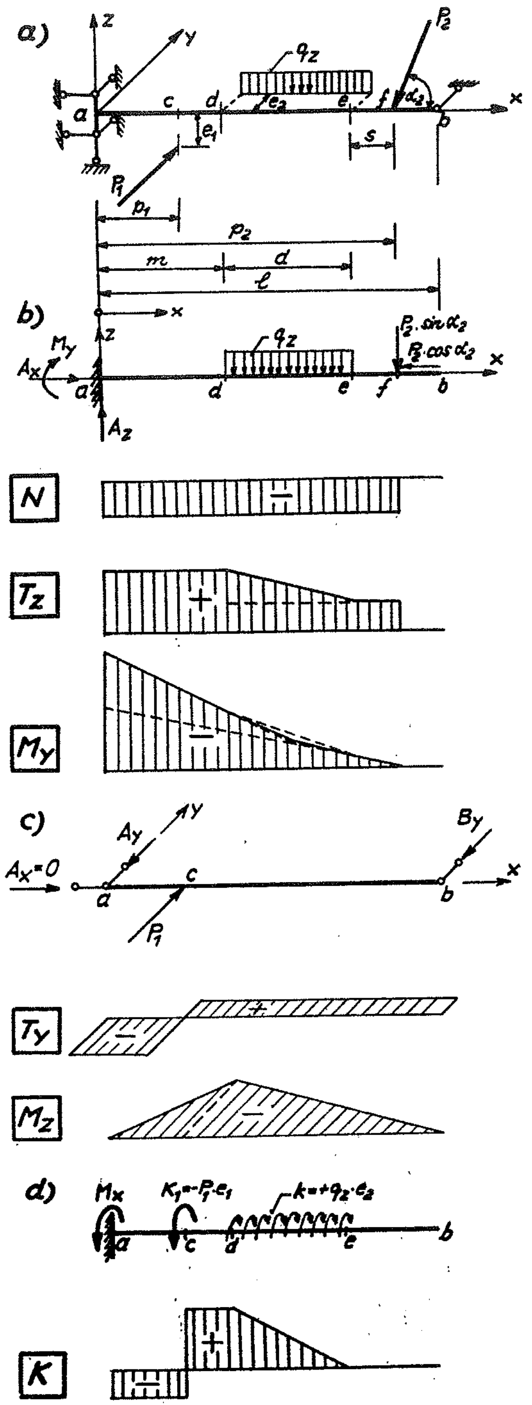
Průběh vnitřních složek je vyznačen na obr. 370.



obr. 370

Příklad 109

Přímý prut staticky určitě podepřený v prostoru je zatížen prostorově podle obr. 166a. Na jeho konci a je vazba pětinásobná (neposuvný válcový kloub), na konci b je kyvný prut ve směru osy y. Částečné rovnoměrné zatížení svislé q_z působí mimostředně k ose prutu, osamělé zatížení P_1 působí ve směru osy y mimostředně k ose prutu, osamělé zatížení P_2 působí ve svislé rovině xz šikmo k ose prutu.



obr. 166

Řešení:

Neznámé složky reakcí vazeb A_x, A_y, A_z, M_x, M_y v podepření na konci a, B_y v podepření na konci b, určíme ze šesti podmínek rovnováhy v prostoru přímo, nebo je podle principu superpozice určíme z dílčích zatěžovacích stavů podle obr. 166b,c,d:

$$A_x = P_2 \cdot \cos \alpha_2 ,$$
$$A_y = -P_1 \cdot \frac{\ell - p_1}{\ell} ,$$
$$A_z = +P_2 \cdot \sin \alpha_2 + q_z \cdot d ,$$
$$B_y = -P_1 \cdot \frac{p_1}{\ell} ,$$
$$M_y = -P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot p_2 - q_z \cdot d \left(m + \frac{d}{2}\right) ,$$
$$M_x = +q_z \cdot e_2 \cdot d - P_1 \cdot e_1 .$$

Průběh normálné síly N a složek ohybu T_z, M_y v rovině xz určíme podle zatěžovacího schématu na obr. 166b, prut $\overline{ab}$ uvažuje se jako konzola, vetknutá na konci a.

Normálná síla N má v intervalu $0 \leq x \leq p_2$ konstantní hodnotu

$$N = -P_2 \cdot \cos \alpha_2$$

Posouvající síla T_z nabývá hodnot :

$$T_{fz} = +P_2 \cdot \sin \alpha_2 ,$$
$$T_{ez} = +P_2 \cdot \sin \alpha_2 ,$$
$$T_{dz} = +P_2 \cdot \sin \alpha_2 + q_z \cdot d ,$$
$$T_{az} = +P_2 \cdot \sin \alpha_2 + q_z \cdot d .$$

Ohybový moment M_y nabývá hodnot :

$$M_{fy} = 0 ,$$
$$M_{ey} = -P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot s$$
$$M_{dy} = -P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (s+d) - \tfrac{1}{2} q_z \cdot d^2 ,$$
$$M_{ay} = -P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot p_2 - q_z d \left(c + \frac{d}{2}\right) .$$

Složky ohybu T_y, M_z v rovině vodorovné xy určíme podle zatěžovacího schématu na obr. 166c, prut $\overline{ab}$ uvažuje se v této rovině jako nosník prostý.

Posouvající síla T_y nabývá hodnot :

v úseku $\overline{ac}$: $T_{ay} = A_y = -P_1 \dfrac{\ell - p_1}{\ell}$,

v úseku $\overline{cb}$: $T_{by} = -B_y = +P_1 \dfrac{p_1}{\ell}$.

Ohybový moment M_z nabývá hodnot :

$M_{az} = M_{bz} = 0$,

$M_{cz} = A_y \cdot p_1 = -P_1 \cdot \dfrac{p_1(\ell - p_1)}{\ell}$.

Prut je skrucován důsledkem mimostředného zatížení P_1 a q_z vzhledem k ose prutu. Průběh kroutícího momentu K na prutu $\overline{ab}$ určíme podle zatěžovacího schematu vnějším kroutícím zatížením podle obr. 166d, kde $K_1 = -P_1 \cdot e_1$, $k = +q_z \cdot e_2$ na délce d. Kroutící moment K nabývá hodnot:

$$K_b = K_e = 0 , \quad K_d = +k \cdot d = +q_z \cdot e_2 \cdot d ,$$
$$K_c = K_d + K_1 = +q_z \cdot e_2 d - P_1 \cdot e_1 , \quad K_a = K_c = +q_z \cdot e_2 \cdot d - P_1 \cdot e_1 .$$

Obrazce složek N, T_z, M_y, T_y, M_z, K jsou vyneseny na obr. 166.

Příklad 15.2

Průběh složek vnitřních sil na vodorovném nosníku podepřeném šesti kyvnými pruty podle obr. 15.5a pro zatížení: $q_z = 2$ kNm^{-1}, $F_2 = 4$ kN s $\alpha_2 = 60°$ ve svislé rovině xz, $q_y = 1$ kNm^{-1} ve vodorovné rovině xy a osamělé břemeno $F_1 = 3$ kN působící ve směru osy y ve vzdálenosti $p_1 = 0{,}2$ m od osy nosníku.

Řešení

Uspořádání pěti kyvných prutů na levém konci a nosníku pomocí krátké tuhé části je ekvivalentní s pětinásobnou vazbou, tj. *neposuvným válcovým kloubem s osou* $O \equiv y$ (obr. 15.5b), který má pět složek reakcí R_{ax}, R_{ay}, R_{az}, M_{ax}, M_{az} (obr. 15.5c). Pravý konec b nosníku je podepřen svislým kyvným prutem s reakcí R_{bz}, která zabraňuje jeho posunutí ve svislém směru.

Při ohybu ve svislé rovině xz působí nosník jako prostý nosník (se složkami reakcí R_{ax}, R_{az}, R_{bz}), kdežto při ohybu ve vodorovné rovině xy jako konzolový nosník (se složkami reakcí R_{ax}, R_{ay}, M_{az}). Při osovém namáhání a při kroucení se uplatňuje příslušná vazba na levém konci a nosníku (s reakcí R_{ax} a M_{ax}).

Výpočet složek reakcí vnějších vazeb provedeme ze šesti statických podmínek rovnováhy obecné prostorové soustavy sil na obr. 15.5c. Po rozkladu F_2 do pravoúhlých složek

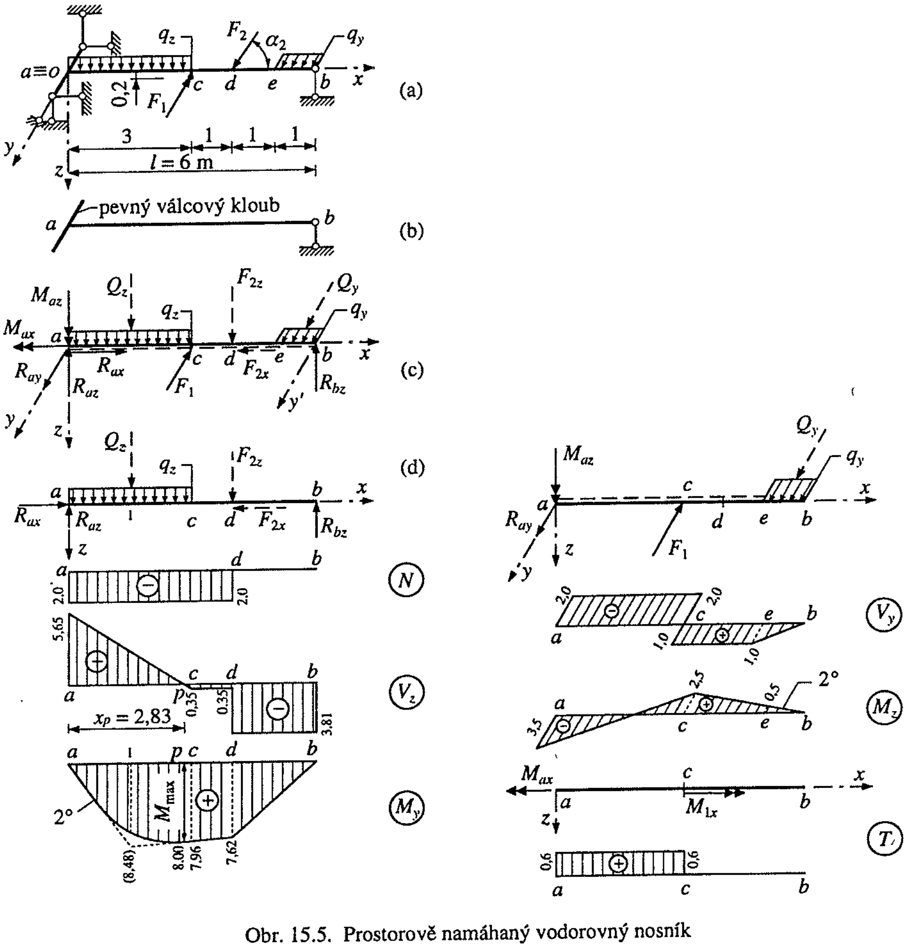
$$F_{2x} = 4 \cdot \cos 60° = 2\,\text{kN}, \quad F_{2z} = 4 \cdot \sin 60° = 3{,}46\,\text{kN}$$

a nahrazení spojitých rovnoměrných zatížení q_y, q_z náhradními břemeny

$$Q_y = q_y \cdot 1 = 1\,\text{kN}, \quad Q_z = q_z \cdot 3 = 6\,\text{kN},$$

nabývají statické podmínky rovnováhy tvary:

$$\begin{aligned}
&1)\ \sum F_{ix} = 0: \quad R_{ax} - F_{2x} = 0 \Rightarrow R_{ax} = 2\,\text{kN},\\
&2)\ \sum F_{iy} = 0: \quad R_{ay} + Q_y - F_1 = 0 \Rightarrow R_{ay} = 2\,\text{kN},\\
&3)\ \sum M_{iy} = 0: \quad R_{bz} \cdot 6 - F_{2z} \cdot 4 - Q_z \cdot 1{,}5 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 3{,}81\,\text{kN},\\
&4)\ \sum M_{iy'} = 0: \ -R_{az} \cdot 6 + Q_z \cdot 4{,}5 + F_{2z} \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{az} = 5{,}65\,\text{kN},\\
&5)\ \sum M_{ix} = 0: \ -M_{ax} + F_1 \cdot 0{,}2 = 0 \Rightarrow M_{ax} = 0{,}6\,\text{kNm},\\
&6)\ \sum M_{iz} = 0: \quad M_{az} + Q_y \cdot 5{,}5 - F_1 \cdot 3 = 0 \Rightarrow M_{az} = 3{,}5\,\text{kNm}.
\end{aligned}$$



Obr. 15.5. Prostorově namáhaný vodorovný nosník

Kontrola: $\sum F_{iz} = 0 \ : \ -R_{az} - R_{bz} + Q_z + F_{2z} = 0.$

Správné smysly složek reakcí jsou shodné se smysly předpokládanými na obr. 15.5c.

Statické schéma zatížení v rovinách xz, xy a zkrucujícího momentového zatížení kolem osy x nosníku i s příslušnými složkami reakcí vazeb je uvedeno společně s průběhy složek vnitřních sil na prostorově namáhaném nosníku (uvádíme bez výpočtu) na obr. 15.5d.

Příklad 113

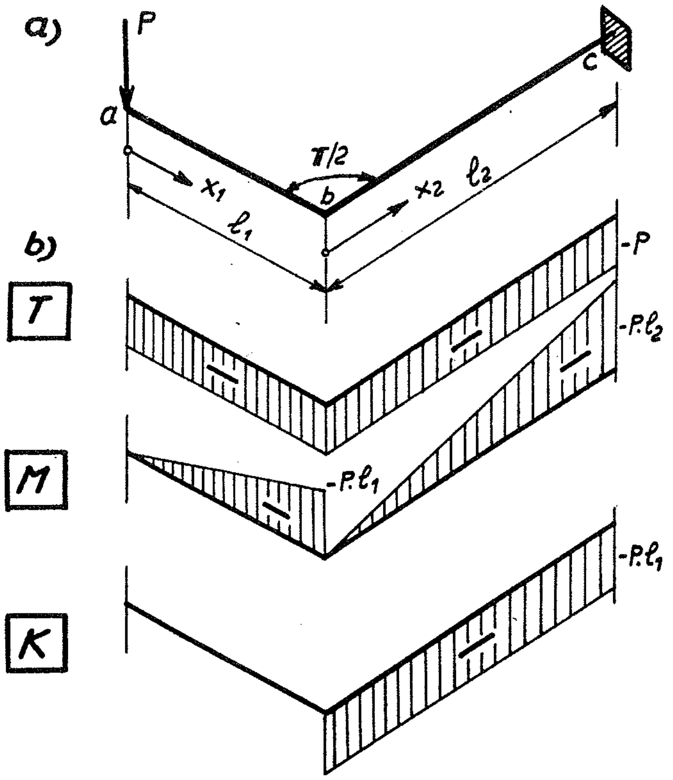
Určit průběh T, M, K na konzolovém balkonovém nosníku se střednicí lomenou v pravém úhlu, jenž je zatížen na volném konci osamělým břemenem P, viz obr. 175a.

Průběh T, M, K je vykreslen na obr. 175b.
Správnost průběhu T, M, K můžeme zkontrolovat podle diferenciálních podmínek (3.6) :

v části $\overline{ab}$
$$\frac{dT_i}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}(-P) = 0, \quad p(x_1) = 0$$
$$\frac{dM_i}{dx_1} = -P = T_i \;, \quad \frac{dK_i}{dx_1} = 0, \; k(x_1) = 0 .$$

Obdobně postupujeme v části $\overline{bc}$.

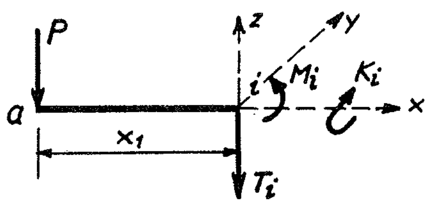
Jinou kontrolu poskytuje návaznost sil a momentů v uzlu $\underline{c}$ podle rovnic (3.7) a (3.10) : $T_{b1} = T_{b2} \; (=-P); \; K_{b2} = M_{b1} \; (=-P.\ell_1); \; M_{b2} = -K_{b1} \; (=0)$.



obr. 175

Řešení :

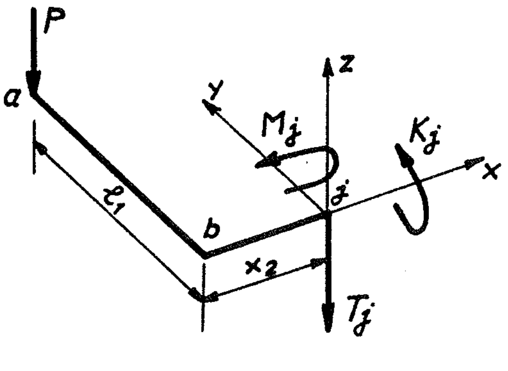
V části $\overline{ab}$ určíme průběh T, M, K, jako na $\underline{\text{konzole}}$ vetknuté v $\underline{b}$ do části $\overline{bc}$, zatížené na volném konci $\underline{a}$, obr. 176.



obr. 176

$$T_a = T_i = T_{b1} = -P ,$$
$$M_a = 0, \; M_i = -P.x_1 , \; M_{b1} = -P.\ell_1 ,$$
$$K_a = K_i = K_{b1} = 0 .$$

V části $\overline{bc}$ určíme hodnoty T, M, K v libovolném bodě podle obr. 177.



obr. 177

$\sum P_z = 0 :$
$$T_{b2} = T_j = T_c = -P$$
$\sum M_y = 0 :$
$$M_{b2} = 0 , \; P.x_2 + M_j = 0 \Rightarrow$$
$$M_j = -P.x_2 ,$$
$$M_c = -P.\ell_2$$
$\sum M_x = 0 :$
$$P.\ell_1 + K_j = 0$$
$$K_{b2} = K_j = K_c = -P.\ell_1$$

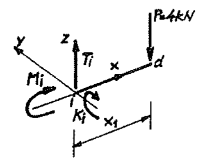
Příklad 114

Určit průběh T, M, K na konzolovém balkonovém nosníku se střednicí dvakrát zalomenou se zatížením podle obr. 178a.

Řešení :

Kladný smysl oběhu podél střednice je zvolen od volného konce d .
Postupně budeme vyšetřovat části $\overline{dc}$, $\overline{cb}$, $\overline{ba}$:

Interval $\overline{dc}$, viz obr. 179:



obr. 179

$T_i - P = 0$,

$T_d = T_i = T_{c1} = +P = +4kN$;

$M_d = 0$;

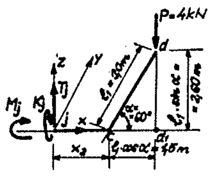
$M_i + P.x_1 = 0 \Rightarrow$

$M_i = -P.x_1$;

$M_{c1} = -P.\ell_1 = -4.3 = -12kNm$;

$K_d = K_i = K_{c1} = 0.$

Interval $\overline{ce}$, viz obr. 180:



obr. 180

$\Sigma P_z = 0$:

$T_{c2} = T_j = T_e = +4\,kN$

$\Sigma M_y = 0$:

$M_j + P(\ell_1 \cdot \cos\alpha + x_2) = 0$,

$M_j = -P(\ell_1 \cdot \cos\alpha + x_2)$,

$x_2 = 0 \rightarrow M_{c2} = -4.1{,}5 = -6{,}0kNm$,

$x_2 = \frac{\ell_2}{2} \rightarrow M_e = -4(1{,}5+3) = -18{,}0kNm$,

$\Sigma M_x = 0$:

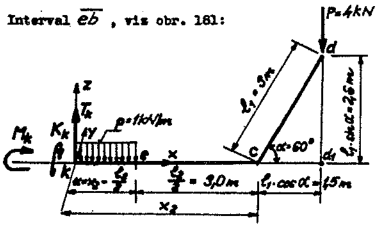
$K_j - P.\ell_1 \cdot \sin\alpha = 0$,

$K_j = +P.\ell_1 \cdot \sin\alpha$,

$K_{c2} = K_j = K_e = +4.2{,}60 =$

$= +10{,}4\,kNm$

Interval $\overline{eb}$, viz obr. 181:



obr. 181

$\Sigma P_z = 0$: $T_k - P - p(x_2 - \frac{\ell_2}{2}) = 0$,

$T_k = +P + p(x_2 - \frac{\ell_2}{2})$;

$x_2 = \frac{\ell_2}{2} \rightarrow T_e = +4kN$,

$x_2 = \ell_2 \rightarrow T_{b2} = P + \frac{1}{2}p\ell_2 = +4 + \frac{1 \times 6}{2} = +7kN$

$\Sigma M_y = 0$: $M_k + P.(\ell_1 \cdot \cos\alpha + x_2) +$

$+ p\,\frac{u^2}{2} = 0$,

$M_k = -P(\ell_1 \cdot \cos\alpha + x_2) - \frac{1}{2}pu^2$;

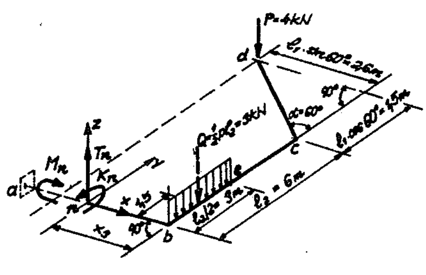
$x_2 = \frac{\ell_2}{2} \rightarrow M_e = -18kNm$

$x_2 = \ell_2 \rightarrow M_{b2} = -4(1{,}5+6) - \frac{1}{2}1.3^2 = -34{,}5kNm.$

$\Sigma M_x = 0$: $K_k - P.\ell_1 \cdot \sin\alpha = 0 \rightarrow K_k = +P.\ell_1 \cdot \sin\alpha$

$K_e = K_k = K_{b2} = +4 \cdot 2{,}6 = +10{,}4\,kNm.$

Interval $\overline{ba}$, viz obr. 182 :



obr. 182

$\Sigma P_z = 0$: $T_n - Q - P = 0$,

$T_n = P + Q \rightarrow T_{b3} = T_n =$

$T_a = +7kN.$

$\Sigma M_y = 0$: $M_n - P(\ell_1 \sin\alpha -$

$- x_3) + Q.x_3 = 0$,

$M_n = +P(\ell_1 \sin\alpha - x_3) - Q.x_3$;

$x_3 = 0 \rightarrow M_{b3} = +4.2{,}6 =$

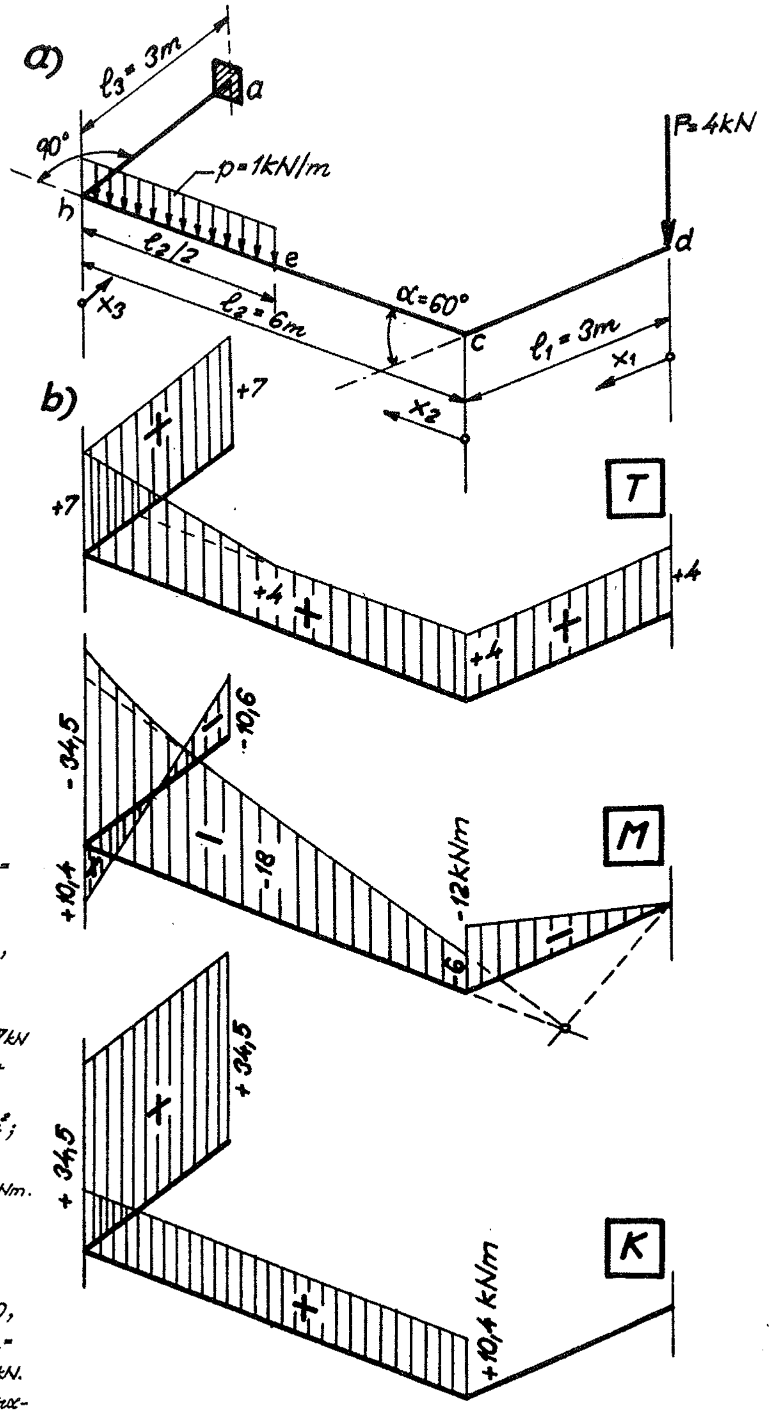
$= +10{,}4kNm$,

$x_3 = \ell_3 \rightarrow M_a = +4(2{,}6-3) -$

$-3.3 = -10{,}6kNm.$

$\Sigma M_x = 0$: $K_n - P(\ell_1 \cos\alpha + \ell_2) - Q \cdot \frac{\ell_2}{4} = 0$,

$K_n = +P(\ell_1 \cos\alpha + \ell_2) + Q \cdot \frac{\ell_2}{4}$; $K_{b3} = K_n = K_a = +4(1{,}5+6) + 3\frac{6}{4} = +34{,}5kNm.$



obr. 178

Průběh T, M, K je vykreslen na obr. 178b.
Správnost průběhu T, M, K lze kontrolovat diferenciálními rovnicemi (3.6), což se ponechává čtenáři, nebo návazností sil a momentů v uzlech b , C podle rovnic (3.7) až (3.10).

Pro uzel b platí při zvoleném kladném smyslu oběhu střednice, viz rovn. (3.9):

$T_{b3} = T_{b2} = +7kN$, $M_{b3} = K_{b2} \Rightarrow +10{,}4kNm = +10{,}4\,kNm$,

$K_{b3} = -K_{b2} \Rightarrow +34{,}5kNm = -(-34{,}5)\,kNm$.

Pro uzel C platí, viz rovn. (3.8) pro $\alpha = +60°$:

$T_{c2} = T_{c1} = +4kN$, $M_{c2} = M_{c1} \cdot \cos\alpha + K_{c1} \cdot \sin\alpha \Rightarrow -6{,}0 = -12{,}0 \cdot 5 + 0$,

$K_{c2} = -M_{c1} \cdot \sin\alpha + K_{c1} \cdot \cos\alpha \Rightarrow +10{,}4 = -(-12{,}0 \cdot 0{,}866) + 0.$

Příklad 15.3

Průběh složek vnitřních sil V, M, T na půdorysně lomeném konzolovém nosníku (obr. 15.8a,b) pro svislé zatížení $F = 2$ kN, $q_1 = 1$ kNm^{-1}, $q_2 = 2$ kNm^{-1}.

Řešení

Vnitřní síly V, M, T budeme určovat postupem od volného konce a. Rovněž kladný smysl postupu podél střednice nosníku zvolíme od volného konce k vetknutí (a–b–c–d), viz obr. 15.8a.

Prut a–b:

Posouvající síla $V(x_1)$, ohybový moment $M(x_1)$ a kroutící moment $T(x_1)$ v libovolném průřezu m_1

$$V(x_1) = -F - q_1 x_1 = -2 - x_1,$$

$$M(x_1) = -F x_1 - \frac{1}{2} q_1 x_1^2 = -2x_1 - 0{,}5x_1^2,$$

$$T(x_1) = 0;$$

v koncových průřezech a, b

$$V(x_1 = 0) = V_a = -2\,\text{kN},$$

$$V(x_1 = l_1) = V_b = -2 - 2 = -4\,\text{kN},$$

$$M(x_1 = 0) = M_a = 0,$$

$$M(x_1 = l) = M_b = -2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2^2 = -6\,\text{kNm}.$$

Prut b–c:

$V(x_2)$, $M(x_2)$, $T(x_2)$ v libovolném průřezu m_2

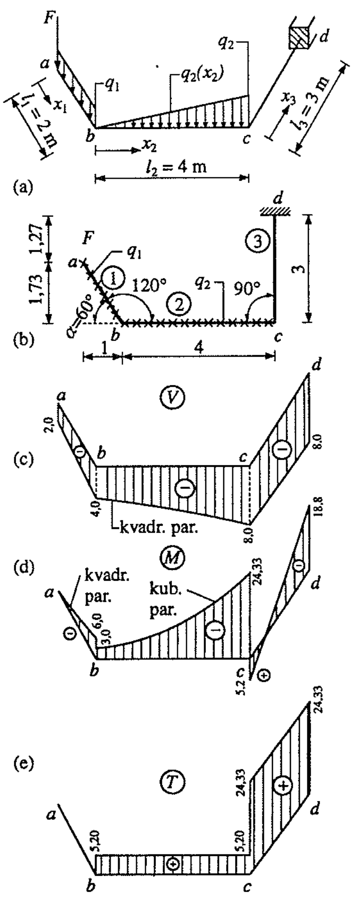
$$V(x_2) = -F - q_1 l_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{l_2} x_2 \cdot x_2 = $$

$$= -4 - 0{,}25x_2^2,$$

$$M(x_2) = -F(1 + x_2) - q_1 l_1 (0{,}5 + x_2) -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{l_2} x_2 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{3} = -3 - 4x_2 - \frac{1}{12} x_2^3,$$

$$T(x_2) = F \cdot 1{,}73 + q_1 l_1 \cdot \frac{1{,}73}{2} = 5{,}20\,\text{kNm};$$



Obr. 15.8. Konzolový lomený balkonový nosník

v koncových průřezech b, c

$$V_b = -4\,\text{kN}, \quad V_c = -4 - 0{,}25 \cdot 4^2 = -8\,\text{kN}, \quad M_b = -3\,\text{kNm},$$

$$M_c = -3 - 4 \cdot 4 - \frac{1}{12} \cdot 4^3 = -24{,}33\,\text{kNm}, \quad T_b = T_c = 5{,}20\,\text{kNm}.$$

Prut c – d:

$V(x_3)$, $M(x_3)$, $T(x_3)$ v libovolném průřezu m_3

$$V(x_3) = -F - q_1 l_1 - \frac{1}{2} q_2 l_2 = -8\,\text{kN},$$

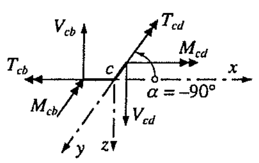
$$M(x_3) = F(1{,}73 - x_3) + q_1 l_1 (0{,}5 \cdot 1{,}73 - x_3) - \frac{1}{2} q_2 l_2 x_3 = 5{,}20 - 8x_3,$$

$$T(x_3) = F(1 + l_2) + q_1 l_1 (0{,}5 + l_2) + \frac{1}{2} q_2 l_2 \cdot \frac{1}{3} l_2 = 24{,}33\,\text{kNm};$$

v koncových průřezech c, d

$$V_c = V_d = -8\,\text{kN}, \quad M_c = 5{,}20\,\text{kNm}, \quad M_d = 5{,}20 - 8 \cdot 3 = -18{,}80\,\text{kNm},$$

$$T_c = T_d = 24{,}33\,\text{kNm}.$$



Obr. 15.9. Uvolněný uzel c

Spojením obrazců V_i, M_i, T_i z jednotlivých prutů $i = 1, 2, 3$ získáme výsledné obrazce V, M, T (obr. 15.8c,d,e) balkonového nosníku. Je možné postupovat také tak, že postupně řešíme průběhy jednotlivých složek vnitřních sil na celém balkonovém nosníku.

Proveďme kontrolu návaznosti sil a momentů alespoň v jednom lomu (uzlu) c balkonového nosníku. Po uvolnění uzlu c a zavedení složek vnitřních sil s kladnými smysly v řezech těsně při zalomení (obr. 15.9), plynou ze tří statických podmínek rovnováhy

$$\sum F_{iz} = 0 : -V_{cb} + V_{cd} = 0,$$

$$\sum M_{ix} = 0 : -T_{cb} + M_{cd} = 0,$$

$$\sum M_{iy} = 0 : -M_{cb} - T_{cd} = 0$$

vztahy

$$V_{cd} = V_{cb}, \quad M_{cd} = T_{cb}, \quad T_{cd} = -M_{cb}$$

shodné s výrazy (15.13) při zalomení prutu doleva o $\alpha = -90°$. Dosazením příslušných hodnot z obr. 15.8c,d,e je ověřena správnost řešení.

Z výše uvedeného vyplývá, že

- při přechodu přes zalomení nosníku zachovává posouvající síla V svou velikost včetně znaménka, nepůsobí-li v místě lomu svislé osamělé břemeno,
- ohybový moment M a kroutící moment T probíhají přes zalomení prutu nespojitě a vzájemně se doplňují.

Příklad 125

Určit průběh vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém prutu, jenž je na volném konci zatížen silou P podle obr. 201a, část $\overline{ab}$ je svislá, část bcd je vodorovná, síla P je svislá.

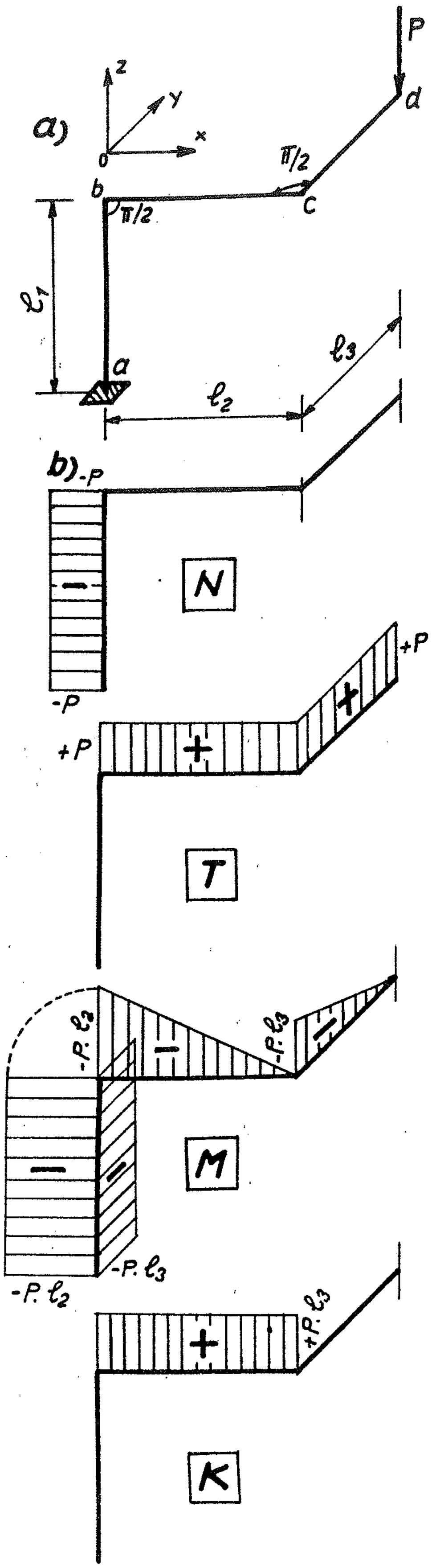
Řešení:

Z podmínky rovnováhy ve směru osy Z plyne, že normálná síla N vznikne jen v prutu $\overline{ab}$, $N = -P$ konstantní po celé délce prutu. Budeme-li uvažovat část bcd jako balkonový nosník vetknutý v b, pak posouvající síly v části cd, bc jsou stejné, $T = +P$, a ohybové momenty jsou: $M_{d3} = 0$, $M_{c3} = -P.\ell_3$, $M_{c2} = 0$, $M_{b2} = -P.\ell_2$; kroutící moment vznikne v prutu bc, $K = +P.\ell_3 [K = -(-P.\ell_3)$ podle (3.9) pro zalomení doprava. Část nosníku abc lze v dalším považovat za lomenou konzolu v rovině xz, vetknutou v a, pro niž platí v její rovině rovnost ohybových momentů v uzlu b, $M_{b1} = M_{b2} = -P.\ell_2$, v prutech k sobě kolmých, $\overline{ab} \perp bc$, mění se v uzlu b normálná síla v posouvající a naopak.

Část abc lze však považovat i za balkonový nosník vetknutý v a, zatížený příčným, kroutícím momentem K v části bc, pak platí pro zalomení doleva podle (3.10):

$M'_{b1} = -K = -P\ell_3$

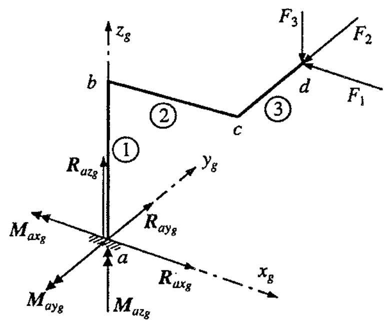
Průběh N, T, M, K je znázorněn na obr. 201b.



obr. 201

Příklad 15.5

Stanovte průběh složek vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém nosníku, sestávajícím ze tří přímých částí délek $l_1 = 5$ m, $l_2 = 4$ m, $l_3 = 3$ m navzájem spojených monoliticky pod pravými úhly, pro zatížení osamělými břemeny $F_1 = 10$ kN, $F_2 = F_3 = 20$ kN (obr. 15.11a).



Obr. 15.11a. Prostorově lomený konzolový nosník

Řešení

Složky reakcí dokonalého vetknutí a lomeného konzolového nosníku (obr. 15.11a) stanovíme ze šesti statických podmínek rovnováhy (3.58) o velikostech:

$$R_{ax_g} = F_1 = 10\,\text{kN},$$

$$R_{ay_g} = F_2 = 20\,\text{kN},$$

$$R_{az_g} = F_3 = 20\,\text{kN},$$

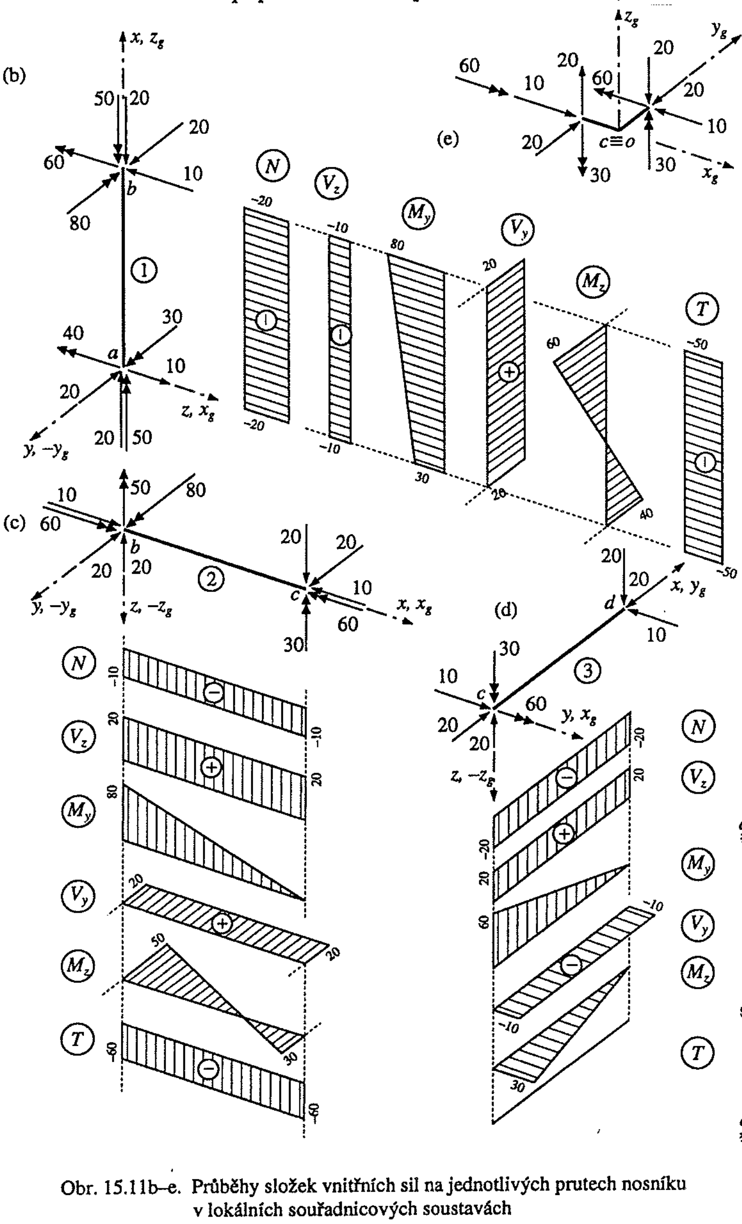
$$M_{ax_g} = F_2 l_1 - F_3 l_3 = 40\,\text{kNm},$$

$$M_{ay_g} = -F_1 l_1 + F_3 l_2 = 30\,\text{kNm},$$

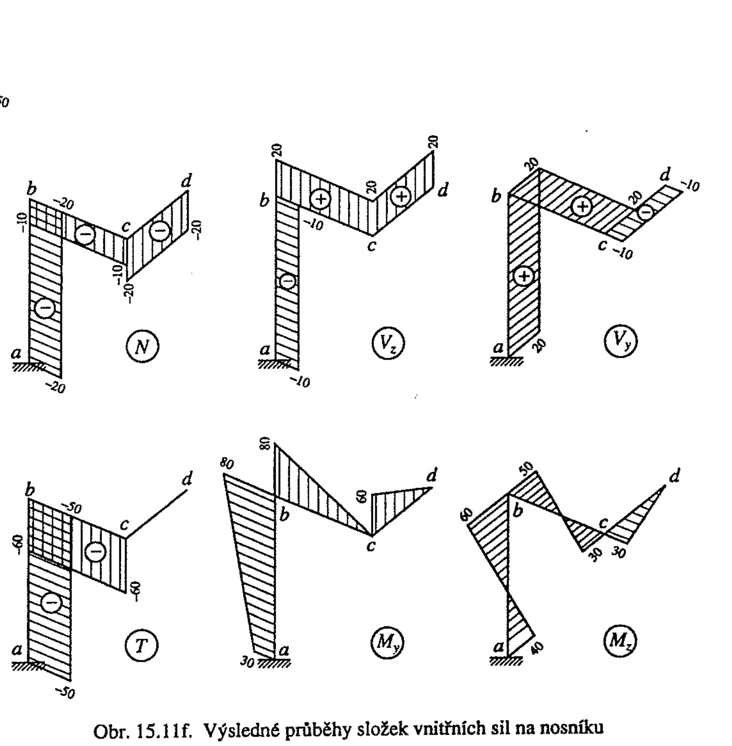
$$M_{az_g} = -F_1 l_3 + F_2 l_2 = 50\,\text{kNm}.$$

Jejich správné smysly ve vektorovém zobrazení jsou shodné s předpokládanými smysly na obr. 15.11a. Koncové síly a momenty na jednotlivých prutech $1 \equiv \overline{ab}$, $2 \equiv \overline{bc}$, $3 \equiv \overline{cd}$ nosníku jsou i s daným zatížením a průběhy složek vnitřních sil nakresleny na obr. 15.11b–d. Výsledné obrazce šesti složek vnitřních sil N, V_y, V_z, T, M_y, M_z na celém lomeném nosníku jsou zobrazeny v axonometrickém pohledu na obr. 15.11f. Jsou získány spojením odpovídajících průběhů složek vnitřních sil na jednotlivých prutech 1, 2, 3 vztažených k jejich lokálním souřadnicovým soustavám. Ověření rovnováhy jednoho uzlu nosníku, např. c, je provedeno na obr. 15.11e.

Výpočet složek vnitřních sil na prostorově lomeném konzolovém nosníku je možné rovněž provádět postupem od volného konce d nosníku směrem k dokonalému vetknutí a. V takovém případě nemusíme předem určovat složky reakcí dokonalého vetknutí nosníku.



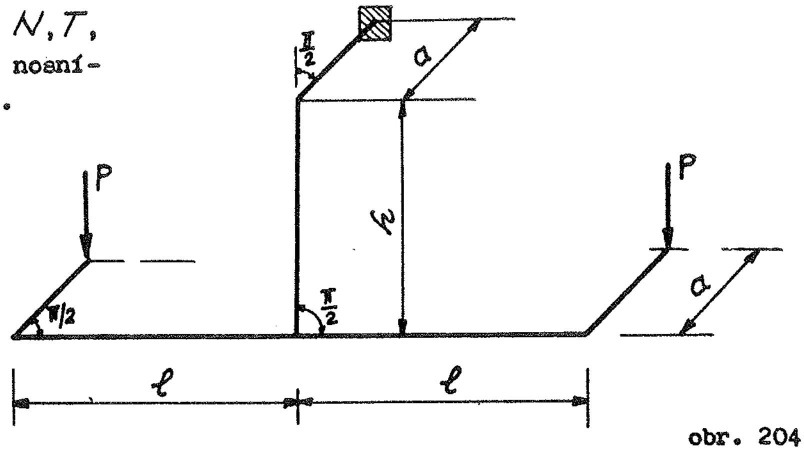
Obr. 15.11b–e. Průběhy složek vnitřních sil na jednotlivých prutech nosníku v lokálních souřadnicových soustavách



Obr. 15.11f. Výsledné průběhy složek vnitřních sil na nosníku

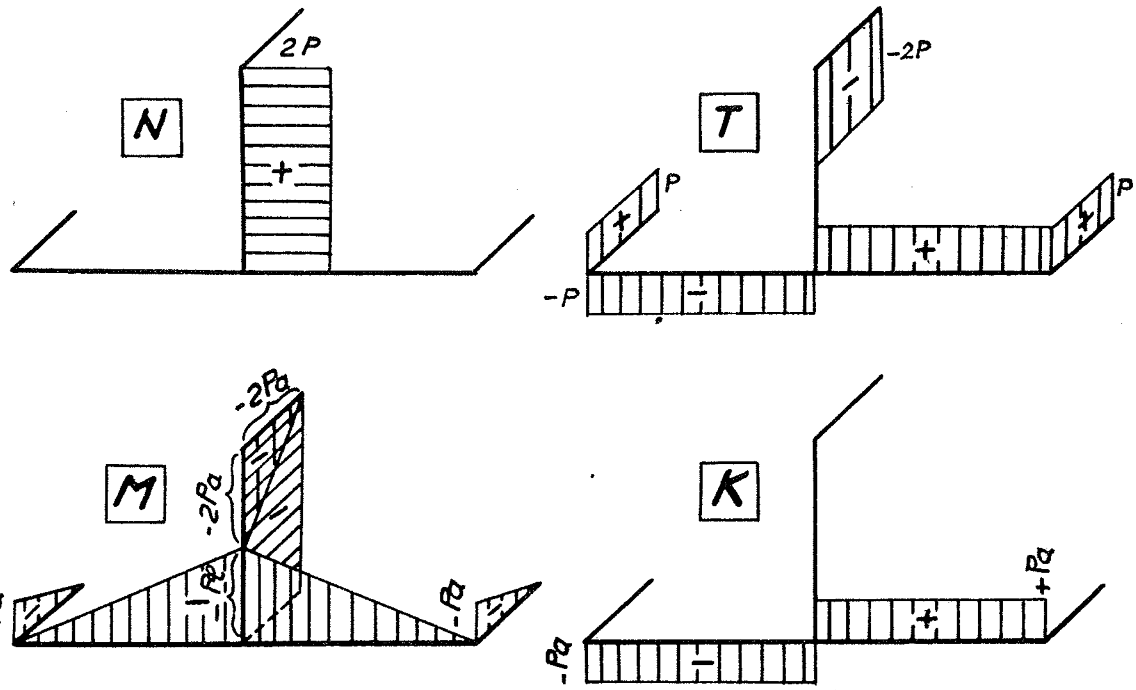
Příklad 127

Určit průběh N, T, M, K na lomeném nosníku podle obr. 204.



obr. 204

Průběh N, T, M, K je vyznačen na obr. 375.



obr. 375

Příklad 15.6

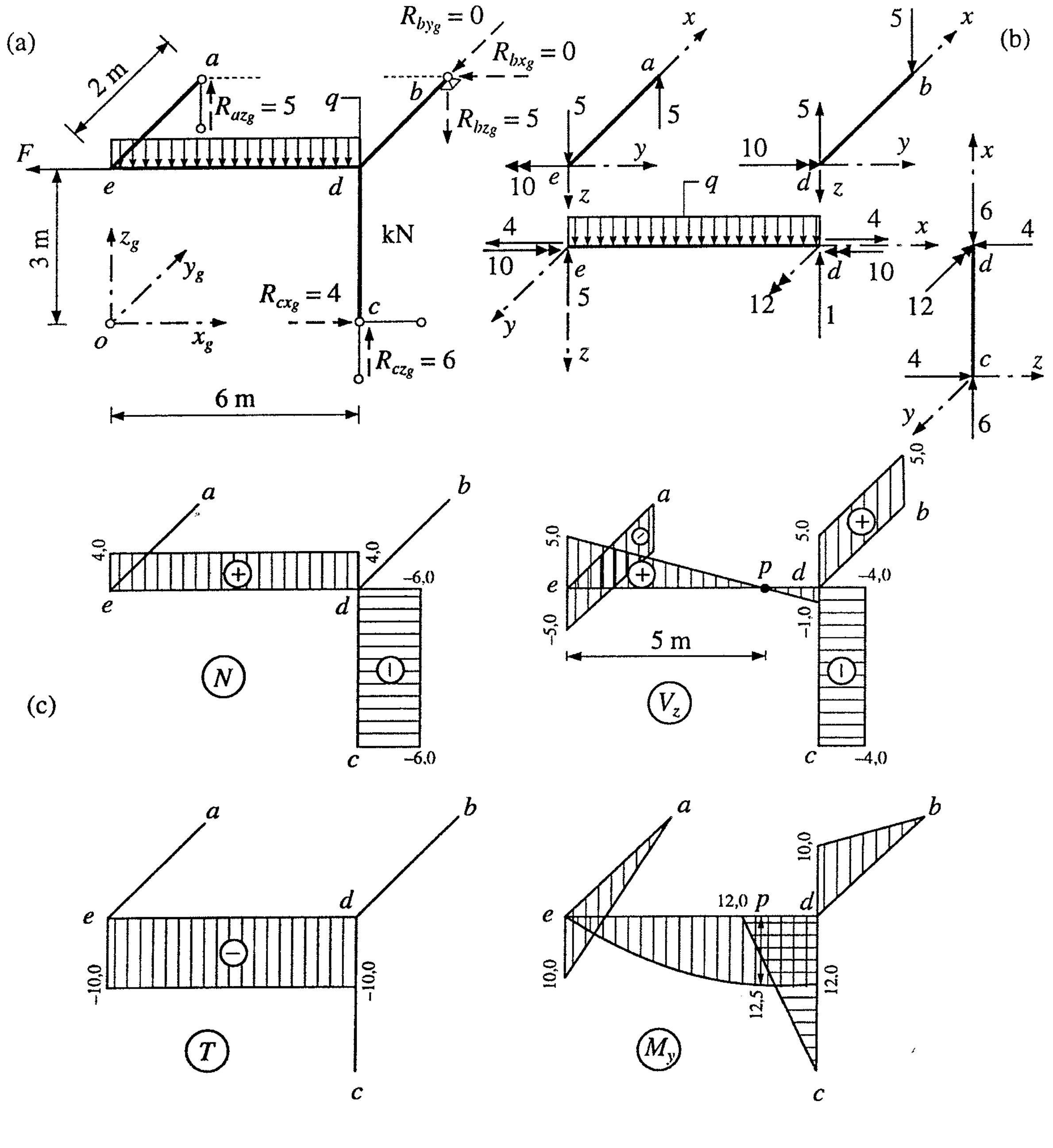
Průběh složek vnitřních sil na prostorově lomeném nosníku podepřeném třemi kyvnými pruty a pevným kulovým kloubem pro zatížení $F = 4$ kN, $q = 1$ kNm^{-1} (obr. 15.12a).

Řešení

Složky reakcí vnějších vazeb (obr. 15.12a) ze statických podmínek rovnováhy (3.58):

$$R_{az_g} = 5\,\text{kN}, \quad R_{bx_g} = R_{by_g} = 0, \quad R_{bz_g} = 5\,\text{kN}, \quad R_{cx_g} = 4\,\text{kN}, \quad R_{cz_g} = 6\,\text{kN}.$$

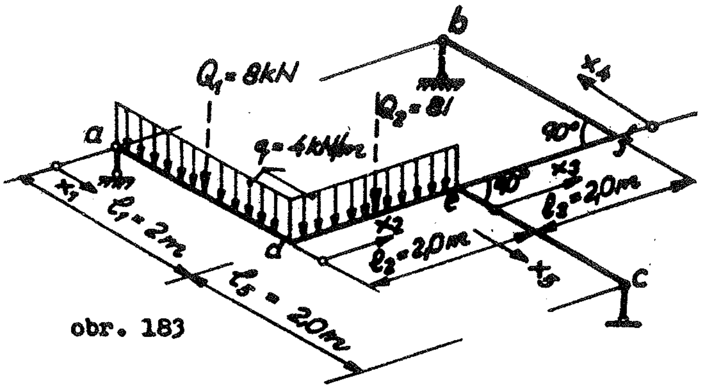
Koncové síly a momenty i s daným zatížením na jednotlivých prutech nosníku jsou uvedeny na obr. 15.12b. Výsledné průběhy složek vnitřních sil na prostorově lomeném nosníku vzhledem k lokálním souřadnicovým soustavám jednotlivých prutů jsou nakresleny na obr. 15.12c.



Obr. 15.12. Prostorově lomený nosník z příkladu 15.6

Příklad 115

Určit průběh T, M, K na balkonovém nosníku s lomenou střednicí, jenž je podepřen kluzně ve třech bodech a zatížen podle obr. 183.



obr. 183

Řešení :

V kluzných podporách a, b, c určíme podporové reakce A, B, C z podmínek rovnováhy, např.: momentových k osám $\overline{ab}, \overline{ad}, \overline{bf}$:

$$\Sigma M_{ab} = 0,\ C.4 - 8(1+2) = 0 \Rightarrow$$
$$C = 6kN,$$
$$\Sigma M_{ad} = 0,\ B.4 + C.2 - 8.1 = 0 \Rightarrow$$
$$B = -1kN,$$
$$\Sigma M_{bf} = 0,\ -A.4 - C.2 + 8(4+3) = 0 \Rightarrow$$
$$A = 11kN,$$
$$\Sigma P_z = 0,\ A + B + C = 16kN.$$

Smysl postupu podél střednice zvolíme podle obr. 183, t.j. $a-d-e-f-b,\ e-c$, souřadnice $x_1, x_2, \dots x_5$ a veličiny T, M, K označíme v jednotlivých úsecích indexy $1, 2, \dots 5$.

T, M, K určíme v kterémkoli průřezu podle obr. 184a z podmínek rovnováhy. Tak např. pro průřez i v úseku $\overline{ef}$:

$$\Sigma P_z = 0:\ A - q(\ell_1 + \ell_2) + C - T_{i3} = 0$$
$$T_{i3} = A + C - q\cdot(\ell_1 + \ell_2)$$
$$T_{e3} = T_{i3} = T_{f3} = 11 + 6 - 4(2+2) = 1kN$$
$$\Sigma M_y = 0:\ M_{i3} - A(\ell_2 + x_3) - C.x_3 + q\ell_1(\ell_2 + x_3) + q\ell_2\left(\frac{\ell_2}{2} + x_3\right) = 0$$
$$M_{i3} = A(\ell_2 + x_3) + C.x_3 - q\ell_1(\ell_2 + x_3) - q\ell_2\left(\frac{\ell_2}{2} + x_3\right)$$

$$x_3 = 0,\ M_{e3} = 11.2 + 6.0 - 4.2(2+0) - 4.2\left(\frac{2}{2} + 0\right) = -2kNm,$$
$$x_3 = \ell_3,\ M_{f3} = 11.(2+2) + 6.2 - 4.2(2+2) - 4.2\left(\frac{2}{2} + 2\right) = 0kNm.$$
$$\Sigma M_x = 0:\ K_{i3} - A\cdot\ell_1 + C\cdot\ell_5 + q\ell_1\cdot\frac{\ell_1}{2} = 0$$
$$K_{i3} = A\cdot\ell_1 - C\cdot\ell_5 - q\frac{\ell_1^2}{2},$$
$$x_3 = 0,\ K_{e3} = 11.2 - 6.2 - 4\cdot\frac{2^2}{2} = +2kNm,$$
$$K_{f3} = K_{e3}.$$

Interval $\overline{ad}$:

$$T_{i1} = A - q\cdot x_1,\ T_{a1} = +11kN,\ T_{d1} = +3kN,$$
$$M_{i1} = A\cdot x_1 - q\frac{x_1^2}{2},\ M_{a1} = 0,\ M_{d1} = +14kNm,$$
$$K_{a1} = K_{i1} = K_{d1} = 0.$$

Interval $\overline{de}$:

$$T_{i2} = A - q(\ell_1 + x_2),\ T_{d2} = +3kN,\ T_{e2} = -5kN,$$
$$M_{i2} = A\cdot x_2 - q\ell_1 x_2 - q\frac{x_2^2}{2},\ M_{d2} = 0,\ M_{e2} = -2kNm,$$
$$K_{i2} = A\cdot\ell_1 - q\frac{\ell_1^2}{2},\ K_{d2} = K_{i2} = K_{e2} = +14kNm.$$

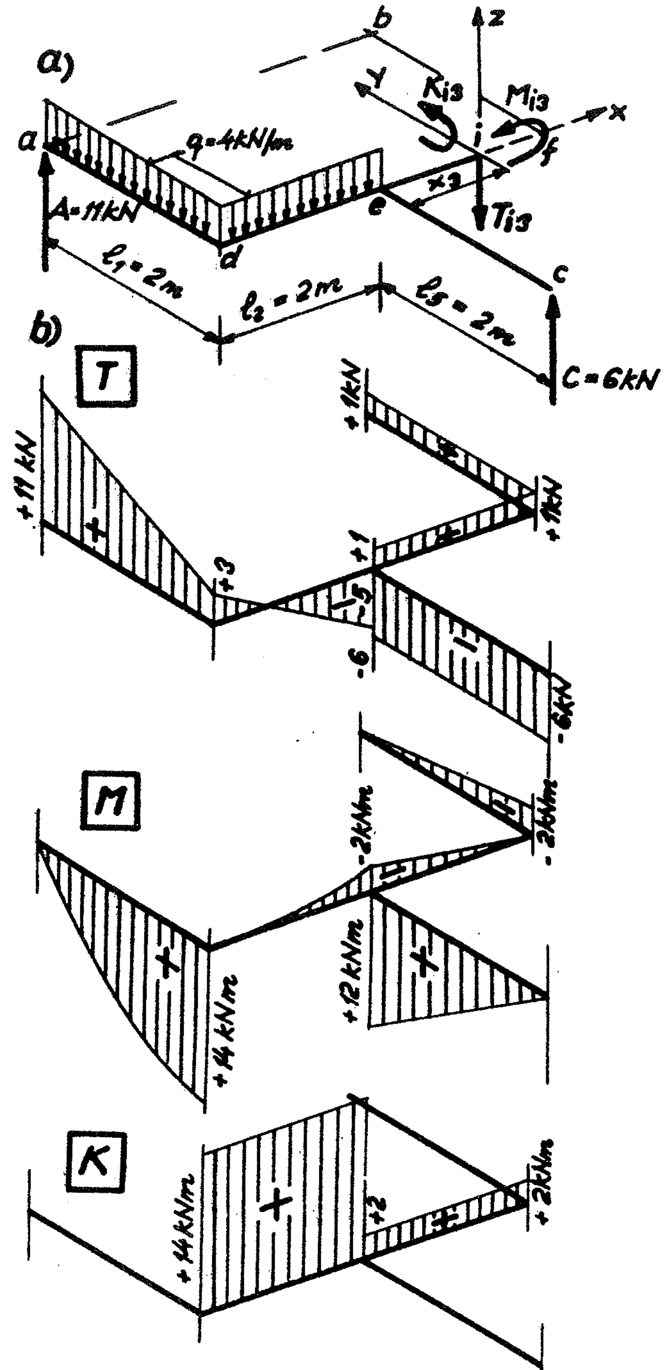
Interval $\overline{fb}$:

$$T_{i4} = A + C - q(\ell_1 + \ell_2),\ T_{f4} = T_{i4} = T_{b4} = +1kN,$$
$$M_{i4} = -A(\ell_1 - x_4) + C(\ell_5 + x_4) - q\ell_2 x_4 + q\ell_1\left(\frac{\ell_1}{2} - x_4\right),\ M_{f4} = -2kNm,\ M_{b4} = 0,$$
$$K_{i4} = A(\ell_2 + \ell_3) - q\ell_1(\ell_2 + \ell_3) - q\ell_2\left(\frac{\ell_2}{2} + \ell_3\right) + C.\ell_3,\ K_{f4} = K_{i4} = K_{b4} = 0.$$

Interval $\overline{ec}$:

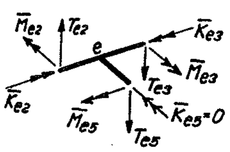
$$T_{i5} = -C,\ T_{e5} = T_{i5} = T_{c5} = -6kN,$$
$$M_{i5} = C.(\ell_5 - x_5),\ M_{e5} = +12kNm,\ M_{c5} = 0,$$
$$K_{i5} = -A\cdot\ell_2 + q\ell_1\ell_2 + q\frac{\ell_2^2}{2} + B\ell_4,\ K_5 = 0.$$

Průběh T, M, K je vykreslen na obr. 184b.



obr. 184

Čtenáři se doporučuje zkontrolovat výsledky diferenciálními podmínkami (3.6) nebo prověřit rovnováhu jednotlivých uzlů podle (3.7) až (3.10). Tak např. pro uzel e plyne, viz obr. 185 .

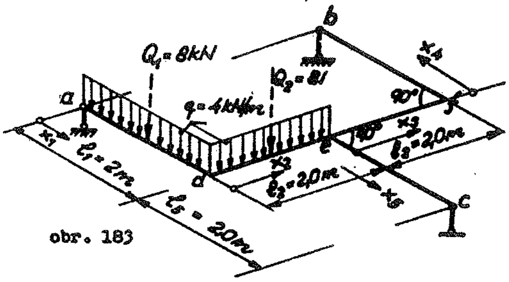


obr. 185

$$T_{e2} - T_{e3} - T_{e5} = 0,\ t.zn.$$
$$T_{e5} = T_{e2} - T_{e3},\ t.j.\ -6 = -5 - (+1),$$
$$M_{e2} - M_{e3} + K_{e5} = 0,\ t.zn.$$
$$M_{e3} = M_{e2},\ t.j.\ -2 = -2,$$
$$K_{e2} - K_{e3} - M_{e5} = 0,\ t.zn.$$
$$M_{e5} = K_{e2} - K_{e3},\ t.j.\ +12 = +14 - 2.$$

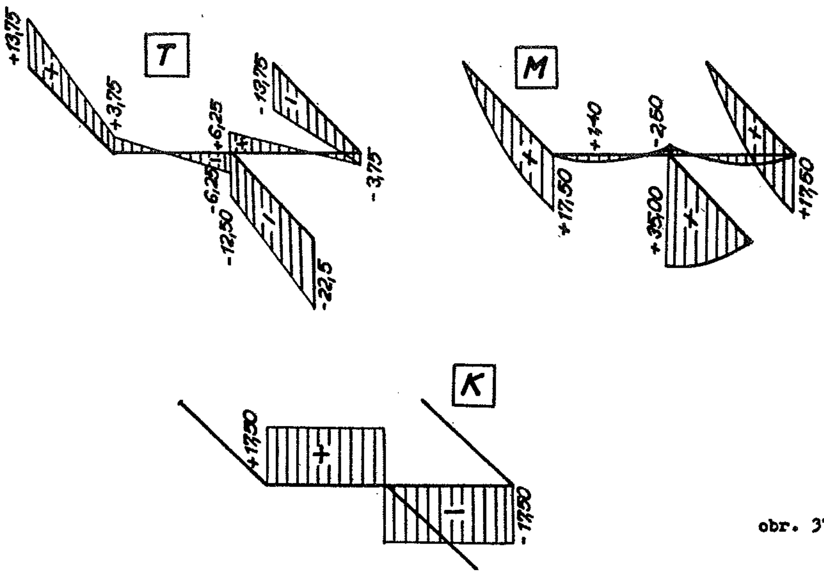
Příklad 121

Vyšetřete průběh T, M, K na balkonovém nosníku podle obr. 183, působí-li plné rovnoměrné zatížení $q = 5\ kN/m$ podél všech úseků nosníku [5].



obr. 183

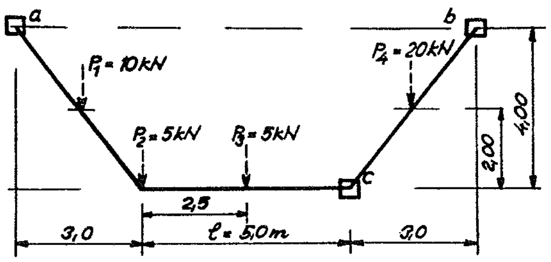
Reakce $A = +13{,}75\ kN$, $B = 13{,}75\ kN$, $C = 22{,}50\ kN$. Průběh T, M, K je vyznačen na obr. 371.



obr. 371

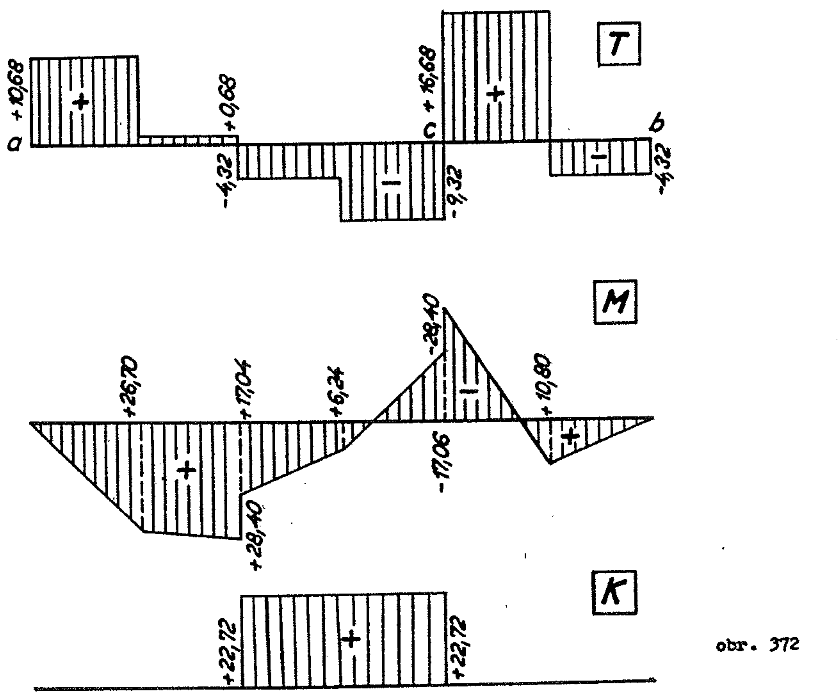
Příklad 122

Určete reakce a průběh T, M, K na balkonovém nosníku podepřeného a zatíženého podle obr. 197.



obr. 197

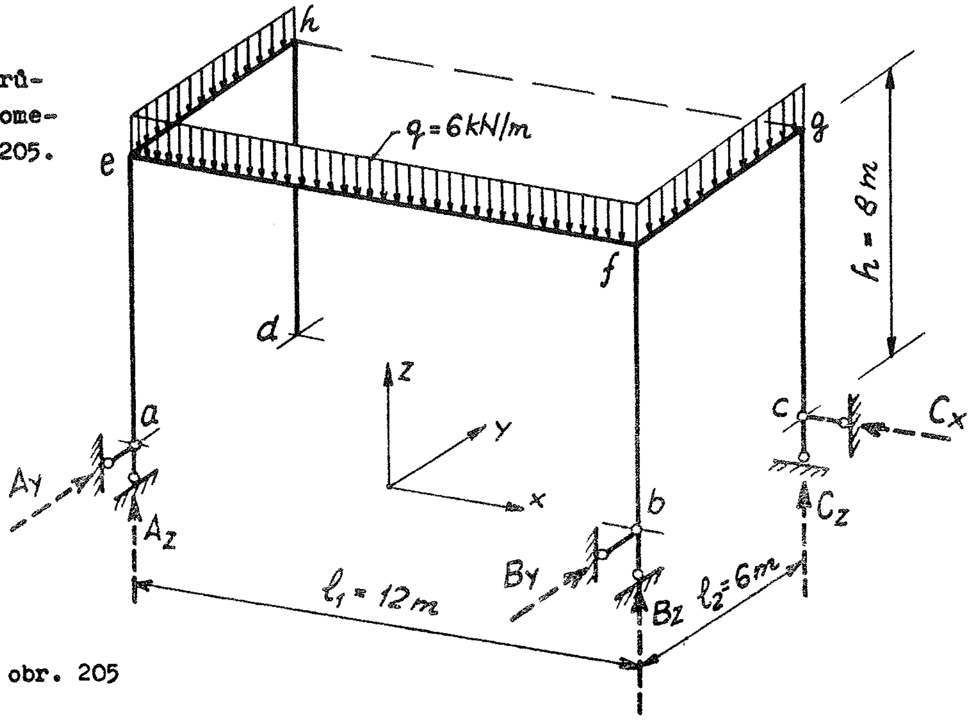
Reakce $A = +10{,}68\ kN$, $B = +4{,}32\ kN$, $C = 25{,}00\ kN$. Průběh T, M, K je znázorněn na obr. 372.



obr. 372

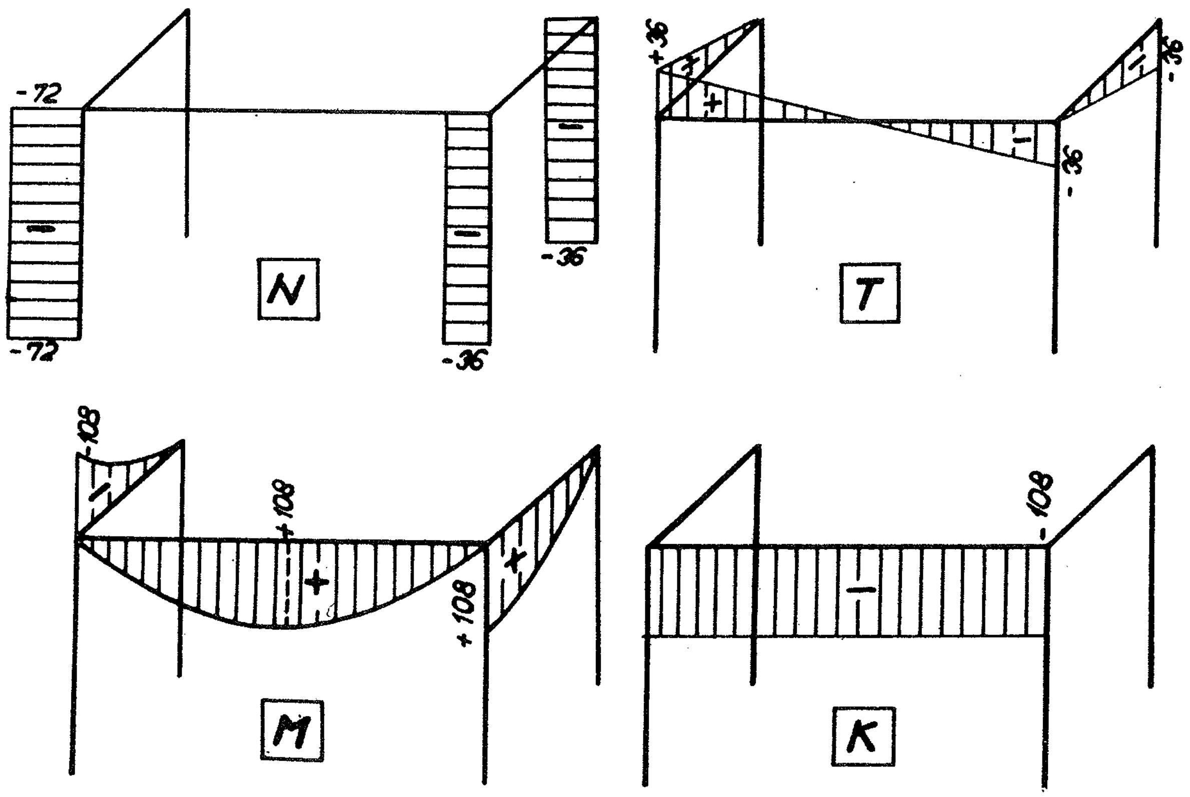
Příklad 128

Určit reakce a průběh N, T, M, K na lomeném prutu podle obr. 205.



obr. 205

Reakce jsou $A_Y = B_Y = C_X = 0$; $A_Z = 72 kN$, $B_Z = 36 kN$, $C_Z = 36 kN$.
Průběh N, T, M, K je vyznačen na obr. 376.



obr. 376