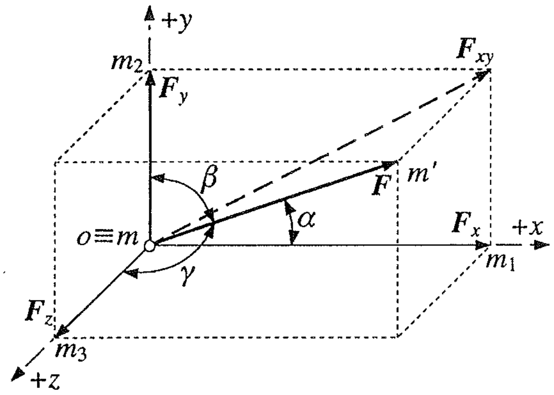
Příklad 3.1

Stanovte sílu $\boldsymbol{F}$, známe-li její pravoúhlé průměty $F_x = 200$ N, $F_y = 300$ N, $F_z = 600$ N do souřadnicových os x, y, z (obr. 3.1).



Obr. 3.1. Tři síly v jednom bodu

Řešení

Velikost síly $\boldsymbol{F}$ podle vztahu (3.3)

$$F = \sqrt{200^2 + 300^2 + 600^2} = 700\,\text{N},$$

směrové kosiny úhlů α, β, γ podle (3.4)

$$\cos\alpha = \frac{200}{700} = 0{,}286\,; \qquad \cos\beta = \frac{300}{700} = 0{,}429\,; \qquad \cos\gamma = \frac{600}{700} = 0{,}857$$

a směrové úhly

$$\alpha = 73^\circ 24', \qquad \beta = 64^\circ 37', \qquad \gamma = 31^\circ 00'.$$

Příklad 3.2

Stanovte pravoúhlé průměty $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ síly $F = 1000$ N do souřadnicových os x, y, z, svírá-li s nimi úhly $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 45^\circ$.

Řešení

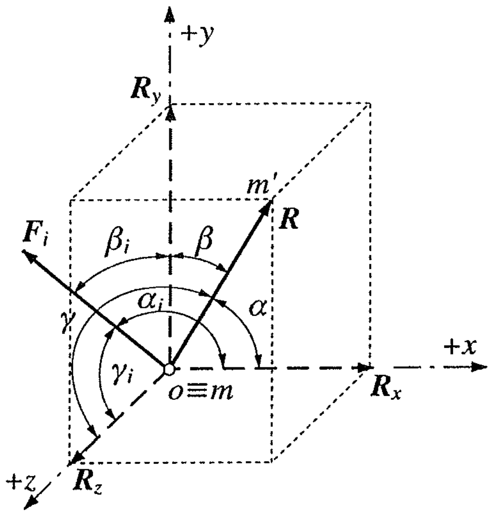
$F_x = 500$ N (→), $\quad F_y = -500$ N (↓), $\quad F_z = 707{,}11$ N (↙).

Příklad 3.3

Stanovte výslednici $\boldsymbol{R}$ prostorového svazku tří sil (obr. 3.2) pro $\boldsymbol{F}_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2, 3)$ podle tabulky 3.1.

Tabulka 3.1. Výpočet složek R_x, R_y, R_z výslednice R

i	F_i (kN)	Směrové úhly (°)			Směrové kosiny			Průměty sil do os x, y, z (kN)		
		α_i	β_i	γ_i	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	$F_i\cos\alpha_i$	$F_i\cos\beta_i$	$F_i\cos\gamma_i$
1	300	90	90	0	0	0	1	0	0	300,00
2	400	60	30	90	0,500	0,866	0	200,00	346,41	0
3	500	45	90	45	0,707	0	0,707	353,55	0	353,55
							$\sum_{i=1}^{3}$	553,55 R_x	346,41 R_y	653,55 R_z



Obr. 3.2. Prostorový svazek sil

Řešení

Výslednice $\boldsymbol{R}$ má velikost (3.8)

$$R = \sqrt{553{,}55^2 + 346{,}41^2 + 653{,}55^2} = 923{,}88 \text{ kN},$$

směrové kosiny (3.9)

$$\cos\alpha = \frac{553{,}55}{923{,}88} = 0{,}599; \quad \cos\beta = \frac{346{,}41}{923{,}88} = 0{,}375;$$

$$\cos\gamma = \frac{653{,}55}{923{,}88} = 0{,}707,$$

směrové úhly

$$\alpha = 53°11', \quad \beta = 67°59', \quad \gamma = 44°59'$$

a působiště $m \equiv o$.

Příklad 3.4

Zrušte účinek síly R = 10 kN, procházející počátkem souřadnic o a svírající s kladnými souřadnicovými osami x, y, z úhly $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 45°$, třemi silami $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ působícími v zadaných paprscích o směrových úhlech $\alpha_1 = 120°, \beta_1 = 60°, \gamma_1 = 45°$; $\alpha_2 = 0°, \beta_2 = \gamma_2 = 90°$; $\alpha_3 = \beta_3 = 45°, \gamma_3 = 90°$ a společném působišti $m \equiv o$ (obr. 3.3).

Řešení

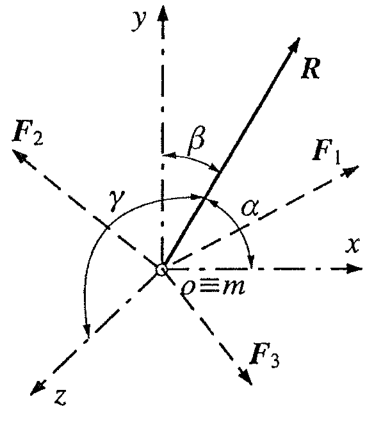
Podmínky rovnováhy (3.10) prostorového svazku sil $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ mají s přihlédnutím k obr. 3.3 tvar

$$F_1\cos 120° + F_2\cos 0° + F_3\cos 45° + R\cos 60° = 0,$$

$$F_1\cos 60° + F_2\cos 90° + F_3\cos 45° + R\cos 60° = 0,$$

$$F_1\cos 45° + F_2\cos 90° + F_3\cos 90° + R\cos 45° = 0$$

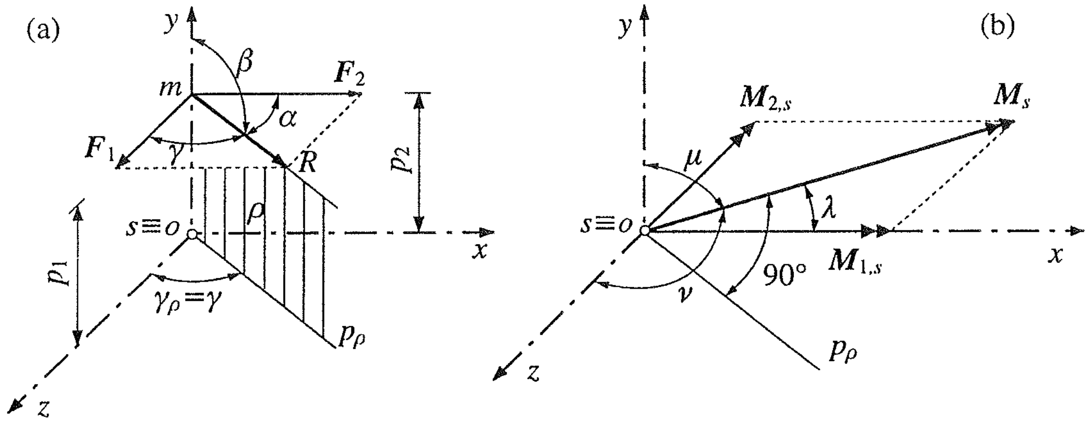
a řešení: $F_1 = -10$ kN, $F_2 = -10$ kN, $F_3 = 0$.



Obr. 3.3. Nahrazení síly $\boldsymbol{R}$ třemi silami $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$

Příklad 3.5

Stanovte statický moment soustavy sil $F_1 = 3$ kN, $F_2 = 4$ kN se společným působištěm m k bodu $s \equiv o$ (obr. 3.4a) pro $p_1 = p_2 = 3$ m.



Obr. 3.4. Statický moment prostorového svazku sil k bodu s

Řešení

Statické momenty jednotlivých sil soustavy k momentovému středu s (se znaménky podle odstavce 3.4)

$$M_{1,s} = F_1\, p_1 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ kNm}, \quad M_{2,s} = F_2\, p_2 = -4 \cdot 3 = -12 \text{ kNm}$$

lze zobrazit vektory $\boldsymbol{M}_{1,s}$ a $\boldsymbol{M}_{2,s}$ vázanými na bod s (obr. 3.4b).

Vektor výsledného momentu $\boldsymbol{M}_s$ má velikost

$$M_s = \sqrt{M_{1,s}^2 + M_{2,s}^2} = \sqrt{9^2 + (-12)^2} = 15 \text{kNm},$$

prochází momentovým středem s, leží v souřadnicové rovině xz a má směrové úhly λ, μ, ν, pro něž platí vztahy

$$\cos\lambda = \frac{M_{1,s}}{M_s} = \frac{9}{15} = 0{,}6 \Rightarrow \lambda = 53°08', \quad \cos\mu = 0 \Rightarrow \mu = 90°,$$

$$\cos\nu = \frac{M_{2,s}}{M_s} = \frac{-12}{15} = -0{,}8 \Rightarrow \nu = 143°08'.$$

Výslednice $\boldsymbol{R}$ soustavy sil se společným působištěm m (obr. 3.4a) má velikost

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{kN},$$

svírá s kladnými souřadnicovými osami x, y, z úhly α, β, γ, pro něž platí

$$\cos\alpha = \frac{F_2}{R} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 36°52', \quad \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = 90°,$$

$$\cos\gamma = \frac{F_1}{R} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \gamma = 53°08'$$

a vyvozuje podle Varignonovy věty statický moment k bodu s

$$M_s = Rr = 5 \cdot 3 = 15 \text{kNm},$$

jehož vektor $\boldsymbol{M}_s$ vázaný na bod s je kolmý na svislou rovinu statického momentu ρ, obsahující paprsek síly R a momentový střed s.

Příklad 3.6

Stanovte statické momenty síly $F = 6$ kN s působištěm m (2, 4, 3) m a směrovými úhly $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ$ k souřadnicovým osám x, y, z a k počátku souřadnic $o \equiv s$ (obr. 3.6).

Řešení

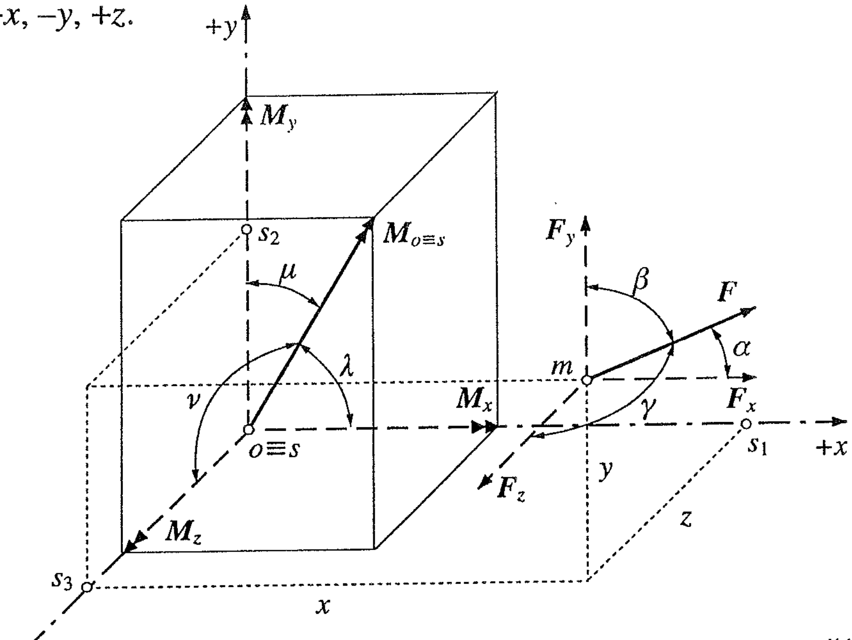
S použitím vztahů (3.15) až (3.19) dostáváme:

$F_x = 3{,}00$ kN, $F_y = 3{,}00$ kN, $F_z = 4{,}24$ kN,

$M_x = 6{,}73$ kNm, $M_y = -10{,}97$ kNm, $M_z = 3{,}00$ kNm,

$M_{o\equiv s} = 13{,}22$ kNm, $\lambda = 59^\circ 24'$, $\mu = 146^\circ 07'$, $\nu = 76^\circ 53'$.

Vektor statického momentu $\boldsymbol{M}_{o\equiv s}$ síly $\boldsymbol{F}$ k bodu $o \equiv s$ leží v kvadrantu omezeném souřadnicovými osami $+x$, $-y$, $+z$.



Obr. 3.6. Statický moment síly k osám x, y, z a k počátku o

Příklad 3.7

Stanovte výsledný účinek tří silových dvojic, působících v souřadnicových rovinách xy, yz, zx, o momentech $M_1 = F_1 p_1 = 5$ kNm, $M_2 = F_2 p_2 = 4$ kNm, $M_3 = F_3 p_3 = -6$ kNm.

Řešení

Výsledným účinkem soustavy tří silových dvojic je jediná dvojice sil o momentu M_r. Volný vektor momentu $\boldsymbol{M}_r$, vztyčený v počátku o souřadnicového systému x, y, z, má velikost (3.25)

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-6)^2} = 8{,}775 \text{ kNm}$$

a směrové úhly λ, μ, ν (obr. 3.9), pro něž platí vztahy (3.26)

$$\cos\lambda = \frac{M_{rx}}{M_r} = \frac{M_2}{M_r} = \frac{4}{8{,}775} = 0{,}456 \Rightarrow \lambda = 62^\circ 53',$$

$$\cos\mu = \frac{M_{ry}}{M_r} = \frac{M_3}{M_r} = \frac{-6}{8{,}775} = -0{,}684 \Rightarrow \mu = 133^\circ 08',$$

$$\cos\nu = \frac{M_{rz}}{M_r} = \frac{M_1}{M_r} = \frac{5}{8{,}775} = 0{,}570 \Rightarrow \nu = 55^\circ 16'.$$

Příklad 3.8

Stanovte výsledný účinek obecné prostorové soustavy sil vztažené k pravoúhlým souřadnicovým osám x, y, z s počátkem o. Síly F_i (i = 1, 2, 3) jsou zadány velikostí, polohou působišť $m_i(x_i, y_i, z_i)$ a směrovými úhly $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ podle tabulky 3.2.

Tabulka 3.2.

i	F_i (kN)	Souřadnice působišť (m)			Směrové úhly (°)			Směrové kosiny		
		x_i	y_i	z_i	α_i	β_i	γ_i	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
1	116	3,5	6,1	4,2	220	70	37	–0,766	0,342	0,799
2	220	–5,3	2,9	3,7	80	35	240	0,174	0,819	–0,500
3	164	2,8	–4,0	5,2	54	310	80	0,588	0,643	0,174

Řešení

uspořádáme pro přehlednost a snadnou kontrolu do tabulky 3.3.

Tabulka 3.3.

i	Průměty sil do os x, y, z			Statické momenty sil k osám x, y, z		
	F_{ix} (kN)	F_{iy} (kN)	F_{iz} (kN)	M_{ix} (kNm)	M_{iy} (kNm)	M_{iz} (kNm)
1	–88,856	39,672	92,684	398,750	–697,589	680,874
2	38,280	180,180	–110,000	–985,666	–441,364	–1065,966
3	96,432	105,452	28,536	–662,494	421,546	680,994
Σ	45,856 R_x	325,304 R_y	11,220 R_z	–1249,410 M_{rx}	–717,407 M_{ry}	295,902 M_{rz}

Výsledná síla $\boldsymbol{R}$ má velikost (3.33)

$$R = \sqrt{45{,}856^2 + 325{,}304^2 + 11{,}220^2} = 328{,}712\,\text{kN}$$

a směrové úhly α, β, γ (3.35)

$$\cos\alpha = \frac{45{,}856}{328{,}712} = 0{,}1395 \Rightarrow \alpha = 81°59',$$

$$\cos\beta = \frac{325{,}304}{328{,}712} = 0{,}9896 \Rightarrow \beta = 8°15',$$

$$\cos\gamma = \frac{11{,}220}{328{,}712} = 0{,}0341 \Rightarrow \gamma = 88°03'.$$

Kontrola podle (3.5)

$$0{,}1395^2 + 0{,}9896^2 + 0{,}0341^2 = 1.$$

Vektor $\boldsymbol{M}_r$ výsledného statického momentu soustavy sil k počátku o má velikost (3.36)

$$M_r = \sqrt{(-1249{,}410)^2 + (-717{,}407)^2 + 295{,}902^2} = 1470{,}801\text{ kNm}$$

a směrové úhly λ, μ, ν (3.38)

$$\cos\lambda = -\frac{1249{,}410}{1470{,}801} = -0{,}8495 \Rightarrow \lambda = 148°09',$$

$$\cos\mu = -\frac{717{,}407}{1470{,}801} = -0{,}4878 \Rightarrow \mu = 119°11',$$

$$\cos\nu = \frac{295{,}902}{1470{,}801} = 0{,}2012 \Rightarrow \nu = 78°24'.$$

Kontrola podle (3.19)

$$(-0{,}8495)^2 + (-0{,}4878)^2 + 0{,}2012^2 = 1.$$

Vektory $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{M}_r$ v počátku o svírají navzájem úhel ψ (3.39)

$$\cos\psi = 0{,}1395\,(-0{,}8495) + 0{,}9896\,(-0{,}4878) + 0{,}0341 \cdot 0{,}2012 = -0{,}594 \Rightarrow$$
$$\psi = 126°28'.$$

Výsledný účinek dané prostorové soustavy sil F_i (i = 1, 2, 3) je *bivektor* $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{M}_r$, neboť $\psi \neq \pi/2$.

Vektor hlavního momentu $\boldsymbol{M}_{rv}$ (obr. 3.15) má podle (3.42) velikost

$$M_{rv} = M_r \cos\psi = 1470{,}801(-0{,}594) = -873{,}656\text{ kNm}$$

a nesouhlasný smysl s vektorem síly $\boldsymbol{R}$.

Po spojení úměr 1 + 2, 1 + 3, 2 + 3 v (3.48), dosazení $R_x, R_y, R_z, M_{rx}, M_{ry}, M_{rz}$ z tabulky 3.3, dostaneme po úpravě tři rovnice centrální osy C vyšetřované prostorové soustavy sil

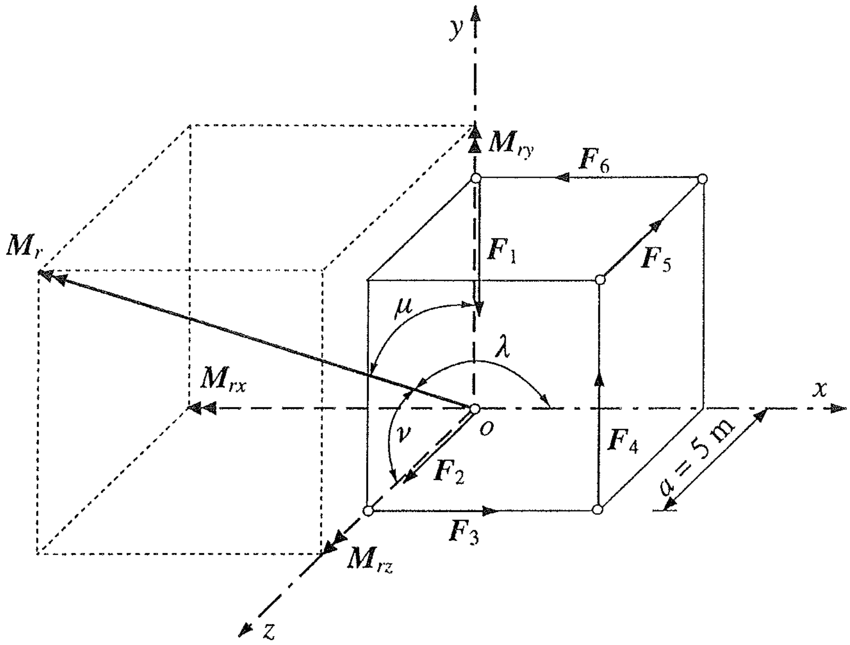
$$514{,}504\xi - 3649{,}911\eta + 103719{,}920\zeta = 439335{,}486,$$
$$-14917{,}140\xi + 1976{,}892\eta + 3649{,}912\zeta = 449{,}498,$$
$$-105696{,}804\xi + 14917{,}140\eta - 514{,}504\zeta = -88208{,}797,$$

z nichž jen dvě jsou nezávislé a ξ, η, ζ jsou souřadnice libovolného jejího bodu m.

Výsledný účinek dané prostorové soustavy tří sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ je pak vyjádřen silou R = 328,712 kN v centrální ose C a hlavním momentem M_{rv} = –873,656 kNm, tedy *šroubem*, neboť $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{M}_{rv}$.

Příklad 3.9

Stanovte výsledný účinek soustavy šesti stejných sil $F_1 = F_2 = \ldots = F_6 = 2$ kN působících ve hranách krychle (obr. 3.17).



Obr. 3.17. Prostorová soustava šesti sil

Řešení

Z pravoúhlých průmětů výsledné síly $\boldsymbol{R}$ do souřadnicových os x, y, z o velikostech

$R_x = F_3 - F_6 = 2 - 2 = 0,$

$R_y = -F_1 + F_4 = -2 + 2 = 0,$

$R_z = F_2 - F_5 = 2 - 2 = 0$

plyne, že $R = 0$.

Volný vektor výsledného momentu $\boldsymbol{M}_r$ (obr. 3.17) má pravoúhlé průměty do souřadnicových os

$M_{rx} = -(F_4 + F_5)\,5 = -20$ kNm , $\quad M_{ry} = (F_3 + F_5)\,5 = 20$ kNm ,

$M_{rz} = (F_4 + F_6)\,5 = 20$ kNm ,

velikost

$$M_r = \sqrt{(-20)^2 + 20^2 + 20^2} = 34{,}641 \text{ kNm}$$

a směrové úhly $\lambda, \mu, \nu,$ pro něž platí vztahy

$$\cos\lambda = \frac{-20}{34{,}641} = -0{,}577 \;\Rightarrow\; \lambda = 125°16',$$

$$\cos\mu = \cos\nu = \frac{20}{34{,}641} = 0{,}577 \;\Rightarrow\; \mu = \nu = 54°44'.$$

Výsledným účinkem dané prostorové soustavy sil na obr. 3.17 je dvojice sil o momentu $\boldsymbol{M}_r$, působící v libovolné rovině $\rho \perp \boldsymbol{M}_r$.

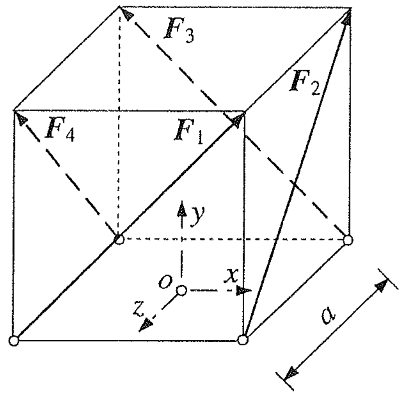
Příklad 3.10

Stanovte centrální osu C prostorové soustavy čtyř sil $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = a\sqrt{2}$ kN působících v diagonálách svislých stěn krychle o straně a (obr. 3.18).

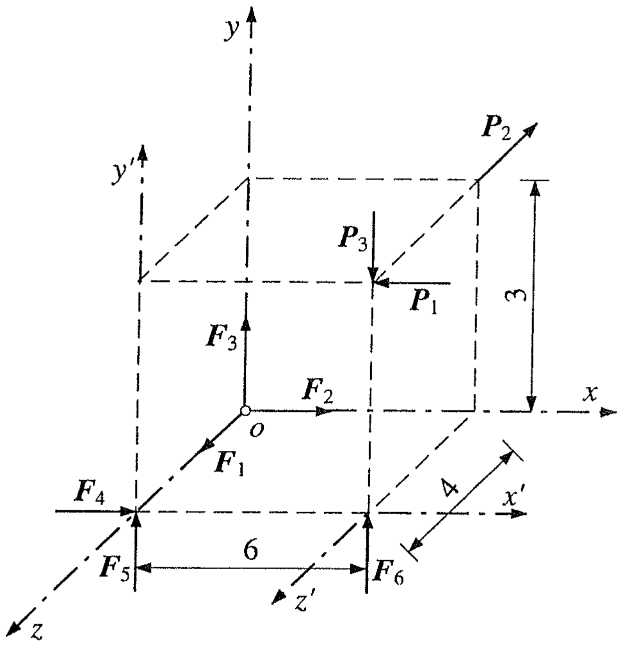
Řešení

$R_x = R_z = 0$, $R_y = R = 4a$ kN,
$M_{rx} = M_{rz} = 0$, $M_{ry} = M_r = 2a^2$ kNm.

Výsledný účinek vyšetřované prostorové soustavy sil je bivektor tvořený silou $R = R_y$ v počátku o a hlavní moment $M_{rv} = M_{ry} = M_r$, neboť vektory $\boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{M}_r$. Centrální osa C soustavy sil leží v souřadnicové ose y.



Obr. 3.18. Prostorová soustava čtyř sil



Obr. 3.19. Obecná prostorová soustava sil

Příklad 3.11

Zrušte účinek obecné prostorové soustavy sil $P_1 = 300$ N, $P_2 = 400$ N, $P_3 = 600$ N šesti silami $\boldsymbol{F}_k$ (k = 1, 2, ... , 6) působícími v zadaných paprscích (obr. 3.19).

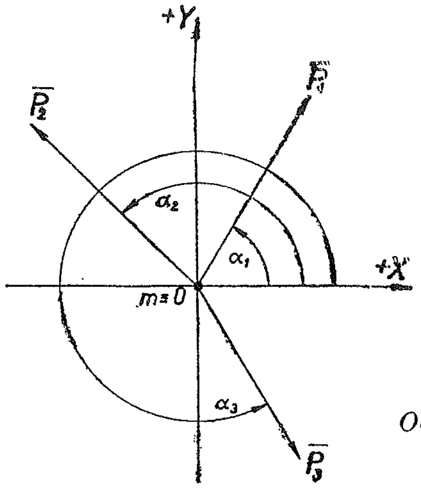
Řešení

Předběžně zvolíme smysl sil $\boldsymbol{F}_k$ (k = 1, 2, ... , 6), např. podle obr. 3.19. Pro obecnou prostorovou rovnovážnou soustavu sil $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ a $\boldsymbol{F}_k$ (k = 1, 2, ... , 6) napíšeme šest statických podmínek rovnováhy (3.58) nebo (3.60) a z nich vyřešíme velikosti a správné smysly sil $\boldsymbol{F}_k$. S výhodou použijeme jedné podmínky součtové a pěti momentových k vhodně zvoleným osám v pořadí:

1) $\sum F_{iz} = 0$: $F_1 - P_2 = 0$ .... $F_1 = 400$ N,
2) $\sum M_{ix'} = 0$: $F_3 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 = 0$ .... $F_3 = 300$ N,
3) $\sum M_{iy} = 0$: $F_4 \cdot 4 - P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 6 = 0$ ...... $F_4 = -300$ N,
4) $\sum M_{iy'} = 0$: $-F_2 \cdot 4 + P_2 \cdot 6 = 0$ .... $F_2 = 600$ N,
5) $\sum M_{iz} = 0$: $F_6 \cdot 6 + P_1 \cdot 3 - P_3 \cdot 6 = 0$ ...... $F_6 = 450$ N,
6) $\sum M_{iz'} = 0$: $-F_3 \cdot 6 - F_5 \cdot 6 + P_1 \cdot 3 = 0$ ...... $F_5 = -150$ N.

Správné smysly sil F_1, F_2, F_3, F_6 jsou shodné se smysly předpokládanými na obr. 3.19. Znaménko „minus“ u sil F_4, F_5 mění předpokládaný smysl.

Príklad 249. Zložte do výslednice R sily P_1, P_2, P_3, ktoré pôsobia v jednom bode v priestore. Nech $P_1 = 3{,}0$ Mp, $P_2 = 5{,}0$ Mp, $P_3 = 4{,}0$ Mp, $\alpha_1 = 120°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 77°$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 90°$, $\gamma_2 = 90°$, $\alpha_3 = 45°$, $\beta_3 = 45°$, $\gamma_3 = 90°$ *(obr. 249)*.



Obr. 249

Riešenie:

Najprv rozložíme každú silu do smeru osí X, Y, Z a dostaneme tieto zložky:

$$P_{1x} = P_1 \cos \alpha_1 = 3{,}0 \cos 120° = 3{,}0(-0{,}5) = -1{,}5 \text{ Mp}$$
$$P_{1y} = P_1 \cos \beta_1 = 3{,}0 \cos 60° = 3{,}0 \,.\, 0{,}5 = 1{,}5 \text{ Mp}$$
$$P_{1z} = P_1 \cos \gamma_1 = 3{,}0 \cos 77° = 3{,}0 \,.\, 0{,}224\,95 = 0{,}67 \text{ Mp}$$
$$P_{2x} = P_2 \cos \alpha_2 = 5{,}0 \cos 0° = 5{,}0 \text{ Mp}$$
$$P_{2y} = P_2 \cos \beta_2 = 5{,}0 \cos 90° = 0$$
$$P_{2z} = P_2 \cos \gamma_2 = 5{,}0 \cos 90° = 0$$
$$P_{3x} = P_3 \cos \alpha_3 = 4{,}0 \cos 45° = 4{,}0 \,.\, 0{,}707 = 2{,}828 \text{ Mp}$$
$$P_{3y} = P_3 \cos \beta_3 = 4{,}0 \cos 45° = 2{,}828 \text{ Mp}$$
$$P_{3z} = P_3 \cos \gamma_3 = 4{,}0 \cos 90° = 0$$

Keď sme už určili zložky všetkých síl v smere súradnicových osí, vypočítame zložky výslednice R v smere osí X, Y a Z:

$$R_x = P_{1x}\, P_{2x} + P_{3x} = -1{,}5 + 5{,}0 + 2{,}828 = 6{,}328 \text{ Mp}$$
$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} = 1{,}5 + 0{,}0 + 2{,}828 = 4{,}328 \text{ Mp}$$
$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} = 0{,}67 + 0{,}0 + 0{,}0 = 0{,}67 \text{ Mp}$$

Veľkosť výslednice všetkých troch síl

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{6{,}328^2 + 4{,}328^2 + 0{,}67^2} \doteq 7{,}7 \text{ Mp}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{6{,}328}{7{,}7} = 0{,}821\,81; \qquad \alpha \doteq 34°40'$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{4{,}328}{7{,}7} = 0{,}562\,07; \qquad \beta \doteq 55°50'$$

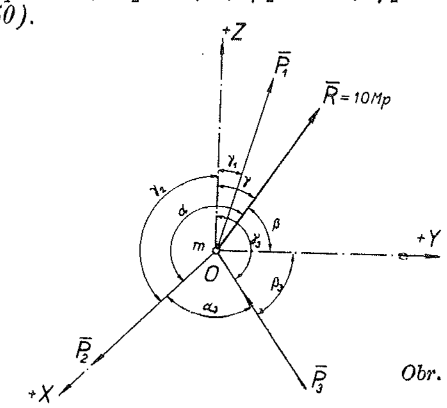
$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{0{,}67}{7{,}7} = 0{,}087\,01; \qquad \gamma \doteq 85°$$

Kontrola:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$
$$0{,}821\,81^2 + 0{,}562\,07^2 + 0{,}087\,01^2 = 1$$
$$0{,}675\,37 + 0{,}315\,92 + 0{,}007\,57 = 0{,}998\,86$$

Nepatrná diferencia vznikla zaokrúhľovaním jednotlivých výrazov.

Príklad 250. Rozložte silu $R = 10{,}0$ Mp, ktorej odklon od súradnicových osí X, Y, Z je $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, do troch zložiek P_1, P_2, P_3, ktorých smerové uhly poznáme. Všetky sily pôsobia v spoločnom bode m.
Nech $\alpha_1 = 120°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 77°$, $\alpha_2 = 0{,}0°$, $\beta_2 = 90°$, $\gamma_2 = 90°$, $\alpha_3 = \beta_3 = 45°$, $\gamma_3 = 95°$ *(obr. 250)*.



Obr. 250

Riešenie:

Zložka výslednice R v smere osi X sa rovná súčtu zložiek neznámych troch síl do smeru tejto osi a rovnaké vzťahy platia aj pre osi Y a Z:

$$R_x = \Sigma P_{ix}; \qquad R_y = \Sigma P_{iy}; \qquad R_z = \Sigma P_{iz}$$

teda

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x}; \qquad R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y}$$
$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z}$$
$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3$$
$$R_y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3$$
$$R_z = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3$$

Najprv určíme zložky výslednice v smere osí X, Y, Z:

$$R_x = R \cos \alpha = 10{,}0 \cos 60° = 10{,}0 \,.\, 0{,}5 = 5{,}0 \text{ Mp}$$
$$R_y = R \cos \beta = 10{,}0 \cos 60° = 5{,}0 \text{ Mp}$$
$$R_z = R \cos \gamma = 10{,}0 \cos 45° = 10{,}0 \,.\, 0{,}707 = 7{,}07 \text{ Mp}$$

Po dosadení dostaneme rovnice:

$$5{,}0 = P_1 \cos 120° + P_2 \cos 0° + P_3 \cos 45°$$
$$5{,}0 = P_1 \cos 60° + P_2 \cos 90° + P_3 \cos 45°$$
$$7{,}07 = P_1 \cos 77° + P_2 \cos 90° + P_3 \cos 90°$$
$$5{,}0 = -0{,}5P_1 + P_2 + 0{,}707P_3 \tag{I}$$
$$5{,}0 = 0{,}5P_1 + 0{,}0 + 0{,}707P_3 \tag{II}$$
$$7{,}07 = 0{,}225P_1 + 0{,}0 + 0{,}0 \tag{III}$$

Z poslednej rovnice

$$P_1 = \frac{7{,}07}{0{,}225} = 31{,}42 \text{ Mp}$$

Dosadením do rovnice (II) dostaneme:

$$0{,}707P_3 = 5{,}0 - 0{,}5 \,.\, 31{,}42$$
$$0{,}707P_3 = -10{,}71; \qquad P_3 = -\frac{10{,}71}{0{,}707} = -15{,}15 \text{ Mp}$$

a z rovnice (I) vypočítame:

$$P_2 = 5{,}0 + 0{,}5P_1 - 0{,}707P_3 = 5{,}0 + 15{,}71 + 10{,}71$$
$$P_2 = 31{,}42 \text{ Mp}$$

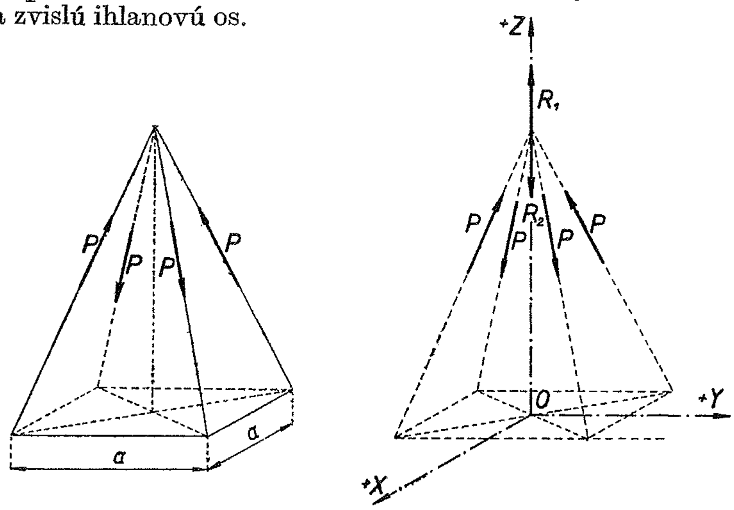
Kontrola:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{5{,}0^2 + 5{,}0^2 + 7{,}07^2} = \sqrt{100{,}0}$$
$$R = 10{,}0 \text{ Mp}$$

Rovnako môžeme zistiť správnosť rovnice platnej pre vodorovnú zložku výslednice:

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3$$
$$5{,}0 = 31{,}42 \cos 120° + 31{,}42 \cos 0° - 15{,}15 \cos 45°$$
$$5{,}0 = 31{,}42(-0{,}5) + 31{,}42 - 15{,}15 \,.\, 0{,}707$$
$$5{,}0 = -15{,}71 + 31{,}42 - 10{,}71$$
$$5{,}0 \text{ Mp} = 5{,}0 \text{ Mp}$$

Príklad 251. V hranách štvorbokého ihlanu, ktorý má štvorcovú základňu, pôsobia rovnaké sily P podľa naznačeného *obr. 251*. Určte statický moment týchto síl vzhľadom na zvislú ihlanovú os.



Obr. 251

Riešenie:

Keďže všetky sily P zvierajú so zvislou osou rovnaký uhol, dve sily P, pôsobiace šikmo nahor, dávajú výslednicu R_1, ktorá pôsobí vo zvislej osi smerom nahor; dve sily P, pôsobiace šikmo dolu, dávajú výslednicu $R_2 = -R_1$, ktorá pôsobí v osi ihlanu zvisle dolu a ruší sa so silou R_1.

Preto v tomto prípade

$$R_x = \Sigma P_x = 0$$
$$R_y = \Sigma P_y = 0$$
$$R_z = \Sigma P_z = 0$$

Teda naznačená sústava štyroch síl je spolu v rovnováhe. Preto aj statický moment sústavy ku ktorémukoľvek bodu a ku ktorejkoľvek osi sa musí rovnať nule.

Príklad 256. Na štyri steny naznačenej kocky pôsobia štyri dané sily $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$. Máme zistiť, či je daná sústava síl v rovnováhe. Nech hrana kocky je a *(obr. 256)*.

Riešenie:

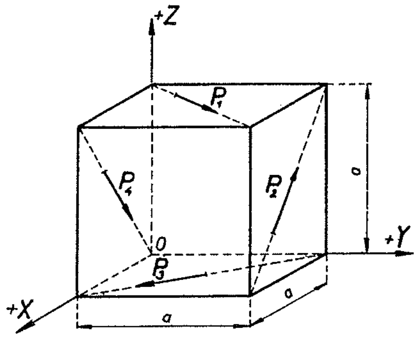
Danú sústavu síl nahraďme zložkami v smere osí X, Y, Z a dvojicami síl pôsobiacimi v rovinách kolmých na tieto osi.

V našom prípade je:

$$R_x = \Sigma P_{ix} = P_1 \cos 45° - P_2 \cos 45° + P_3 \cos 45° - P_4 \cos 45° = 0$$

$$R_y = \Sigma P_{iy} = P_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - P_3 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 0$$

$$R_y = \Sigma P_{iz} = 0 + P_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - P_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$



Obr. 256

Výsledné dvojice síl, pôsobiace vzhľadom na súradnicové osi:

$$M_x = \Sigma M_{ix} = P_1 \cos 45° \,.\, a - P_2 \cos 45° \,.\, a + 0 + 0 = 0$$

$$M_y = \Sigma M_{iy} = -P_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, a + P_2 \frac{1}{\sqrt{2}} a + 0 + 0 = 0$$

$$M_z = \Sigma M_{iz} = 0 - P_2 \frac{1}{\sqrt{2}} a + P_3 \frac{1}{\sqrt{2}} a + 0 = 0$$

Keďže v našom prípade

$$R_x = 0, \quad R_y = 0; \quad R_z = 0$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0; \quad M_z = 0$$

sústava síl je v rovnováhe.

Príklad 252. Ako je naznačené na *obr. 252*, na hranol s hranami $a = 3{,}0$ m, $b = 2{,}0$ m, $c = 4{,}0$ m pôsobia dve dvojice síl: $M_1 = -Pa = -3{,}0$ Mp . $3{,}0$ m $= -9{,}0$ Mpm a $M_2 = -Pb = -3{,}0$ Mp . $2{,}0$ m $= -6{,}0$ Mpm. Zistite moment týchto dvojíc k stredu s hranola, ako aj k osiam X, Y, Z.

Riešenie:

Sily P obidvoch dvojíc pôsobia vo vodorovnej rovine; môžeme ich teda posunúť do vodorovnej roviny XY, vedenej stredom s hranola. Tieto dvojice spôsobia vzhľadom na bod s výslednú dvojicu s momentom

$$M = M_1 + M_2 = -Pa - Pb = -P(a + b) = -3{,}0 \text{ Mp} \, . \, 5{,}0 \text{ m} = \\ = -15{,}0 \text{ Mpm}$$

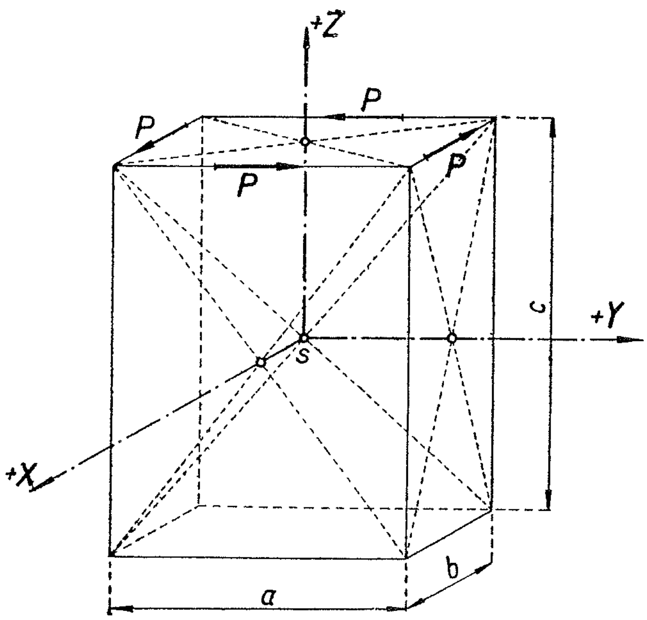
Moment daných dvoch dvojíc vzhľadom na súradnicové osi vedené stredom s hranola je:

$$M_x = 0; \qquad M_y = 0$$

lebo rovina daných dvojíc je rovnobežná s osami X a Y.

Moment daných dvojíc k zvislej osi Z je:

$$M_z = M_1 + M_2 = -15{,}0 \text{ Mpm}$$



Obr. 252

Keďže dvojice M_1 a M_2 majú záporné znamienko (otáčajú rovinu proti zmyslu otáčania hodinových ručičiek, ak pozeráme v smere kladnej osi $+Z$), aj výsledná dvojica vzhľadom na stred s hranola alebo na zvislú os Z je záporná.

Vektor výslednej dvojice preto smeruje zvisle dolu (ide vo zmysle zápornej osi Z).

Príklad 253. Na kocku pôsobí naznačená dvojica síl s momentom $M = Pa = 5{,}0\ \mathrm{Mp} \cdot 2{,}0\ \mathrm{m} = 10{,}0\ \mathrm{Mpm}$.
Zistite moment tejto dvojice vzhľadom na súradnicové osi X, Y, Z *(obr. 253)*.

Riešenie:

Moment danej dvojice vzhľadom na os X dostaneme tak, že určíme moment zložiek síl dvojice pôsobiacich v smere osi vzhľadom na os X.

Zložky síl P v smere osi Y majú veľkosť

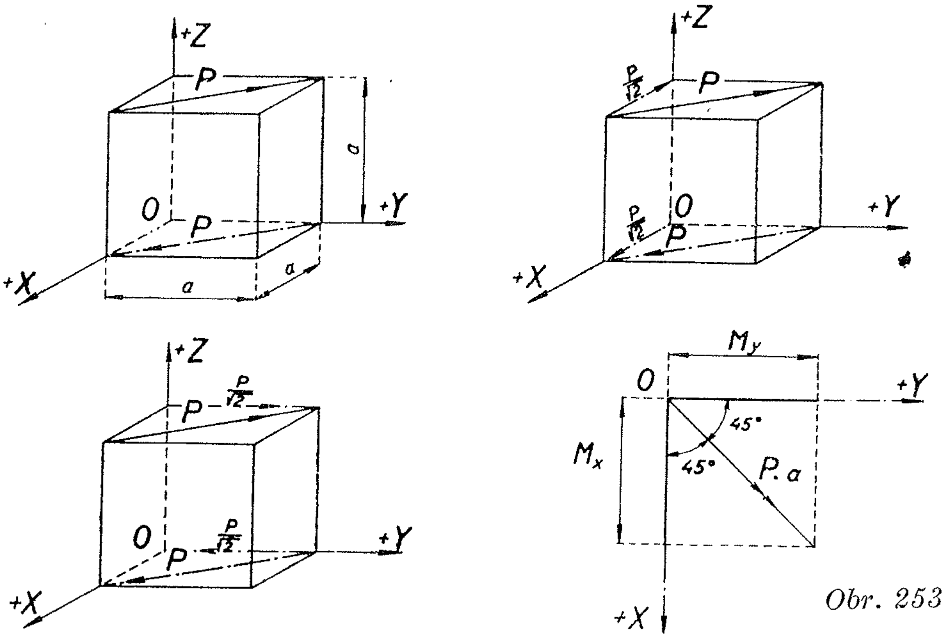
$$\pm P \cos 45° = \pm P \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Moment danej dvojice k osi X:

$$M_x = \frac{Pa}{\sqrt{2}} = \frac{5{,}0 \cdot 2{,}0}{\sqrt{2}} = 5{,}0\sqrt{2} \doteq 7{,}07\ \mathrm{Mpm}$$

Podobne určíme moment danej dvojice síl k osi Y:

$$M_y = P \cos 45° \cdot a = \frac{Pa}{\sqrt{2}} \doteq 7{,}07\ \mathrm{Mpm}$$



Obr. 253

Moment danej dvojice síl k zvislej osi Z:

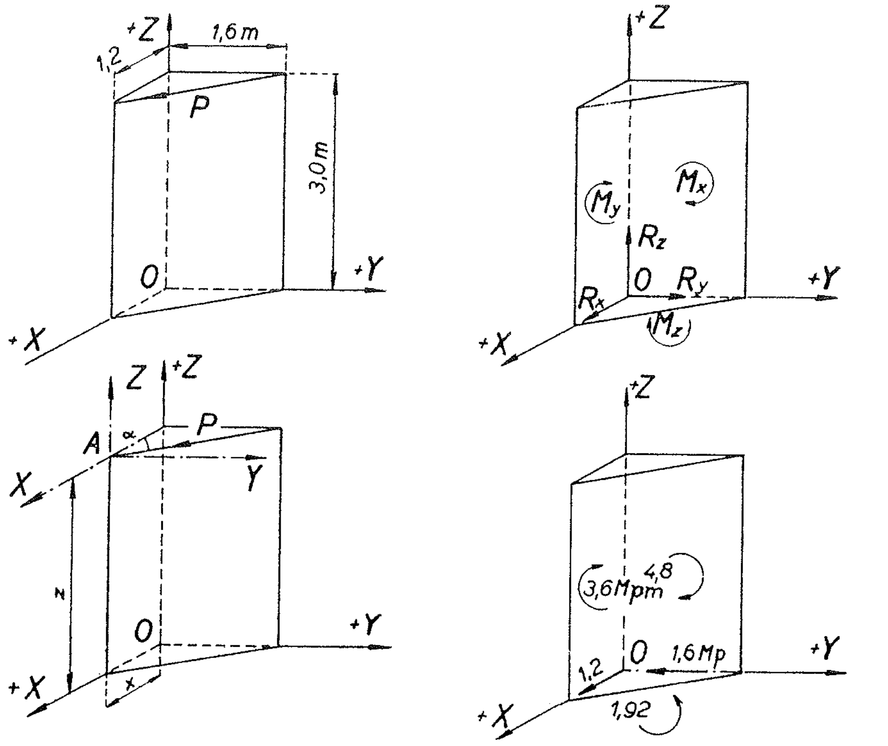
$$M_z = 0$$

lebo danú dvojicu, ktorej rovina je zvislá, sme rozložili na dve dvojice: M_x, ktorej rovina je tiež zvislá (YZ), a M_y (pôsobí v rovine ZX). Vo vodorovnej rovine XY nepôsobí nijaká dvojica síl, preto sa aj M_z musí rovnať nule.

K rovnakému výsledku dôjdeme, ak vektor danej dvojice rozložíme do smeru osí X a Y:

$$M_x = M_y = Pa \cos 45° = \frac{Pa}{\sqrt{2}}$$

Príklad 254. Na naznačený trojboký hranol (*obr. 254*) pôsobí v jednej jeho hrane sila $P = 2{,}0$ Mp. Nahraďte túto silu P silami pôsobiacimi v osiach a dvojicami síl pôsobiacimi v rovinách XY, YZ, ZX.



Obr. 254

Riešenie:

Najprv si zvoľme jeden bod určovacieho lúča sily P, napr. jeho priesečník A s rovinou ZX.[1])

Súradnice tohto bodu:

$$x = 1{,}2 \text{ m}; \qquad y = 0; \qquad z = 3{,}0 \text{ m}$$

Rozložme silu P v bode A na zložky rovnobežné so súradnicovými osami. Dostaneme zložky

$$P_x = P \cos \alpha = 2{,}0 \frac{1{,}2}{\sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2}} = 1{,}2 \text{ Mp}$$

$$P_y = -P \sin \alpha = -2{,}0 \cdot \frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2}} = -1{,}6 \text{ Mp}$$

$$P_z = 0$$

Keďže na hranol pôsobí jediná sila,

$$R_x = P_x = 1{,}2 \text{ Mp}; \qquad R_y = P_y = -1{,}6 \text{ Mp}; \qquad R_z = P_z = 0$$

Momenty výsledných dvojíc k súradnicovým osiam:

$$M_x = -yP_z + zP_y = -0 \cdot 0 + 3{,}0(-1{,}6) = -4{,}8 \text{ Mpm}$$

$$M_y = -zP_x + xP_z = -3{,}0 \cdot 1{,}2 + 1{,}2 \cdot 0 = -3{,}6 \text{ Mpm}$$

$$M_z = -xP_y + yP_x = -1{,}2(-1{,}6) + 0 \cdot 1{,}2 = +1{,}92 \text{ Mpm}$$

---

[1] V príklade 254 predpokladáme, že kladný moment otáča v zmysle otáčania hodinových ručičiek. Za tohto predpokladu treba zmysel dvojíc pôsobiacich v súradnicových rovinách — ktoré sú naznačené na spodnom *obr. 254* — obrátiť.

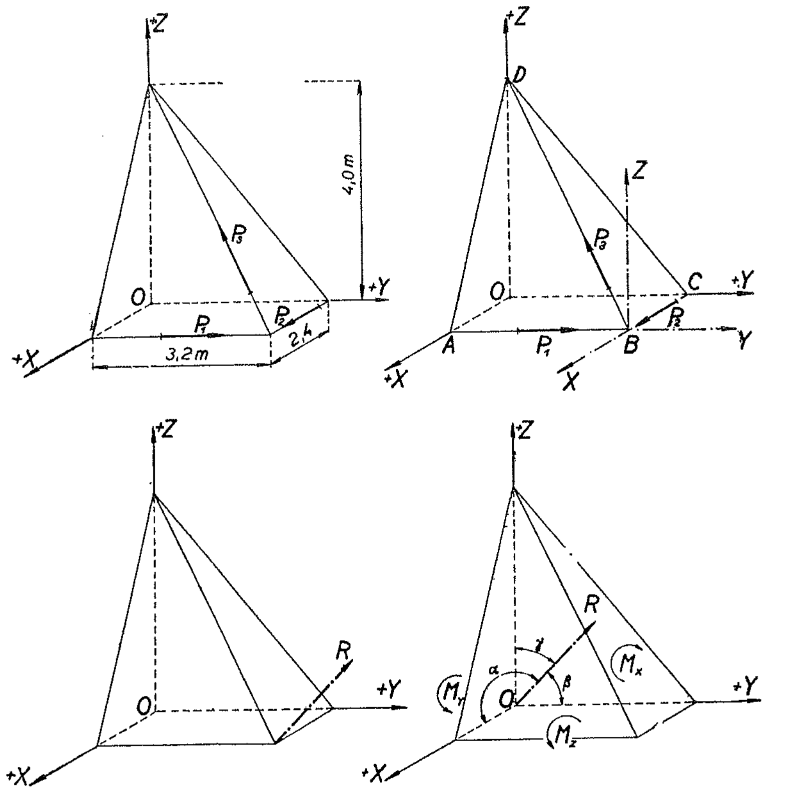
Príklad 255. Na šikmý kužeľ *(obr. 255)* pôsobí sústava síl. Určte účinok tejto sústavy vzhľadom na bod *0*. Nech $P_1 = 5{,}0$ Mp, $P_2 = 4{,}0$ Mp, $P_3 = 3{,}0$ Mp.

Riešenie:

Najprv zistíme potrebné geometrické údaje:

$$\overline{OB} = \sqrt{2{,}4^2 + 3{,}2^2} = 4{,}0 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{4{,}0^2 + 4{,}0^2} \doteq 5{,}66 \text{ m}$$



Obr. 255

Potom určíme zložky výslednice daných síl v smere súradnicových osí:

$$R_x = P_2 - P_3 \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = 4{,}0 - 3{,}0 \frac{2{,}4}{5{,}66} \doteq 2{,}73 \text{ Mp}$$

$$R_y = P_1 - P_3 \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = 5{,}0 - 3{,}0 \frac{3{,}2}{5{,}66} \doteq 3{,}3 \text{ Mp}$$

$$R_z = P_3 \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = 3{,}0 \frac{4{,}0}{5{,}66} = 2{,}12 \text{ Mp}$$

Veľkosť výslednice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{2{,}73^2 + 3{,}3^2 + 2{,}12^2} = \sqrt{22{,}83} \doteq 4{,}78 \text{ Mp}$$

Smerové kosínusy výslednice R:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{2{,}73}{4{,}78} = 0{,}571\,12; \qquad \alpha \doteq 55°10'$$

$$\cos\beta = \frac{R_y}{R} = \frac{3{,}3}{4{,}78} = 0{,}690\,37; \qquad \beta \doteq 46°20'$$

$$\cos\gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{2{,}12}{4{,}78} = 0{,}443\,51; \qquad \gamma \doteq 63°40'$$

Výslednica R pôsobí v bode B, ktorého súradnice sú:

$$x = 2{,}4 \text{ m}; \qquad y = 3{,}2 \text{ m}; \qquad z = 0$$

Momenty výsledných dvojíc k súradnicovým osiam:

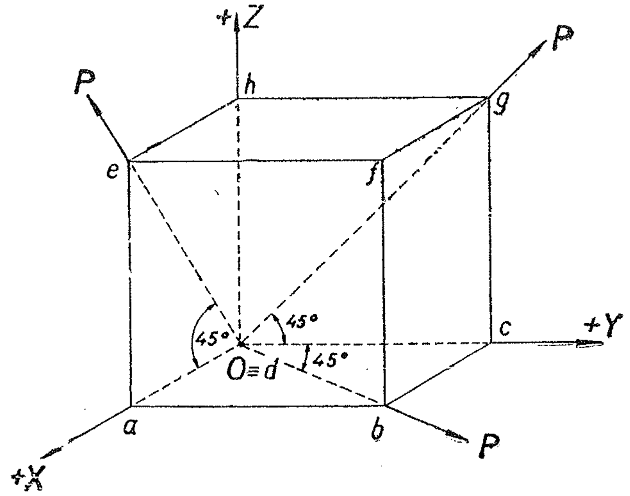
$$M_x = -yR_z + zR_y = -3{,}2 \,.\, 2{,}12 + 0 \,.\, 3{,}3 = -6{,}784 \text{ Mpm}$$

$$M_y = -zR_x + xR_z = -0 \,.\, 2{,}73 + 2{,}4 \,.\, 2{,}12 = 5{,}088 \text{ Mpm}$$

$$M_z = -xR_y + yR_x = -2{,}4 \,.\, 3{,}3 + 3{,}2 \,.\, 2{,}73 = 0{,}816 \text{ Mpm}$$

Príklad 261. Vo vrchole d kocky pôsobia v priestore tri rovnaké sily P v obrazci naznačenom zmysle, každá v inej súradnicovej rovine *(obr. 261)*. Určte výslednicu týchto síl, ako aj uhly, ktoré táto výslednica zviera so súradnicovými osami. Nech $P = 4{,}0$ Mp.

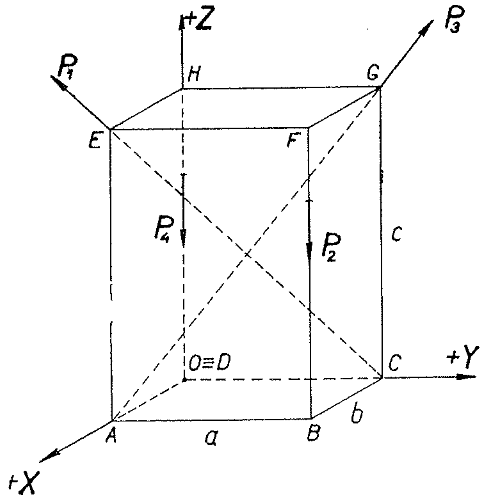
[Výslednica $R \doteq 9{,}8$ Mp, uhol $\alpha = \beta = \gamma \doteq 54°44'$. Ak sily nie sú rovnaké, napr. $P_1 = 3{,}0$ Mp, $P_2 = 4{,}0$ Mp, $P_3 = 5{,}0$ Mp, potom výslednica $R \doteq 9{,}849$ Mp, $\alpha \doteq 54°57'$, $\beta \doteq 59°50'$, $\gamma = 49°45'$.]



Obr. 261

Príklad 262. Na hranol s hranami $a = 2{,}0$ m, $b = 1{,}2$ m, $c = 3{,}0$ m pôsobí naznačená sústava síl $P_1 \ldots P_4$. Nech $P_1 = P_3 = 10{,}0$ Mp, $P_2 = P_4 = 7{,}9$ Mp. Zistite statický moment tejto sústavy síl k osiam X, Y, Z *(obr. 262)*.

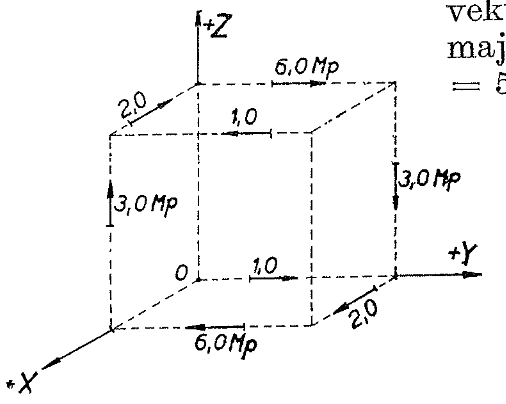
[Statické momenty zložiek síl k súradnicovým osiam: $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = 0$. Výslednica $R = 0$, teda naznačená sústava síl je v rovnováhe.]



Obr. 262

Príklad 263. Sily pôsobiace v hranách naznačenej kocky vyvodia po pároch dvojice síl. Určte moment výslednej dvojice, ako aj rovinu, v ktorej pôsobí táto výsledná dvojica. Nech hrana kocky $a = 2{,}0$ m *(obr. 263)*.

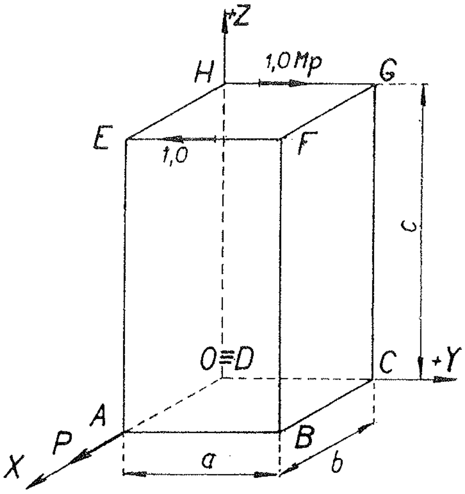
[Vektor výslednej dvojice má veľkosť $M \doteq 24{,}8$ Mpm. Uhly, ktoré zviera vektor výslednej dvojice s osami X, Y, Z, majú hodnotu $\alpha = 46°45'$, $\beta = 66°13'$, $\gamma = 52°47'$.]



Obr. 263

Príklad 264. Na hranol s hranami $a = 2{,}0$ m, $b = 3{,}0$ m, $c = 4{,}0$ m pôsobí sila $P = 2{,}0$ Mp v smere kladnej osi X a dvojica síl s momentom $M = 1{,}0$ Mp . 3,0 m $= 3{,}0$ Mpm. Zistite výslednicu tejto sústavy síl *(obr. 264)*.

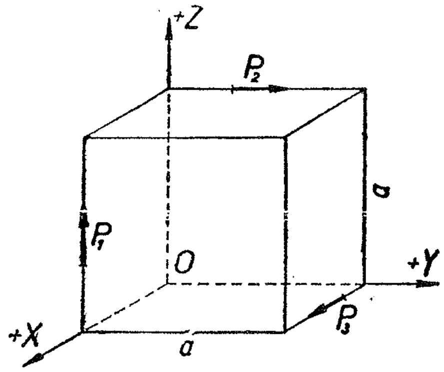
[Výslednicou danej sústavy síl je sila $P = 2{,}0$ Mp, pôsobiaca v rovine XY, ktorá je posunutá rovnobežne s osou X vo smere osi $+Y$ o vzdialenosť 1,5 m a ktorá pôsobí v kladnom zmysle osi X.]



Obr. 264

Príklad 265. V hranách kocky pôsobia tri rovnaké sily. Určte ich výslednicu. Nech hrana $a = 2{,}0$ m, $P_1 = P_2 = P_3 = 4{,}0$ Mp $= P$ *(obr. 265)*.

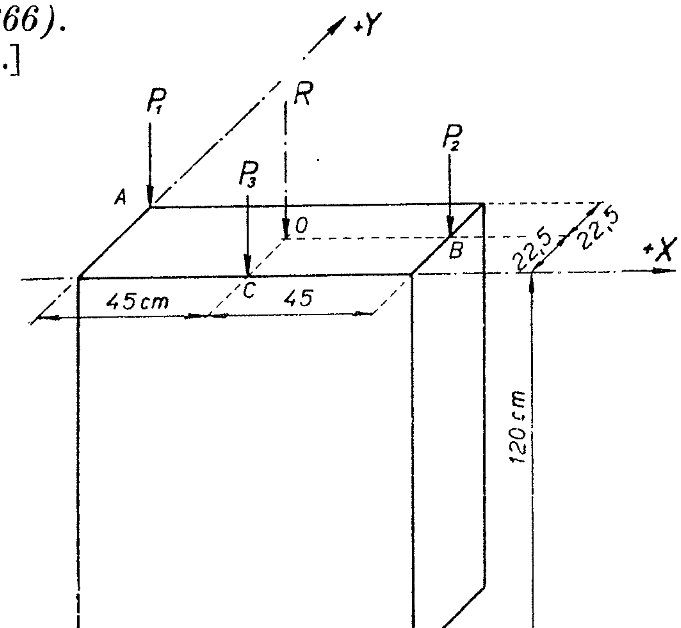
[Výslednica R prechádza začiatkom O súradnicových osí v smere telesovej uhlopriečky kocky a smeruje šikmo hore. Jej veľkosť $R \doteq 6{,}93$ Mp. Moment výslednej dvojice má hodnotu $M = 13{,}86$ Mpm a jej smer sa zhoduje so smerom vektora výslednice.]



Obr. 265

Príklad 266. Zistite veľkosť síl P_1, P_2, P_3, keď ich výslednicou je sila R, pôsobiaca v ťažisku hranola veľkosti $R = 45$ Mp. Pravouhlý hranol nech má rozmery 90/45/120 cm *(obr. 266)*.

[Sila $P_1 = P_2 = P_3 = 15{,}0$ Mp.]



Obr. 266

Příklad 1.34

Zadání : Určit výsledný účinek soustavy sil $\{\vec{F}_i\}$ (i = 1; ...; 4) v prostoru. Velikosti sil (F_i), poloha (x_i , y_i , z_i) a směrové úhly (α_i , β_i , γ_i) jsou uvedeny v tabulce 1.3. Určit centrální osu soustavy sil.

Řešení : Výpočet složek výsledné síly $\vec{F}_r$ a statického momentu $\vec{M}_r$ podle rovnic (1.58) je uspořádán do tabulky 1.3 .

Tabulka 1.3

i	F_i (kN)	x_i (m)	y_i (m)	z_i (m)	α_i (°)	β_i (°)	γ_i (°)	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
1	4,0	2,0	3,0	4,0	45	60	60	0,707	0,500	0,500
2	5,0	4,0	2,5	0,0	60	120	45	0,500	-0,500	0,707
3	6,0	1,0	-4,0	2,0	30	60	90	0,866	0,500	0,000
4	3,0	-2,0	5,0	-1,0	90	180	90	0,000	-1,000	0,000

i	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}	$F_{iz}\,y_i - F_{iy}\,z_i$	$F_{ix}\,z_i - F_{iz}\,x_i$	$F_{iy}\,x_i - F_{ix}\,y_i$
1	2,828	2,000	2,000	-2,000	7,312	-4,484
2	2,500	-2,500	3,535	8,838	-14,140	-3,750
3	5,196	3,000	0,000	-6,000	10,392	17,784
4	0,000	-3,000	0,000	-3,000	0,000	6,000
Σ	10,524	-0,500	5,353	-2,162	3,564	15,550
	F_{rx}	F_{ry}	F_{rz}	M_x	M_y	M_z

a)

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2} = \sqrt{141,641} = 11,9 \text{ kN}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_{rx}}{F_r} = 0,884 \; ; \qquad \cos\beta = -0,042 \; ; \qquad \cos\gamma = 0,465 \; .$$

$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{259,17} = 16,090 \text{ kN m}$$

$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M_r} = -0,462 \; ; \qquad \cos\mu = 0,221 \; ; \qquad \cos\nu = 0,966 \; .$$

b) Úhel ψ vektorů $\vec{F}_r$, $\vec{M}_r$ (1.61) :

$$\cos\psi = 0,884\,(-0,462) + (-0,042)\,0,221 + 0,465 \,.\, 0,966 = 0,308$$

$$\psi = 72° \; , \qquad \sin\psi = 0,951 \; .$$

c) Složky statického momentu $\vec{M}_r$ (1.63) :

$$M_c = M_r \cos\psi = 4,90 \text{ kN m} \; ; \qquad M_n = M_r \sin\psi = 15,30 \text{ kN m}$$

d) Složky hlavního momentu M_c ve směru souřadnicových os (1.64) :

$$M_{cx} = M_c \cos\alpha = 4,33 \text{ kN m} \; ; \quad M_{cy} = M_c \cos\beta = -0,205 \text{ kN m} \; ;$$

$$M_{cz} = M_c \cos\gamma = 2,20 \text{ kN m} \; .$$

Složky momentu M_n ve směru souřadnicových os (1.65) :

$$M_{nx} = M_x - M_{cx} = -6,49 \text{ kN m} \; ; \quad M_{ny} = M_y - M_{cy} = 3,76 \text{ kN m} \; ;$$

$$M_{nz} = M_z - M_{cz} = 13,35 \text{ kN m} \; .$$

Rovnice centrální osy (1.66) :

$$5,535\,y + 0,500\,z = -6,490 \; ; \qquad 10,524\,z - 5,535\,x = 3,760 \; ;$$

$$-0,500\,x - 10,524\,y = 13,350 \; .$$

1. Určete výsledný účinek soustavy sil $\{\vec{F}_i\}$ zadaných v tabulce :

i	F_i (kN)	(x_i, y_i, z_i) (m)	$(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ (°)
1	30	-3; 0; -2	120; 40; 113,83
2	60	2; 2; 2	60; 80; 31,96
3	20	1; -3; 0	90; 180; 90

(F_r = 43,76 kN ,

$\cos\alpha_r$ = 0,343 ; $\cos\beta_r$ = 0,307 ;

M_r = 186,56 kN m ,

$\cos\lambda$ = 0,680 ; $\cos\mu$ = -0,262 ;

$\cos\nu$ = 0,688 .

Příklad 1.35

Z a d á n í : Stanovit výsledný účinek soustavy sil $F_1 = F_2 = F_3 = 5$ kN působících v hranách kvádru (obr. 1.64) .

Ř e š e n í : Silová výslednice $\vec{F}_r$ soustavy $\{\vec{F}_i\}$:

$$F_{rx} = F_1 = 5{,}0 \text{ kN}$$
$$F_{ry} = F_2 = 5{,}0 \text{ kN} \qquad F_r = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 8{,}66 \text{ kN}$$
$$F_{rz} = F_3 = 5{,}0 \text{ kN}$$
$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{F_i}{F_r} = 0{,}577$$

Statický moment $\vec{M}_r$ soustavy $\{\vec{F}_i\}$:

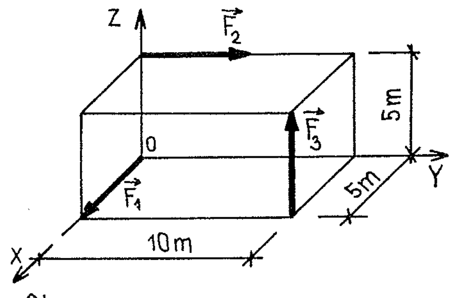
$$M_x = 10\,F_3 - 5\,F_2 = 25{,}0 \text{ kN m} ; \quad M_y = -5\,F_3 = -25{,}0 \text{ kN m} ; \quad M_z = 0 ;$$
$$M_r = \sqrt{25^2 + (-25)^2} = 35{,}40 \text{ kN m}$$
$$\cos\lambda = \frac{M_x}{M_r} = 0{,}707 ; \quad \cos\mu = -0{,}707 ; \quad \cos\nu = 0$$

Úhel vektorů $\vec{F}_r$, $\vec{M}_r$ (1.61) :

$$\cos\psi = \frac{5.25 + 5(-25) + 5.0}{V\,M_r} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi = \pi/2 .$$

Výslednice zadané soustavy sil $\{\vec{F}_i\}$ je jediná síla, neboť $\vec{F}_r \perp \vec{M}_r$. Rovnice výsledné síly $\vec{F}_r$ (podle (1.62)) :

$$5y - 5z = 25 , \text{ tj.: } \quad y - z = 5 ,$$
$$5z - 5x = -25 , \quad z - x = -5 ,$$
$$5x - 5y = 0 , \quad x - y = 0 .$$



Obr. 1.64

Příklad 1.36

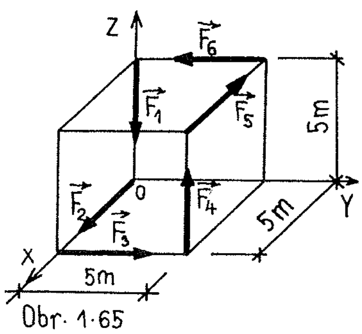
Z a d á n í : Stanovit výsledný účinek sil F_i = 2 kN (i= 1, ..., 6) působících v hranách krychle podle obr. 1.65 .

Ř e š e n í : Silová výslednice :

$$F_{rx} = F_2 - F_5 = 0 ; \quad F_{ry} = F_3 - F_6 = 0 ;$$
$$F_{rz} = -F_1 + F_4 = 0 ; \quad F_r = 0$$

Statický moment M_r:

$$M_x = 5\,F_4 + 5\,F_6 = 20 \text{ kN m}$$
$$M_y = -5\,F_4 - 5\,F_5 = -20 \text{ kN m}$$
$$M_z = 5\,F_3 + 5\,F_5 = 20 \text{ kN m}$$
$$M_r = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{1200} = 34{,}6 \text{ kN m}$$
$$\cos\lambda = 0{,}577 ; \quad \cos\mu = -0{,}577 ; \quad \cos\nu = 0{,}577 .$$

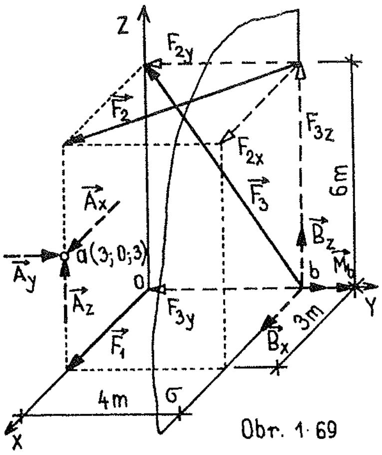


Obr. 1.65

Výsledným účinkem soustavy sil je dvojice sil o statickém momentu $\vec{M}_r$. Dvojice sil působí v libovolné rovině $\rho \perp \vec{M}_r$.

Příklad 1.40

Z a d á n í : Síly $\{\vec{F_i}\}(i = 1;\ 2;\ 3)$, jejichž velikosti jsou úměrné rozměrům kvádru na obr. 1.69 (1 m ≘ 1 kN) uveďte do rovnováhy dvěma silami $\vec{A}$, $\vec{B}$. Paprsek A prochází bodem $a\,(3;\ 0;\ 3)$ a síla $\vec{B}$ působí v rovině σ , která je boční rovinou kvádru ($y = 4$).



Obr. 1.69

Ř e š e n í : Síla $\vec{A}$ působící v paprsku procházejícím daným bodem a bude určena třemi složkami A_x, A_y, A_z. Sílu $\vec{B}$ působící v rovině určíme složkami B_x, B_z a statickým momentem M_b k průsečíku b osy Y s rovinou σ (obr. 1.69). Statické podmínky rovnováhy podle (1.69)

$$\swarrow\quad F_1 + F_{2x} + A_x + B_x = 0$$
$$\rightarrow\quad -F_{2y} - F_{3y} + A_y = 0$$
$$\uparrow\quad F_{3z} + A_z + B_z = 0$$
$$\swarrow\quad 6F_{2y} + 4F_{3z} - 3A_y + 4B_z = 0$$
$$\rightarrow\quad 6F_{2x} + 3A_x - 3A_z + M_b = 0$$
$$\uparrow\quad -4F_{2x} + 3A_y - 4B_x = 0$$

$$3 + 3 + A_x + B_x = 0$$
$$-4 - 4 + A_y = 0$$
$$6 + A_z + B_z = 0$$
$$6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - 3A_y + 4B_z = 0$$
$$6 \cdot 3 + 3A_x - 3A_z + M_b = 0$$
$$-4 \cdot 3 + 3A_y - 4B_x = 0$$

Determinant soustavy rovnic $D = 16$.

Výsledky řešení :

$A_x = 9{,}0$ kN ; $A_y = 8{,}0$ kN ; $A_z = 0{,}0$ kN ;
$B_x = 3{,}0$ kN ; $B_z = -6{,}0$ kN ; $M_b = 9{,}0$ kN m .

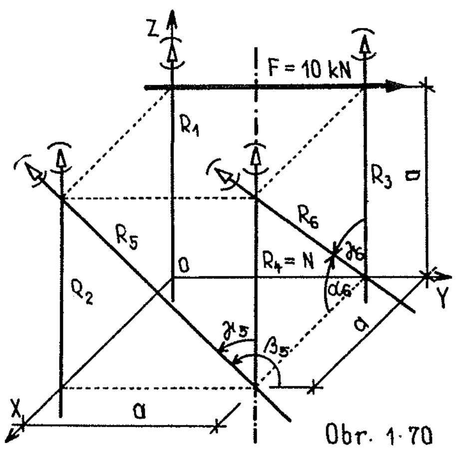
Příklad 1.41

Z a d á n í : Sílu $F = 10$ kN nahradit silami $\{\vec{R_j}\}$ $(j = 1;\ldots;6)$ působícími v paprscích určených na obr. 1.70.

Ř e š e n í : Předpokládáme smysl sil $\vec{R_j}$ a sestavíme podmínky ekvivalence podle (1.70)

$$\swarrow\quad 0 = R_6 \cos\alpha_6$$
$$\rightarrow\quad F = R_5 \cos\beta_5$$
$$\uparrow\quad 0 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \cos\gamma_5 + R_6 \cos\gamma_6$$

$$\swarrow\quad -Fa = R_3 a + R_4 a + R_5 \cos\gamma_5 \cdot a + R_6 \cos\gamma_6 \cdot a$$
$$\rightarrow\quad 0 = -R_2 a - R_4 a - R_5 \cos\gamma_5 \cdot a$$
$$\uparrow\quad 0 = R_5 \cos\beta_5 \cdot a - R_6 \cos\alpha_6 \cdot a$$



Obr. 1.70

Determinant soustavy rovnic

$$\begin{array}{cccccc} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}707 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0{,}707 & 0{,}707 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0{,}707 & 0{,}707 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}707 & -0{,}707 \end{vmatrix} = 0$$

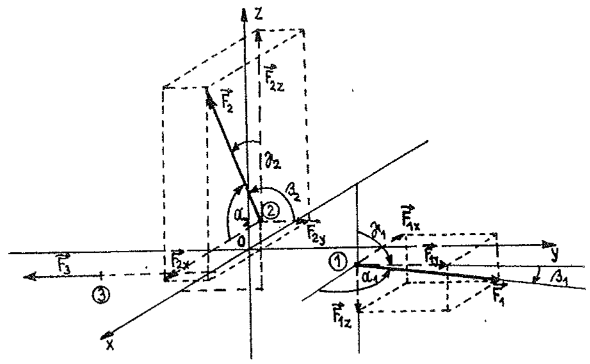
Determinant soustavy podmínkových rovnic je nulový (poslední řádek je lineární kombinací prvních dvou řádků) a soustava nemá řešení. Nahražení síly $\vec{F}$ silami v zadaných paprscích není možné, neboť paprsek R_4 je nulovou přímkou N soustavy sil $\vec{R_j}$. Soustava sil $\{\vec{R_j}\}$ má k nulové přímce nulový statický moment, kdežto statický moment síly $\vec{F}$ je nenulový, $M_N = -Fa$.

P Ř Í K L A D 2.32

Určete početně velikost výslednice V a velikost výsledného momentu M dané obecné soustavy sil $\{F_i\}$, obr. 2.59 .

i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	α_i °	β_i °	γ_i °	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
1	30	-3	0	-2	120	40	113,83	-0,5	0,766	-0,404
2	60	2	2	2	60	80	31,96	0,5	0,174	0,848
3	20	1	-3	0	90	180	90	0	-1	0

$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1$



Obr. 2. 59

Složky sil a momentů sil $\{F_i\}$:

$F_{1x} = 30\ (-0,5) = -15$ kN ; $F_{1y} = 30\ .\ 0,766 = 22,98$ kN ;

$F_{1z} = 30\ (-0,404) = -12,12$ kN ; $F_{2x} = 60\ .\ 0,5 = 30$ kN ;

$F_{2y} = 60\ .\ 0,174 = 10,44$ kN ; $F_{2z} = 60\ .\ 0,848 = 50,88$ kN ;

$F_{3x} = 20\ .\ 0 = 0$; $F_{3y} = 20\ .\ (-1) = -20$ kN ;

$F_{3z} = 20,0 = 0$

$M_{1x} = (-12,12).0 - 22,98\ (-2) = 45,96$ kN ;

$M_{1y} = (-15)\ (-2) - (-12,12)\ .\ (-3) = -6,36$ kNm

$M_{2x} = 50,88\ .\ 2 - 10,44\ .\ 2 = 80,88$ kNm

$M_{2y} = 30\ .\ 2 - 50,88\ .\ 2 = -41,76$ kNm

$M_{3x} = 0 - (-20)\ .\ 0 = 0$ $M_{3y} = 0$

$M_{1z} = 22,98\ .\ (-3) - (-15)\ .\ 0 = -68,94$ kNm

$M_{2z} = 10,44\ .\ 2 - 30\ .\ 2 = -39,12$ kNm

$M_{3z} = (-20)\ .\ 1 - 0 = -20$ kNm

Složky vektoru výslednice :

$V_x = -15 + 30 = +15$ kN

$V_y = 22,98 + 10,44 - 20 = 13,42$ kN

$V_z = -12,12 + 50,88 + 0 = 38,77$ kN

Velikost výslednice :

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{15^2 + 13,42^2 + 38,77^2} = 43,67 \text{ kN}$$

Poloha paprsku výslednice :

$$\cos\alpha_V = \frac{15}{43,67} = 0,343 \qquad \alpha_V = 70^\circ$$

$$\cos\beta_V = \frac{13,42}{43,67} = 0,307 \qquad \beta_V = 72,12^\circ$$

$$\cos\gamma_V = \frac{38,77}{43,67} = 0,888 \qquad \gamma_V = 27,43^\circ$$

Složky vektoru výsledného momentu :

$M_x = 45,96 + 80,88 + 0 = 126,84$ kNm

$M_y = -6,36 - 41,76 + 0 = -48,12$ kNm

$M_z = -68,94 - 39,12 - 20 = -128,06$ kNm

Velikost výsledného momentu :

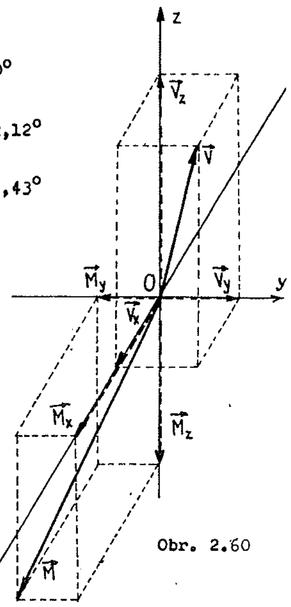
$$|\vec{M}| = M = \sqrt{126,84^2 + 48,12^2 + 128,06^2} = 186,56 \text{ kNm}$$

Poloha paprsku výsledného momentu :

$$\cos\alpha_M = \frac{126,84}{186,56} = 0,68 \qquad \alpha_M = 47,16^\circ$$

$$\cos\beta_M = \frac{-48,12}{186,56} = -0,262 \qquad \beta_M = 105,18^\circ$$

$$\cos\gamma_M = \frac{-128,06}{186,56} = -0,686 \qquad \gamma_M = 133,35^\circ$$

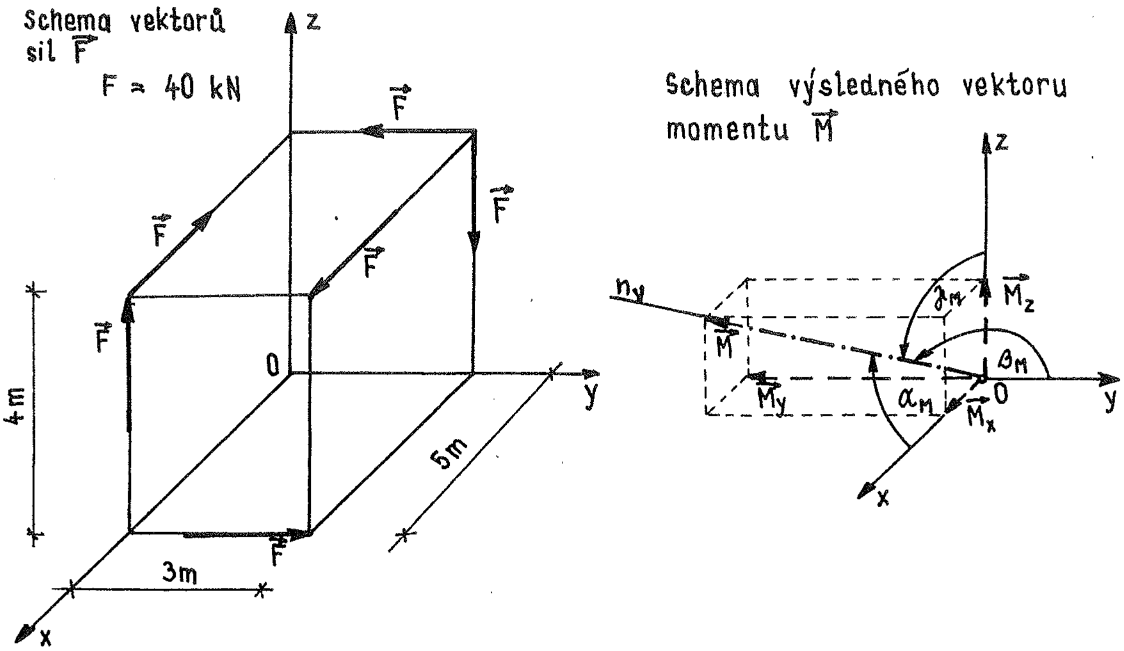


Obr. 2.60

Poloha bivektoru je zřejmá z obr. 2.60

P Ř Í K L A D 2.34

Vypočtěte velikost, směr a polohu výsledného vektoru $\vec{V}$ a $\vec{M}$ soustavy sil $\{F_i\} \equiv \{F\}$ ležících na hranách daného kvádru, obr. 2.61 .



Obr. 2.61

$V_x = F - F = 0$ $\qquad |\vec{V}| = V = 0$

$V_y = F - F = 0$

$V_z = F - F = 0$

$M_x = F \cdot 4 - F_3 \cdot 3 = 40$ **kNm** $\qquad |\vec{M}| = M = \sqrt{40^2 + 200^2 + 80^2} = 219$ **kNm**

$M_y = F\,(4 - 4 - 5) = -200$ **kNm**

$M_z = F\,(5 - 3) = 80$ **kNm**

Výsledný silový vektor je roven nule, celkový statický účinek soustavy sil $\{F\}$ je pouze momentový. Soustavu sil lze nahradit silovou dvojicí o momentu $M = 219$ kNm, ležící v libovolné rovině ν , jejíž normálou je paprsek vektoru M .

Směrové kosíny normály roviny ν :

$$\cos\alpha_{n\nu} = \cos\alpha_M = \frac{40}{219} \qquad \alpha_{n\nu} = \alpha_M = 79{,}48^\circ$$

$$\cos\beta_{n\nu} = \cos\beta_M = \frac{-200}{219} \qquad \beta_{n\nu} = \beta_M = 156^\circ$$

$$\cos\gamma_{n\nu} = \cos\gamma_M = \frac{80}{219} \qquad \gamma_{n\nu} = \gamma_M = 68{,}57^\circ$$

P Ř Í K L A D 2.36a

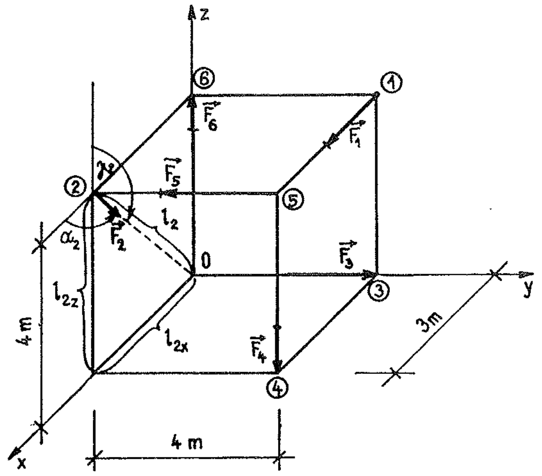
Stanovte početně velikost, směr a polohu výsledného vektoru síly a výsledného vektoru momentu v bodě 0 dané silové soustavy $\{F_i\}$ (obr. 2.63)

$$\cos\alpha_2 = \frac{l_{2x}}{l_2} = \frac{-3}{\sqrt{3^2+4^2}} = -0{,}6$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{l_{2z}}{l_2} = \frac{-4}{\sqrt{3^2+4^2}} = -0{,}8$$

$$\cos\beta_2 = 0$$

Schéma známých sil $\{F_i\}$



Obr. 2.63

Souřadnice působišť a směrové kosíny sil $\{F_i\}$:

i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
1	30	0	4	4	1	0	0
2	10	3	0	4	-0,6	0	-0,8
3	40	0	4	0	0	1	0
4	20	3	4	0	0	0	-1
5	50	3	4	4	0	-1	0
6	15	0	0	4	0	0	1

Výsledný vektor síly :

$$V_x = \sum_{i=1}^{6} F_i \cdot \cos\alpha_i = 30 \cdot 1 + 10(-0{,}6) = 24 \text{ kN}$$

$$V_y = \sum_{i=1}^{6} F_i \cdot \cos\beta_i = 40 \cdot 1 + 50(-1) = -10 \text{ kN}$$

$$V_z = \sum_{i=1}^{6} F_i \cdot \cos\gamma_i = 10(-0{,}8) + 20(-1) + 15 \cdot 1 = -13 \text{ kN}$$

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{24^2 + 10^2 + 13^2} = 29{,}07 \text{ kN}$$

$$\cos\alpha_V = \frac{V_x}{V} = \frac{24}{29{,}07} = 0{,}826 \qquad \alpha_V = 34{,}35^\circ$$

$$\cos\beta_V = \frac{V_y}{V} = \frac{-10}{29{,}07} = -0{,}344 \qquad \beta_V = 110{,}12^\circ$$

$$\cos\gamma_V = \frac{V_z}{V} = \frac{-13}{29{,}07} = -0{,}447 \qquad \gamma_V = 116{,}56^\circ$$

Kontrola : $0{,}826^2 + 0{,}344^2 + 0{,}447^2 = 1$

Výsledný vektor momentu :

$$M_x = \sum_{i=1}^{6} F_i(y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i) = 20[4(-1)] + 50[-4(-1)] = 120 \text{ kNm}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{6} F_i(z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i) = 30(4.1) + 10[4(-0{,}6) - 3(-0{,}8)] + 20[-3(-1)] = 180 \text{ kNm}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{6} F_i(x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i) = 30[-4.1] + 50[3(-1)] = -270 \text{ kNm}$$

$$|\vec{M}| = M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{120^2 + 180^2 + 270^2} = 345{,}98 \text{ kNm}$$

$$\cos\alpha_M = \frac{M_x}{M} = \frac{120}{345{,}98} = 0{,}347 \qquad \alpha_M = 69{,}70^\circ$$

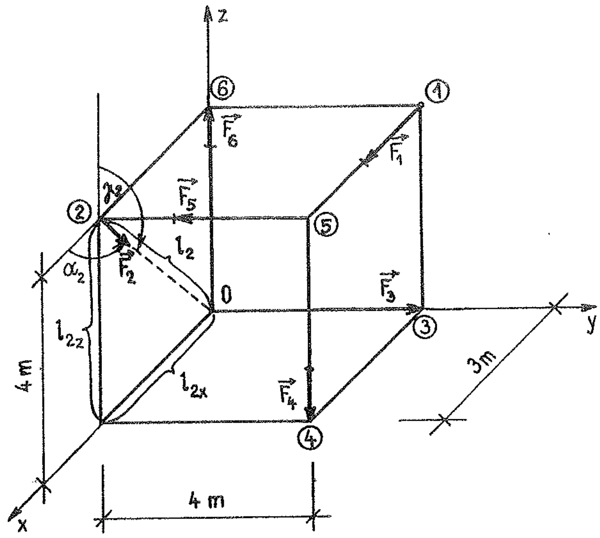
$$\cos\beta_M = \frac{M_y}{M} = \frac{180}{345{,}98} = 0{,}52 \qquad \beta_M = 58{,}65^\circ$$

$$\cos\gamma_M = \frac{M_z}{M} = \frac{-270}{345{,}98} = -0{,}78 \qquad \gamma_M = 141{,}3^\circ$$

Kontrola : $0{,}347^2 + 0{,}52^2 + 0{,}78^2 = 1$

P Ř Í K L A D 2.36b

uveďte do rovnováhy soustavu sil $\{F_i\}$ silami $\{P_j\}$ (obr. 2.65)



Souřadnice působišť a směrové kosiny sil $\{F_i\}$:

i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$
1	30	0	4	4	1	0	0
2	10	3	0	4	-0,6	0	-0,8
3	40	0	4	0	0	1	0
4	20	3	4	0	0	0	-1
5	50	3	4	4	0	-1	0
6	15	0	0	4	0	0	1

Schema paprsků neznámých sil $\{P_j\}$

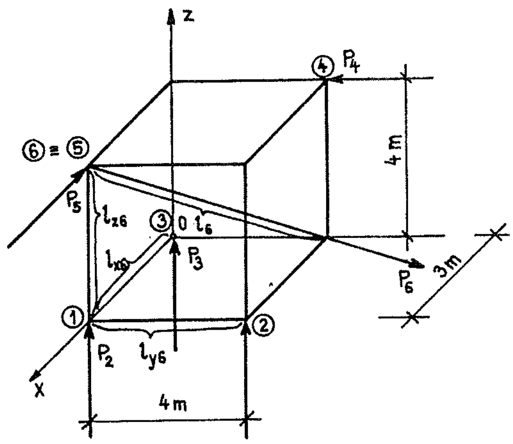
Směrové kosiny síly P_6 :

$$l_6 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = 6,4 \text{ m}$$

$$\cos\alpha_{P_6} = \frac{l_{x_6}}{l_6} = \frac{-3}{6,4} = -0,469$$

$$\cos\beta_{P_6} = \frac{l_{y6}}{l_6} = \frac{4}{6,4} = 0,625$$

$$\cos\gamma_{P_6} = \frac{l_{z6}}{l_6} = \frac{-4}{6,4} = -0,625$$



Obr. 2. 65

Kontrola :

$$0,469^2 + 0,625^2 + 0,625^2 = 1$$

Souřadnice působišť a směrové kosiny sil $\{P_j\}$:

i	x_{P_j} [m]	y_{P_j} [m]	z_{P_j} [m]	$\cos\alpha_{P_j}$	$\cos\beta_{P_j}$	$\cos\gamma_{P_j}$
1	3	4	0	0	0	1
2	3	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1
4	0	4	4	0	-1	0
5	3	0	4	-1	0	0
6	3	0	4	-0,469	0,625	-0,625

Podmínky rovnováhy : $\sum_{i=1}^{6}\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{6}\vec{P}_j = 0 \; , \qquad \sum_{i=1}^{6}\vec{M}_i + \sum_{j=1}^{6}\vec{M}_j = 0$

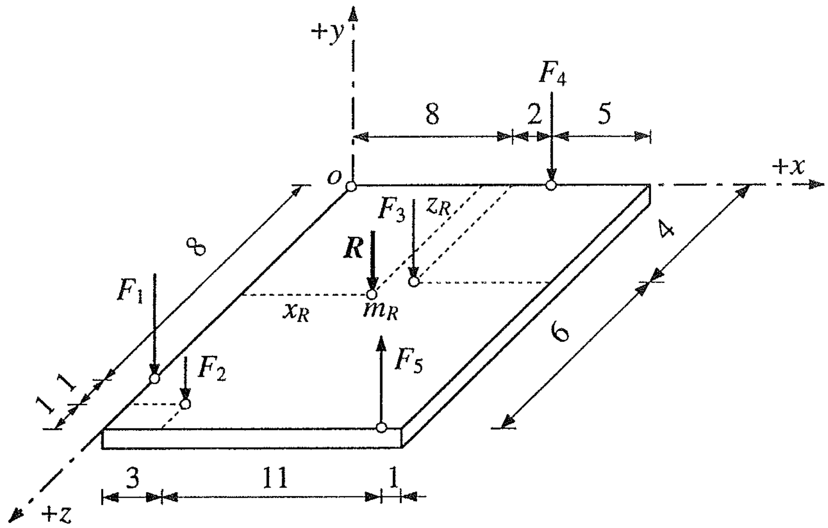
$$24 - P_5 - 0,469\,P_6 = 0$$
$$-10 - P_4 + 0,625\,P_6 = 0$$
$$-13 + P_1 + P_2 + P_3 - 0,625\,P_6 = 0$$
$$120 + 4.P_1 + 4.P_4 - 4.0,625\,P_6 = 0$$
$$180 - 3P_1 - 3P_2 - 4P_5 + [4(-0,469) - 3(-0,625)]\,.\,P_6 = 0$$
$$-270 + 3\,.\,0,625\,P_6 = 0$$

P_1 = **-80 kN ;** P_2 = **198,05 kN ;** P_3 = **-195,05 kN ;**

P_4 = **80 kN ;** P_5 = **-43,54 kN ;** P_6 = **144 kN .**

Příklad 3.12

Stanovte výslednici $\boldsymbol{R}$ soustavy sil $F_1 = 700$ N, $F_2 = 1200$ N, $F_3 = 1500$ N, $F_4 = 600$ N, $F_5 = 800$ N působících na vodorovnou pravoúhlou tuhou desku na obr. 3.21.



Obr. 3.21. Soustava pěti svislých sil v prostoru

Řešení

Výslednice $\boldsymbol{R}$ má velikost

$$R = \sum_{i=1}^{5} F_i = -700 - 1200 - 1500 - 600 + 800 = -3200 \text{ N } (\downarrow)$$

a smysl nesouhlasný s osou $+y$. Polohu výslednice určíme z momentových podmínek soustavy sil k osám x, z

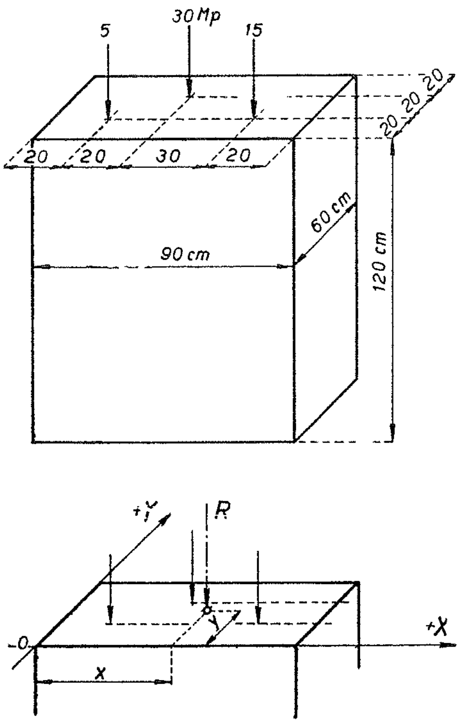
$$M_x = \sum_{i=1}^{5} F_i z_i = R z_R = 700 \cdot 8 + 1200 \cdot 9 + 1500 \cdot 4 + 600 \cdot 0 - 800 \cdot 10 = 14400 \text{ Nm},$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{5} F_i x_i = R x_R = -(700 \cdot 0 + 1200 \cdot 3 + 1500 \cdot 8 + 600 \cdot 10) + 800 \cdot 14 = -10400 \text{ Nm}.$$

Soustava rovnoběžných sil vyvozuje k ose x kladný moment a k ose z záporný moment. Má-li vyvodit tytéž momenty výslednice $\boldsymbol{R}$ směřující dolů, musí ležet v kvadrantu omezeném kladnými souřadnicovými osami $+x$, $+z$ a mít působiště m_R (obr. 3.21) o kladných souřadnicích

$$x_R = \frac{M_z}{R} = \frac{10400}{3200} = 3{,}25 \text{ m}, \qquad z_R = \frac{M_x}{R} = \frac{14400}{3200} = 4{,}5 \text{ m}.$$

Príklad 257. Určte výslednicu naznačenej sústavy zvislých síl, ktorá pôsobí na pravouhlý hranol 90/60/120 cm *(obr. 257)*.



Obr. 257

Riešenie:

Výslednicou daných troch síl je sila zvislá, smerujúca dolu, ktorej veľkosť

$$R = 5{,}0 + 30{,}0 + 15{,}0 = 50{,}0 \text{ Mp}$$

Polohu tejto výslednice dostaneme z momentových podmienok napísaných ku kolmým osiam XY.

Vzdialenosť výslednice R od osi Y nájdeme z rovnice vyjadrujúcej momentovú rovnosť:

$$Rx = 5{,}0 \,.\, 20{,}0 + 30{,}0 \,.\, 40{,}0 + 15{,}0 \,.\, 70{,}0$$

$$50x = 100 + 1\,200 + 1\,050$$

$$x = \frac{2\,350}{50} = 47 \text{ cm}$$

Z momentovej rovnosti napísanej k osi X vyplýva rovnica

$$Ry = 5{,}0 \,.\, 20{,}0 + 30{,}0 \,.\, 40{,}0 + 15{,}0 \,.\, 20{,}0$$

$$50y = 100{,}0 + 1\,200{,}0 + 300{,}0$$

$$y = \frac{1\,600{,}0}{50{,}0} = 32 \text{ cm}$$

Príklad 258. Vodorovná doska je zavesená na troch zvislých povrazoch. V strede dosky pôsobí zvislá sila $R = 10{,}0$ Mp. Zistite veľkosť síl P_1, P_2, P_3, ktoré pôsobia v povrazoch *(obr. 258)*.

Riešenie:

Úlohu vyriešime napísaním jednej súčtovej podmienky (vo zvislom smere) a dvoch momentových podmienok (k osiam X, Y):

$$P_1 + P_2 + P_3 - R = 0$$

$$R \,.\, 0{,}50 - P_2 \,.\, 0{,}70 - P_3 \,.\, 1{,}0 = 0$$

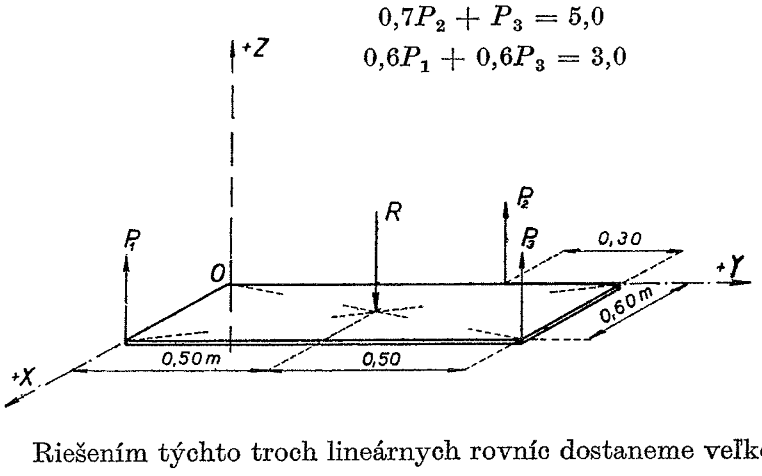
$$-R \,.\, 0{,}30 + (P_1 + P_3) \,.\, 0{,}60 = 0$$

Dosadením za R dostaneme rovnice

$$P_1 + P_2 + P_3 = 10{,}0$$

$$0{,}7P_2 + P_3 = 5{,}0$$

$$0{,}6P_1 + 0{,}6P_3 = 3{,}0$$



Obr. 258

Riešením týchto troch lineárnych rovníc dostaneme veľkosť síl

$$P_1 = 3{,}5 \text{ Mp}; \qquad P_2 = 5{,}0 \text{ Mp}; \qquad P_3 = 1{,}5 \text{ Mp}$$

Poznámka. Medzi výslednicou R a silami P_1, P_2, P_3 musí byť rovnováha, preto výslednica síl P_1 a P_3 musí mať veľkosť sily P_2 a jej poloha je vo vzdialenosti 0,30 m od osi $+X$ na spojnici pôsobísk síl P_1, P_3 (o čom sa výpočtom ľahko presvedčíme).

Príklad 259. Na kruhovú dosku pôsobia dve dané zvislé sily A, B, ktoré máme uviesť do rovnováhy troma pravidelne po obvode rozmiestnenými silami *(obr. 259)*. Nech polomer dosky $r = 2{,}0$ m, sila $A = 6{,}0$ Mp, $B = 3{,}0$ Mp.

Riešenie:

Ak napíšeme momentovú podmienku rovnováhy k spojnici pôsobísk síl P_1 a P_2, dostaneme veľkosť sily P_3:

$$B\frac{r}{2} - P_3\frac{3}{2}r = 0$$

$$3P_3 = B; \quad P_3 = \frac{B}{3}; \quad P_3 = \frac{3{,}0}{3{,}0} = 1{,}0 \text{ Mp}$$

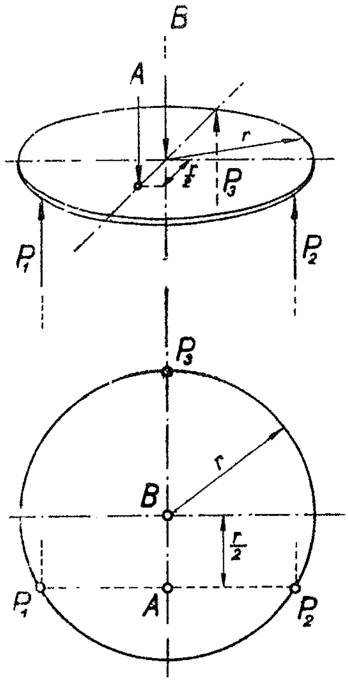
Zo súčtovej podmienky vo zvislom smere vyplýva:

$$P_1 + P_2 + P_3 - A - B = 0$$

$$P_1 + P_2 = A + B - P_3 = A + B - \frac{B}{3} = A + \frac{2}{3}B$$

Na základe symetrie je:

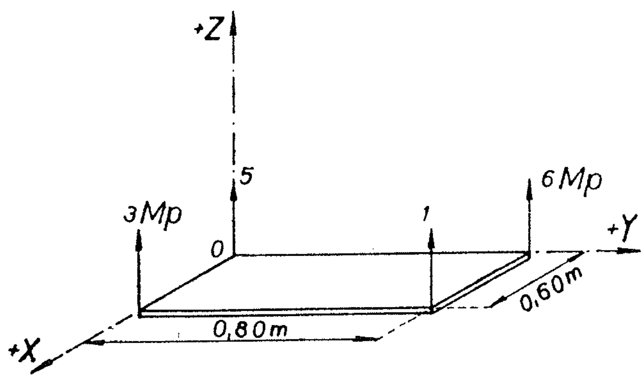
$$P_1 = P_2 = \frac{A + \frac{2}{3}B}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} = \frac{6{,}0}{2} + \frac{3{,}0}{3} = 4{,}0 \text{ Mp}$$



Obr. 259

Príklad 267. Na vodorovnú dosku pôsobia zvislé sily smerujúce hore. Urče ich výslednicu *(obr. 267)*.

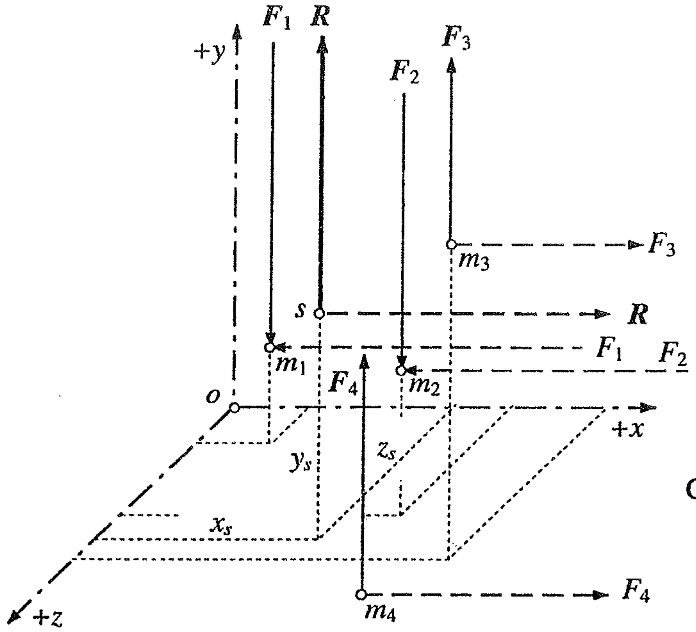
[Výslednica $R = 15{,}0$ Mp. Poloha výslednice $x = 0{,}16$ m; $y \doteq 0{,}37$ m.]



Obr. 267

Příklad 3.13

Stanovte statický střed prostorové soustavy sil $F_1 = -1$ kN, m_1 (1; 2; 1) m, $F_2 = -2$ kN, m_2 (4; 3; 3) m, $F_3 = 3$ kN, m_3 (5; 6; 4) m, $F_4 = 4$ kN, m_4 (4; 0; 5) m na obr. 3.22.



Obr. 3.22. Statický střed soustavy rovnoběžných sil v prostoru

Řešení

Vyšetřovaná soustava sil rovnoběžných s osou y má velikost

$R = -1 - 2 + 3 + 4 = 4$ kN (↑),

vyvozuje k souřadnicovým osám x, z statické momenty

$$M_x = \sum_{i=1}^{4} F_i z_i = R z_s = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = -25 \text{ kNm},$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{4} F_i x_i = R x_s = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 22 \text{ kNm},$$

z nichž plynou souřadnice statického středu

$$x_s = \frac{M_z}{R} = \frac{22}{4} = 5{,}5 \text{ m}, \qquad z_s = \frac{M_x}{R} = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ m}.$$

Otočíme-li celou soustavu sil včetně jejich výslednice $R = 4$ kN do polohy rovnoběžné se souřadnicovou osou x (obr. 3.22), potom

$$M_y = \sum_{i=1}^{4} F_i z_i = R z_s = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 25 \text{ kNm},$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{4} F_i y_i = R y_s = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 6 - 4 \cdot 0 = -10 \text{ kNm}$$

a odtud souřadnice

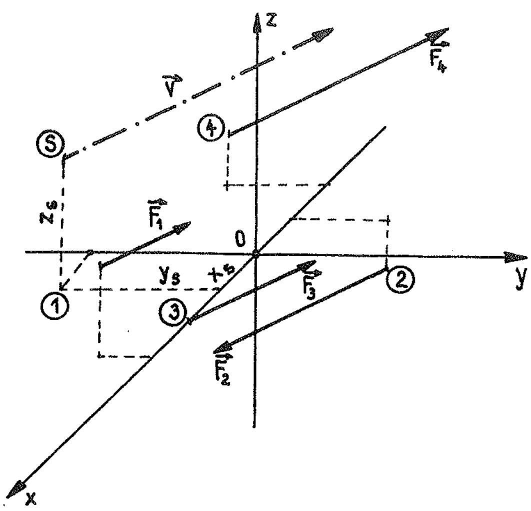
$$z_s = \frac{M_y}{R} = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ m}, \qquad y_s = \frac{M_z}{R} = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ m}.$$

Pro soustavu sil otočenou do polohy rovnoběžné se souřadnicovou osou z získáme již určené souřadnice x_s, y_s.

P Ř Í K L A D 2.37

Vypočtěte polohu statického středu soustavy rovnoběžných sil $\{F_i\}$, jsou-li dány jejich velikosti a působiště, obr. 2.68.

i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]	z_i [m]
1	20	3	-1	2
2	-40	-1	2	-1
3	30	2	0	0
4	50	-2	-2	1



Obr. 2.68

Velikost výslednice :

$|\vec{V}| = V = 20-40+30+50 = 60$ kN

Souřadnice statického středu :

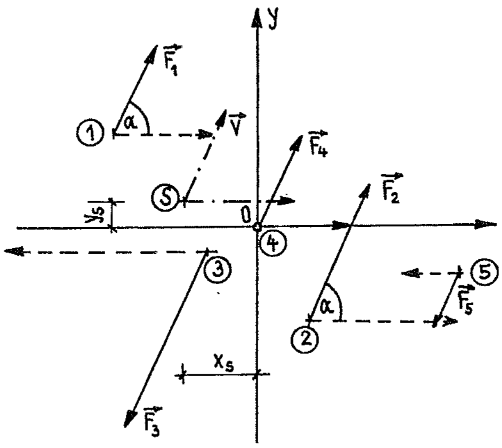
$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{4} F_i x_i}{V} = \frac{20 \cdot 3 + (-40)(-1) + 30 \cdot 2 + 50(-2)}{60} = 1 \text{ m}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{4} F_i y_i}{V} = \frac{20(-1) + (-40) \cdot 2 + 30 \cdot 0 + 50(-2)}{60} = -3{,}3\dot{3} \text{ m}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{4} F_i z_i}{V} = \frac{20 \cdot 2 + (-40)(-1) + 30 \cdot 0 + 50 \cdot 1}{60} = 2{,}67 \text{ m}$$

P Ř Í K L A D 2.38

Vypočtěte polohu statického středu soustavy rovnoběžných sil $\{F_i\}$ působících v rovině $0, x, y$, obr. 2.69.



i	F_i [kN]	x_i [m]	y_i [m]
1	20	-3	+2
2	30	1	-2
3	-40	-1	-0,5
4	20	0	0
5	-10	4	-1

Obr. 2.69

Velikost výslednice

$V = 20 + 30 - 40 + 20 - 10 = 20$ kN

Souřadnice statického středu

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i x_i}{V} = \frac{20(-3) + 30.1 + (-40)(-1) + 20.0 + (-10).4}{20} = -1{,}5 \text{ m}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{5} F_i y_i}{V} = \frac{20.2 + 30(-2) + (-40)(-0{,}5) + 20.0 + (-10)(-1)}{20} = +0{,}5 \text{ m}$$

Pro libovolný úhel α bude paprsek výslednice vždy procházet bodem S.