

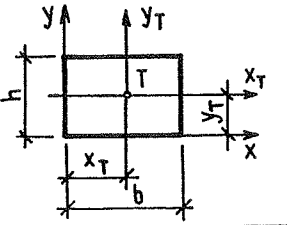
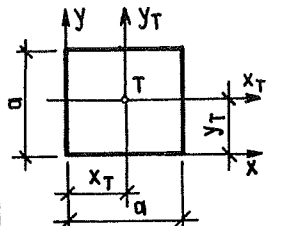
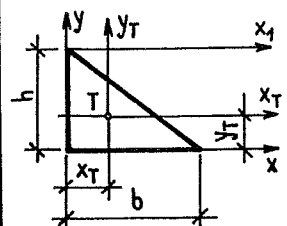
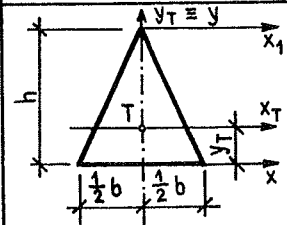
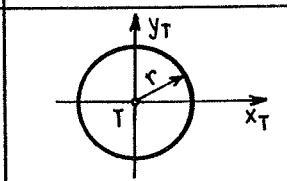
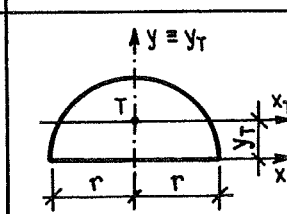
TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $C_g(y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIÁČNÍ MOMENTY D
	$A = bh$	$y_c = \frac{b}{2}$ $z_c = \frac{h}{2}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{12}, I_{Z_c} = \frac{hb^3}{12}$ $I_Y = \frac{bh^3}{3}, I_Z = \frac{hb^3}{3}$	$D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{4}$ $D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	
	$A = \frac{bh}{2}$	$z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}, I_{Z_c} = \frac{hb^3}{48}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3}$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_{Y_c} = \frac{bh^3}{36}, I_{Z_c} = \frac{hb^3}{36}$ $I_Y = \frac{bh^3}{12}, I_Z = \frac{hb^3}{12}$ $I_{Y'} = \frac{bh^3}{4}$	$D_{Y_cZ_c} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $D_{YZ} = \frac{b^2h^2}{24}$ $D_{Y'Z'} = -\frac{b^2h^2}{8}$ ZNAMÉNKA!
	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \doteq 3,1416 r^2 = 0,7854 d^2$		$I_{Y_c} = I_{Z_c} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \doteq 0,7854 r^4 = 0,0491 d^4$	$D_{Y_cZ_c} = 0$
	$A = \frac{2}{3} bh$	$y_c = \frac{3}{8} b$ $z_c = \frac{2}{5} h$	$I_{Y_c} = \frac{8}{175} bh^3 \doteq 0,0457 bh^3$ $I_{Z_c} = \frac{19}{480} hb^3 \doteq 0,0396 hb^3$ $I_Y = \frac{16}{105} bh^3 \doteq 0,1524 bh^3$ $I_Z = \frac{2}{15} hb^3 \doteq 0,1333 hb^3$ $I_{Y'} = \frac{2}{7} bh^3 \doteq 0,2857 bh^3$ $I_{Z'} = \frac{3}{10} hb^3 \doteq 0,3000 hb^3$	

Pokračování tabulky 3.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TEŽIŠTĚ $C_g (y_c, z_c)$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI I	DEVIACNÍ MOMENTY D
	$A = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{3}{4} b$  $z_c = \frac{3}{10} h$	$I_{Y_c} = \frac{37}{2100} bh^3 \approx 0,0176 bh^3$ $I_{Z_c} = \frac{1}{80} hb^3 \approx 0,0125 hb^3$ $I_Y = \frac{1}{21} bh^3 \approx 0,0476 bh^3$ $I_Z = \frac{1}{5} hb^3 \approx 0,2000 hb^3$ $I_{Y'} = \frac{19}{105} bh^3 \approx 0,1810 bh^3$ $I_{Z'} = \frac{1}{30} hb^3 \approx 0,0333 hb^3$	
	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8} \approx 1,5708 r^2 = 0,3927 d^2$	$z_c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,4244 r$	$I_{Y_c} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 \approx 0,1098 r^4$ $I_{Z_c} = I_Y = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,3928 r^4 = 0,0246 d^4$	$D_{Y_c Z_c} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16} \approx 0,7854 r^2 = 0,1964 d^2$	$y_c = z_c = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,4244 r$	$I_{Y_c} = I_{Z_c} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4 \approx 0,0549 r^4$ $I_Y = I_Z = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0,1963 r^4$	$D_{Y_c Z_c} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4 \approx -0,0165 r^4$ $D_{YZ} = \frac{r^4}{8}$ <b>ZNAMÉNKA!</b>
	$A = \alpha r^2 = \text{arc } \alpha r^2 = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi r^2$	$z_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$I_{Y_c} = r^4 \left( \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ $I_{Z_c} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $I_Y = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$	$D_{Y_c Z_c} = 0$
	$A = r^2 \left( \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$	$z_c = \frac{4r \sin^2 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$	$I_{Y_c} = r^4 \left( \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9(2\alpha - \sin 2\alpha)} \right)$ $I_{Z_c} = \frac{r^4}{48} (12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$ $I_Y = \frac{r^4}{16} (4\alpha - \sin 4\alpha)$	$D_{Y_c Z_c} = 0$
	$A = \pi ab$		$I_{Y_c} = \frac{\pi}{4} ab^3$ $I_{Z_c} = \frac{\pi}{4} ba^3$	$D_{Y_c Z_c} = 0$

TÉŽIŠTĚ, MOMENTY SETRVAČNOSTI A DEVIČNÍ MOMENTY  
VYBRANÝCH ROVINNÝCH OBRAZCŮ

# TABULKA I.

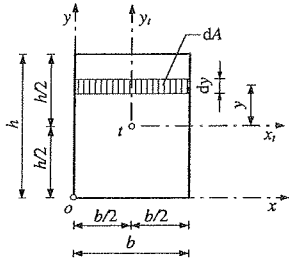
TVAR OBRAZCE		PLOCHA A	SOUŘADNICE TÉŽIŠTĚ $x_T, y_T$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI J	DEVIČNÍ MOMENTY D
OBDELNÍK		$b \cdot h$	$x_T = \frac{b}{2}$ $y_T = \frac{h}{2}$	$J_{x_T} = \frac{1}{12} b h^3$ ; $J_{y_T} = \frac{1}{12} b^3 h$ $J_x = \frac{1}{3} b h^3$ ; $J_y = \frac{1}{3} b^3 h$	$D_{x_T y_T} = 0$ $D_{xy} = \frac{1}{4} b^2 h^2$
ČTVEREC		$a^2$	$x_T = \frac{a}{2}$ $y_T = \frac{a}{2}$	$J_{x_T} = J_{y_T} = \frac{1}{12} a^4$ $J_x = J_y = \frac{1}{3} a^4$	$D_{x_T y_T} = 0$ $D_{xy} = \frac{1}{4} a^4$
PRÁVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK		$\frac{1}{2} b h$	$x_T = \frac{1}{3} b$ $y_T = \frac{1}{3} h$	$J_{x_T} = \frac{1}{36} b h^3$ ; $J_{y_T} = \frac{1}{36} b^3 h$ $J_x = \frac{1}{12} b h^3$ ; $J_y = \frac{1}{12} b^3 h$ $J_{x_1} = \frac{1}{4} b h^3$	$D_{x_T y_T} = -\frac{1}{72} b^2 h^2$ $D_{xy} = \frac{1}{24} b h$ <small><math>D_{x_T y_T} = +\frac{1}{72} b^2 h^2</math> PODLE POLOHY OBRAZCE</small>
ROVNORAMENNÝ TROJÚHELNÍK		$\frac{1}{2} b h$	$y_T = \frac{1}{3} h$	$J_{x_T} = \frac{1}{36} b h^3$ ; $J_{y_T} = \frac{1}{48} b^3 h$ $J_x = \frac{1}{12} b h^3$ $J_{x_1} = \frac{1}{4} b h^3$	$D_{x_T y_T} = 0$ $D_{xy} = 0$
KRUH		$\pi r^2$	-	$J_{x_T} = J_{y_T} = \frac{1}{4} \pi r^4$	$D_{x_T y_T} = 0$
PŮLKRUH		$\frac{1}{2} \pi r^2$	$y_T = \frac{4r}{3\pi} \doteq 0,4244r$	$J_{x_T} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 \doteq 0,1098 r^4$ $J_{y_T} = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_x = \frac{1}{8} \pi r^4$	$D_{x_T y_T} = 0$ $D_{xy} = 0$

POKRAČOVÁNÍ TABULKY I.

TVAR OBRAZCE	PLOCHA A	SOUŘADNICE TĚŽIŠTĚ $x_T, y_T$	AXIÁLNÍ MOMENTY SETRVAČNOSTI J	DEVIACNÍ MOMENTY D
<p>ČTYRČTŮR</p>	$\frac{1}{4} \pi r^2$	$x_T = y_T =$ $= \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \approx$ $\approx 0,4244 r$	$J_{x_T} = J_{y_T} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4 \approx$ $\approx 0,0549 r^4$ $J_x = J_y = \frac{1}{16} \pi r^4$	$D_{x_T y_T} = \left( \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4 \approx$ $\approx -0,0165 r^4$ $D_{xy} = \frac{r^4}{8}$ (znaménka se mění podle polohy obrazce)
<p>KRUHOVÁ VÝSEČ</p>	$\alpha \cdot r^2 =$ $= \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi r^2$	$y_T =$ $= \frac{2}{3} \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}$	$J_{x_T} = r^4 \left( \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ $J_{y_T} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha)$ $J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \sin 2\alpha)$	$D_{x_T y_T} = 0$
<p>KRUHOVÁ ÚSEČ</p>	$r^2 \left( \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)$	$y_T =$ $= \frac{2}{3} \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$	$J_{x_T} = r^4 \left( \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{4}{9} \frac{\sin^6 \alpha}{\alpha - \sin 2\alpha} \right)$ $J_{y_T} = \frac{r^4}{48} (12\alpha - 8 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$ $J_x = \frac{r^4}{16} (4\alpha - \sin 4\alpha)$	$D_{x_T y_T} = 0$
<p>ELIPSA</p>	$\pi \cdot a \cdot b$	—	$J_{x_T} = \frac{1}{4} \pi a b^3$ $J_{y_T} = \frac{1}{4} \pi a^3 b$	$D_{x_T y_T} = 0$
<p>PARABOLICKÁ ÚSEČ</p>	$\frac{4}{3} ab$	$y_T = \frac{2}{5} h$	$J_{x_T} = \frac{16}{175} ab^3 \approx 0,0914 ab^3$ $J_{y_T} = \frac{4}{15} a^3 b \approx 0,2667 a^3 b$ $J_x = \frac{32}{105} ab^3 \approx 0,3048 ab^3$ $J_{x_1} = \frac{4}{7} ab^3 \approx 0,5714 ab^3$	$D_{x_T y_T} = 0$
<p>POLOVINA PARABOLICKÉ ÚSEČE</p>	$\frac{2}{3} ab$	$x_T = \frac{3}{8} a$ $y_T = \frac{3}{5} b$	$J_{x_T} = \frac{8}{175} ab^3$ $J_{y_T} = \frac{19}{480} a^3 b$ $J_x = \frac{2}{7} ab^3$ $J_y = \frac{2}{15} a^3 b$ $J_{x_1} = \frac{16}{105} ab^3$	$D_{x_T y_T} = \frac{1}{60} a^2 b^2$ $D_{xy} = \frac{1}{6} a^2 b^2$ (znaménko se mění podle polohy obrazce)

### Příklad 5.1

Momenty setrvačnosti obdélníku o stranách  $b = 0,2$ ,  $h = 0,3$  m (obr. 5.2).



Obr. 5.2. Obdélníkový průřez

Řešení

Plošný element ve tvaru proužku, rovnoběžný s centrální osou  $x_i$ , má obsah  $dA = b dy$  a moment setrvačnosti

$$dI_{x_i} = y^2 dA = by^2 dy.$$

Centrální moment setrvačnosti celého obdélníku k téže ose

$$I_{x_i} = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = 2b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} = \frac{1}{12} bh^3; \quad (5.4)$$

obdobně platí k ose  $y_i$

$$I_{y_i} = 2h \int_0^{b/2} x^2 dx = \frac{1}{12} hb^3. \quad (5.5)$$

Při výpočtu momentů setrvačnosti obdélníku k osám  $x$ ,  $y$  postupujeme analogicky, ale je nutné uvažovat jiné meze proměnných

$$I_x = b \int_0^h y^2 dy = \frac{1}{3} bh^3, \quad I_y = h \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} hb^3. \quad (5.6)$$

Numerické hodnoty:

$$I_{x_i} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_{y_i} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_x = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_y = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

### Příklad 5.9

U obdélníkového průřezu o stranách  $b = 0,2$  m,  $h = 0,3$  m (obr. 5.12) stanovte početně i graficky:

- momenty setrvačnosti  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ , a deviační moment  $D_{x'y'}$  k osám  $x'$ ,  $y'$ , které jsou od základních os  $x$ ,  $y$  pootočený o úhel  $\alpha = 45^\circ$  a
- hlavní momenty setrvačnosti  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  pro bod  $o$ .

Řešení

V příkladech 5.1 a 5.7 byly stanoveny hodnoty  $I_x = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $I_y = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $D_{xy} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  k osám  $x$ ,  $y$ .

- S použitím vztahů (5.27) až (5.29) určíme  $I_{x'} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $I_{y'} = 22 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $D_{x'y'} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  k pootočeným osám  $x'$ ,  $y'$ .

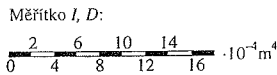
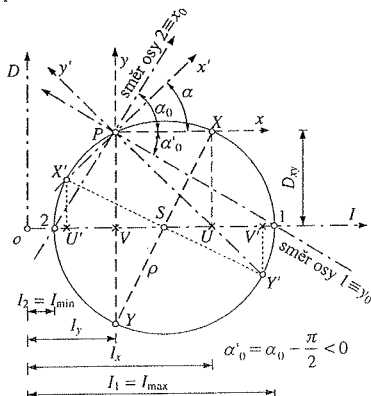
- Hlavní osy setrvačnosti  $x_0$ ,  $y_0$  jsou odkloněny od os  $x$ ,  $y$  o úhel  $\alpha_0$ , pro nějž platí  $\text{tg} 2\alpha_0 = -1,80$ ,  $2\alpha_0 = \text{arctg}(-1,80) = -60^\circ 56' 44'' \Rightarrow \alpha_0 = -30^\circ 28' 22''$ ,

$$\alpha_0 = \alpha'_0 + \pi/2 = 59^\circ 31' 38''.$$

Hlavní momenty setrvačnosti obdélníku (obr. 5.12) mají podle (5.34) velikosti

$$I_{\max} = I_{1,2} = \begin{cases} 23,296 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{y_0}, \\ 2,704 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{x_0}. \end{cases}$$

Grafické řešení pomocí Mohrovy kružnice je provedeno na obr. 5.10.



Obr. 5.10. Mohrova kružnice

#### Poznámka

Mohrova kružnice na obr. 5.10 představuje grafické řešení hlavních momentů setrvačnosti obdélníkového průřezu (obr. 5.12) o stranách  $b = 0,2$  m,  $h = 0,3$  m k hlavním osám setrvačnosti  $x_0$ ,  $y_0$  procházejícím bodem  $o$ .

### Příklad 5.10

Poloměry setrvačnosti obdélníku o stranách  $b$ ,  $h$  na obr. 5.2.

Řešení

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti

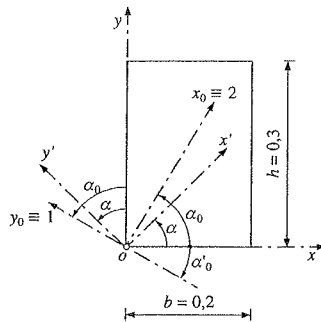
$$i_{x_i} = \sqrt{\frac{I_{x_i}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} bh^3}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0,2887h, \quad i_{y_i} = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,2887b.$$

Pomocí nich a rovnice (5.41) stanovíme  $i_x$ ,  $i_y$  k osám  $x$ ,  $y$ . Platí

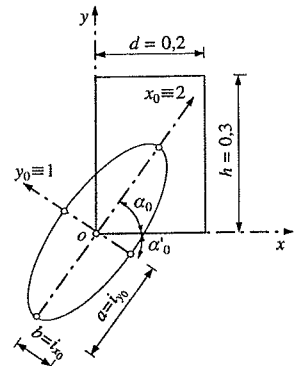
$$i_x^2 = \frac{h^2}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{3} \Rightarrow i_x = \frac{h}{\sqrt{3}}; \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Numerické vyčíslení pro  $b = 0,2$  m,  $h = 0,3$  m:

$$i_{x_i} = 0,0866 \text{ m}, \quad i_{y_i} = 0,0577 \text{ m}, \quad i_x = 0,173 \text{ m}, \quad i_y = 0,115 \text{ m}.$$



Obr. 5.12. Hlavní osy setrvačnosti obdélníku pro bod  $o$



Obr. 5.16. Elipsa setrvačnosti pro bod  $o$

### Příklad 5.13

Stanovte elipsu setrvačnosti pro bod  $o$  obdélníkového průřezu z příkladu 5.9.

Řešení

Z hlavních momentů setrvačnosti  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  získáme pomocí vztahu (5.39) hlavní poloměry setrvačnosti

$$a = i_{\max} = i_{y_0} = \sqrt{\frac{23,296 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 0,3}} = 0,197 \text{ m},$$

$$b = i_{\min} = i_{x_0} = \sqrt{\frac{2,704 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 0,3}} = 0,067 \text{ m},$$

které jsou poloosami elipsy (obr. 5.16).

Příklad 3.1

Z a d á n í : Určit moment setrvačnosti obecného obdélníka k osám Y, Z a  $Y_c, Z_c$  (obr.3.10).

Ř e š e n í : Elementární proužek o stranách b a dz rovnoběžný s osou Y má plochu  $dA = b \cdot dz$

a jeho moment setrvačnosti k ose Y je  $dI_Y = z^2 dA = b z^2 dz$ .

Moment setrvačnosti celého obdélníka k téže ose z ( 3.1 )

$$I_Y = b \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3} bh^3.$$

Moment setrvačnosti celého obdélníka k ose Z

$$I_Z = \int_A dI_Z = \int_A y^2 dA = h \int_0^b y^2 dy = \frac{1}{3} hb^3.$$

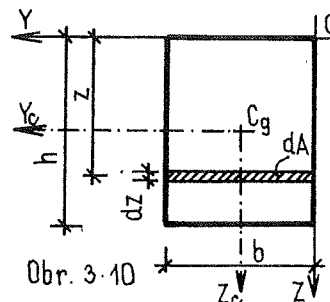
Při určení momentů setrvačnosti k těžištvým osám

$Y_c, Z_c$  je nutno uvážit pouze jiné meze proměnných

y a z :

$$I_{Y_c} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{Z_c} = h \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{b^3h}{12}.$$

$I_Y = \frac{1}{3} bh^3, \quad I_Z = \frac{1}{3} hb^3; \quad I_{Y_c} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{Z_c} = \frac{hb^3}{12}.$
---



Obr. 3.10

Příklad 3.4

Z a d á n í : Určit polární momenty setrvačnosti obdélníka (obr.3.10) k průsečíku O os Y, Z a k těžišti Cg na základě známých momentů setrvačnosti k osám Y, Z,  $Y_c, Z_c$  z příkladu 3.1.

Ř e š e n í : Pro polární moment setrvačnosti platí z ( 3.2 )

$$I_0 = I_Y + I_Z = \frac{1}{3} bh^3 + \frac{1}{3} hb^3 = \frac{bh}{3} (b^2 + h^2),$$

$$I_{C_g} = I_{Y_c} + I_{Z_c} = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{1}{12} hb^3 = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2).$$

Příklad 3.10

Z a d á n í : Určit polární moment setrvačnosti daného obdélníka (obr.3.23) k bodu O užitím Steinerovy věty.

Ř e š e n í : Pro moment setrvačnosti obdélníka k těžištvým osám platí podle příkladu 3.1 :

$$I_{Y_c} = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,6^3 = 0,0054 \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = \frac{1}{12} hb^3 = \frac{1}{12} 0,6 \cdot 0,3^3 = 0,00135 \text{ m}^4.$$

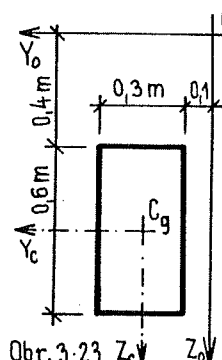
Podle Steinerovy věty ( 3.5 ) :

$$I_{Y_0} = I_{Y_c} + A \cdot z_0^2 = 0,0054 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,7^2 = 0,0882 \text{ m}^4,$$

$$I_{Z_0} = 0,00135 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,25^2 = 0,0126 \text{ m}^4.$$

Polární moment setrvačnosti z ( 3.2 )

$$I_0 = I_{Y_0} + I_{Z_0} = 0,0882 + 0,0126 = 0,1008 \text{ m}^4.$$



Obr. 3.23

### Příklad 5.2

Momenty setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníku o stranách  $b = 0,2 \text{ m}$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$  (obr. 5.3).

Řešení

Diferenciální element ve tvaru proužku (obr. 5.3) má obsah  $dA = b_y dy$ , kde

$$b_y = \frac{b}{3h}(2h - 3y) \quad (5.7)$$

plyne z úměry  $b : h = b_y : 2h/3 - y$ .

Centrální moment setrvačnosti trojúhelníku k ose  $x_i$

$$\begin{aligned} I_{x_i} &= \int_{\bar{A}} y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \cdot \frac{b}{3h}(2h - 3y) dy = \\ &= \frac{b}{3h} \int_{-h/3}^{2h/3} (2hy^2 - 3y^3) dy = \frac{1}{36} bh^3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Obdobně platí pro osu  $y_i$

$$I_{y_i} = \frac{1}{36} hb^3. \quad (5.9)$$

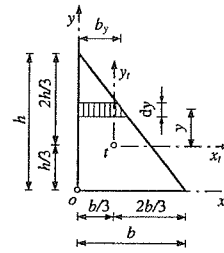
Odvození vztahů

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3, \quad I_y = \frac{1}{12} hb^3 \quad (5.10)$$

s využitím výrazu  $b_y = b(h - y)/h$  z příkladu 4.4 ponecháváme čtenáři.

Numerické hodnoty:

$$I_{x_i} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_{y_i} = 6,667 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \quad I_x = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_y = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$



Obr. 5.3. Pravoúhlý trojúhelník

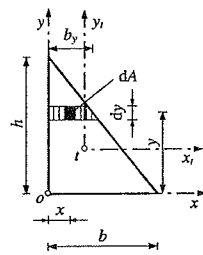
### Příklad 5.4

Deviační momenty pravoúhlého trojúhelníku o stranách  $b = 0,2 \text{ m}$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$  (obr. 5.6).

Řešení

Deviační moment pravoúhlého trojúhelníku k osám  $x, y$  má velikost

$$D_{xy} = \int_{\bar{A}} xy dA = \int_0^h \int_0^{b_y} xy dx dy, \quad (5.14)$$



Obr. 5.6. Pravoúhlý trojúhelník kde

$$b_y = \frac{b}{h}(h - y) = b \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Po dosazení  $b_y$  do (5.14), integraci a úpravě obdržíme

$$D_{xy} = \int_0^h y dy \int_0^{b_y} x dx = \int_0^h y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{b_y} dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy = \frac{1}{24} b^2 h^2. \quad (5.15)$$

Obdobným postupem stanovíme deviační moment  $D_{x_i y_i}$  trojúhelníku k centrálním osám  $x_i, y_i$ , v němž využijeme vztah (5.7):

$$D_{x_i y_i} = \int_{-h/3}^{2h/3} y dy \int_{-b/3}^{b_y - b/3} x dx = -\frac{1}{72} b^2 h^2. \quad (5.16)$$

Znaménko deviačního momentu  $D_{x_i y_i}$  je závislé na poloze trojúhelníku v souřadnicové soustavě  $x, y$ . Překlopíme-li trojúhelník zrcadlově kolem osy  $x$  nebo osy  $y$ , obdržíme kladný deviační moment  $D_{x_i y_i} = b^2 h^2 / 72$ . Při dvojnásobném zrcadlovém překlopení trojúhelníku kolem os  $x, y$  je  $D_{x_i y_i}$  opět záporný.

Numerické hodnoty

$$D_{xy} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad D_{x_i y_i} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4.$$

### Příklad 5.8

Stanovte početně a graficky směr hlavních centrálních os setrvačnosti a hodnoty hlavních centrálních momentů setrvačnosti pravoúhlého trojúhelníku (obr. 5.3) o stranách  $b = 0,2 \text{ m}$ ,  $h = 0,3 \text{ m}$ .

Řešení

Kvadratické momenty trojúhelníku k centrálním osám  $x_i, y_i$  jsou stanoveny v příkladech 5.2 a 5.4 hodnotami

$$I_{x_i} = 15 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \quad I_{y_i} = 6,667 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \quad D_{x_i y_i} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Sklon hlavních centrálních os setrvačnosti  $\alpha_0$  určíme ze vztahu (5.31)

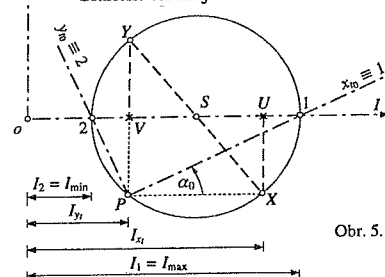
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2(-5 \cdot 10^{-5})}{6,667 \cdot 10^{-5} - 15 \cdot 10^{-5}} = 1,20 \Rightarrow 2\alpha_0 = 50^\circ 12' \Rightarrow \alpha_0 = 25^\circ 06'.$$

Osa 1  $\equiv x_{i0}$ , k níž je centrální moment setrvačnosti maximální, prochází prvním a třetím kvadrantem, neboť  $D_{x_i y_i} < 0$  (obr. 5.9b).

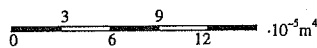
Hlavní centrální momenty setrvačnosti trojúhelníku mají podle (5.34) velikosti

$$I_{\max/\min} = I_{1,2} = \left[ \frac{15 + 6,667}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(15 - 6,667)^2 + 4(-5)^2} \right] \cdot 10^{-5} = \begin{cases} 17,341 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4, \\ 4,325 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4. \end{cases}$$

Grafické řešení je znázorněno na obr. 5.11.



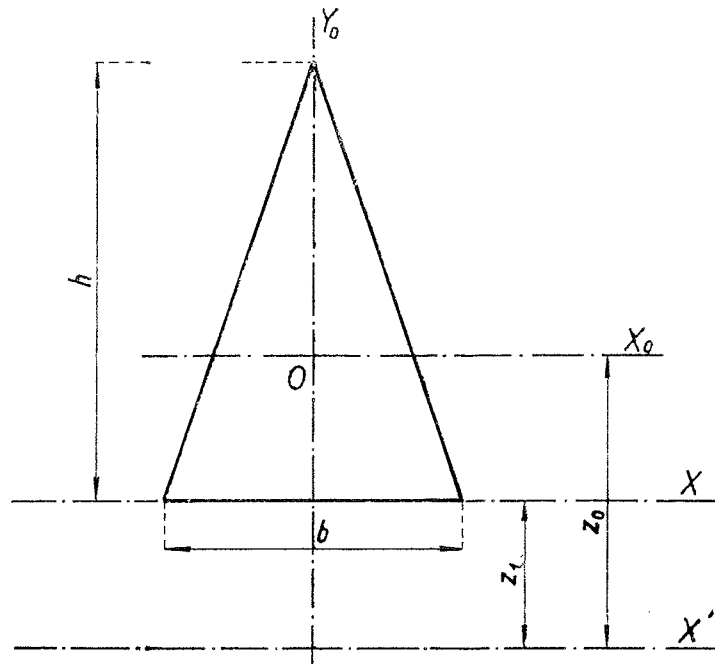
Měřítka  $I, D$ :



Odměřením zjistíme  
 $I_{\max} = I_1 \approx 17,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  
 $I_{\min} = I_2 \approx 4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  
 $\alpha_0 \approx 25^\circ$ .

Obr. 5.11. Mohrova kružnice k příkladu 5.8

**Příklad 58.** Vypočítajte moment zotrvačnosti rovnoramenného trojuholníka ktorého základňa  $b = 4,0$  m,  $h = 6,0$  m, k ťažiskovej osi  $X_0$ , k osi  $X$  a  $X'$ , vzdialenej o  $z_1 = 2,0$  m od základne, ako aj k zvislej ťažiskovej osi  $Y_0$  (obr. 58).



Obr. 58

*Riešenie:*

$$I_{x_0} = \frac{1}{36} bh^3 = \frac{1}{36} 4,0 \cdot 6,0^3 = 24,0 \text{ m}^4$$

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3 = 3I_{x_0} = 72,0 \text{ m}^4$$

$$I'_x = I_{x_0} + Uz_0^2 = \frac{1}{36} bh^3 + \frac{bh}{2} z_0^2 = 24,0 + \frac{4,0 \cdot 6,0}{2} 4,0^2 = 216 \text{ m}^4$$

$$I_{y_0} = 2 \frac{1}{12} h \left( \frac{b}{2} \right)^3 = \frac{1}{6} 6,0 \cdot 2,0^3 = 8,0 \text{ m}^4$$

V našom prípade moment zotrvačnosti k zvislej ťažiskovej osi je trikrát menší než k vodorovnej ťažiskovej osi.



Příklad 3.2

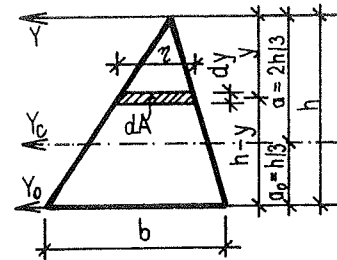
**Z a d á n í :** Určit moment setrvačnosti obecného trojúhelníka k ose procházející vrcholem (obr.3.11).

**Ř e š e n í :** Element o ploše  $dA = z \cdot dy = \frac{z}{h} \cdot b \cdot dz$  má moment setrvačnosti k ose Y

$$d I_Y = z^2 dA.$$

Moment setrvačnosti celého trojúhelníka k téže ose z ( 3.1 )

$$I_Y = \frac{b}{h} \int_0^h z^3 dz = \frac{1}{4} b h^3.$$



Obr. 3.11

Příklad 3.8

**Z a d á n í :** Použitím Steinerovy věty na základě známého momentu setrvačnosti  $I_Y$  určit momenty setrvačnosti k osám  $Y_0$ ,  $Y_c$  obecného trojúhelníka z příkladu 3.2 (obr.3.11).

**Ř e š e n í :** Známe-li  $I_Y$ , platí podle ( 3.5 )

$$I_{Y_c} = I_Y - A a^2 = \frac{1}{4} b h^3 - \frac{1}{2} b h \left( \frac{2}{3} h \right)^2 = \frac{b h^3}{36},$$

$$I_{Y_0} = I_{Y_c} + A a_0^2 = \frac{b h^3}{36} + \frac{1}{2} b h \left( \frac{h}{3} \right)^2 = \frac{b h^3}{12}.$$

Užitím vztahu ( 3.6 ) lze určit moment setrvačnosti k ose  $Y_0$  přímo ze známého momentu setrvačnosti k ose Y

$$I_{Y_0} = I_Y + A (a_0^2 - a^2) = \frac{1}{4} b h^3 + \frac{1}{2} b h \left[ \left( \frac{h}{3} \right)^2 - \left( \frac{2}{3} h \right)^2 \right] = \frac{b h^3}{12}.$$

Cvičení 3.1

1. Stanovte momenty setrvačnosti daného pravouhlého trojúhelníka (obr.3.16) k osám Y, Z.

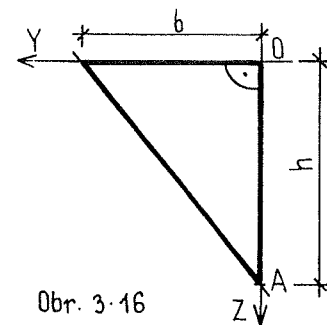
$$\left( I_Y = \frac{1}{12} b h^3, \quad I_Z = \frac{1}{12} h b^3 \right)$$

2. Určete polární moment setrvačnosti téhož trojúhelníka (obr.3.16) k bodu A.

$$\left( I_A = \frac{b h}{12} (3 h^2 + b^2) \right)$$

3. Vypočtete deviační moment trojúhelníka ze cvičení 1. k osám Y, Z.

$$\left( D_{YZ} = \frac{1}{24} b^2 h^2 \right).$$



Obr. 3.16

**Příklad 3.6**

**Z a d á n í :** Určit deviační moment obecného pravouhlého trojúhelníka podle obr.3.14a k osám  $Y, Z$ .

**Ř e š e n í :** Elementární ploška  $dA = \bar{y} dz$  má deviační moment k osám  $Y, Z$

$$dD_{YZ} = \frac{\bar{y}}{2} \cdot z \cdot dA.$$

Z podobnosti trojúhelníka platí  $b : h = \bar{y} : z$ , tedy

$$\bar{y} = \frac{bz}{h}.$$

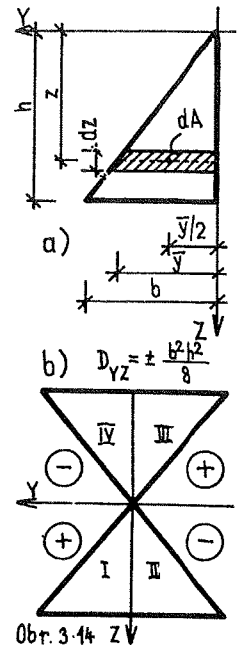
Deviační moment celého obrazce se určí z (3.3) :

$$D_{YZ} = \int_A dD_{YZ} = \int_0^h \frac{bz}{2h} \cdot z \cdot \frac{bz}{h} \cdot dz = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h z^3 dz,$$

$$D_{YZ} = \frac{b^2 h^2}{8}.$$

Hodnoty deviačních momentů trojúhelníků č.I, č.III (obr.3.14b) k osám  $Y, Z$  jsou kladné a trojúhelníků č.II, č.IV jsou záporné (mění se znaménka souřadnic těžiště elementu  $dA$ ).

Viz poznámka k příkladu 3.9.



Obr. 3.14 ZV

**Příklad 3.9**

**Z a d á n í :** Použitím Steinerovy věty na základě známého deviačního momentu  $D_{YZ}$  (příklad 3.6) určit deviační moment  $D_{Y_c Z_c}$  k těžišťovým osám  $Y_c, Z_c$  obecného pravouhlého trojúhelníka (obr.3.21).

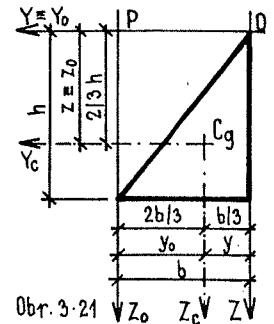
**Ř e š e n í :** Známe-li  $D_{YZ}$ , platí podle (3.8)

$$D_{Y_c Z_c} = D_{YZ} - y_c z_c A = \frac{b^2 h^2}{8} - \frac{b}{3} \cdot \frac{2h}{3} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{b^2 h^2}{72}.$$

Vzhledem ke kladnému směru os  $Y, Z$  jsou hodnoty souřadnic  $y, z$  kladné a totožné se souřadnicemi těžiště vzhledem k osám  $Y, Z$ .

Např. pro osy  $Y_0, Z_0$  ( $Y_0 \equiv Y, Z_0 \parallel Z$ ) (obr.3.21) je souřadnice  $y_0$  záporná a  $z_0$  kladná. Pro deviační moment  $D_{Y_0 Z_0}$  tedy platí :

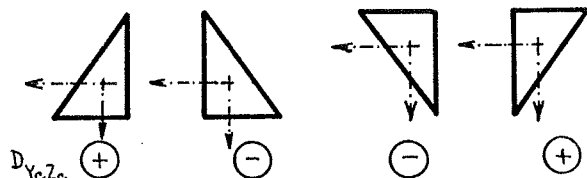
$$D_{Y_0 Z_0} = D_{Y_c Z_c} + y_0 z_0 A = \frac{b^2 h^2}{72} + \left(-\frac{2}{3}b\right) \cdot \frac{2}{3}h \cdot \frac{bh}{2} = -\frac{5}{24} b^2 h^2.$$



Obr. 3.21

**Poznámka :**

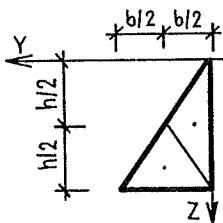
Znaménko deviačního momentu pravouhlého trojúhelníka se mění. Má-li přepona trojúhelníka kladnou směrnici, je deviační moment kladný (obr.3.22 a 3.14b) a naopak.



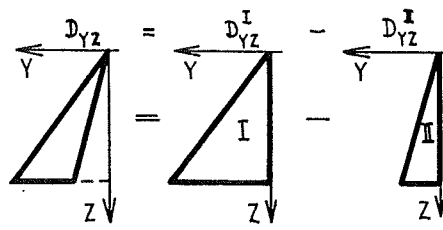
Obr. 3.22

**Poznámka\_3 :** Deviační moment pravouhlého trojúhelníka lze řešit použitím superpozice (využitím nulových deviačních momentů rovnoramenných trojúhelníků) - obr.3.28.

**Poznámka\_4 :** Deviační moment obecného trojúhelníka (obr.3.29) určíme užitím superpozice.



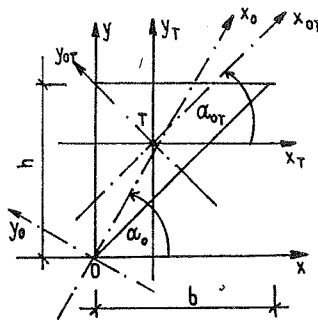
Obr. 3.28



Obr. 3.29

P Ř Í K L A D 2.67

Stanovte polohu hlavních os setrvačnosti procházejících bodem O (obr. 2.116) a hlavních momentů setrvačnosti. Dále stanovte polohu hlavních centrálních os setrvačnosti a hlavní centrální momenty setrvačnosti. Určete a narysujte elipsu setrvačnosti k bodu O a centrální elipsu setrvačnosti k těžišti T daného pravouhelného trojúhelníka. Uvažujte, že bude  $b = h$ .



Obr. 2.116

Poloha hlavních os setrvačnosti procházejících bodem O

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{8} b^2 h^2}{\frac{1}{12} h b^3 - \frac{1}{4} b h^3} = \frac{3bh}{b^2 - 3h^2}$$

je-li  $b = h$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2\alpha_0 = 180^\circ - 56,31^\circ$$

$$\alpha_0 = 61,85^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti v bodě O

$$J_{x_0} = \frac{1}{4} b^4 \cos^2 \alpha_0 + \frac{1}{12} b^4 \sin^2 \alpha_0 - \frac{1}{8} b^4 \sin 2\alpha_0 = 0,0164 b^4$$

$$J_{y_0} = \frac{1}{12} b^4 \cos^2 \alpha_0 + \frac{1}{4} b^4 \sin^2 \alpha_0 + \frac{1}{8} b^4 \sin 2\alpha_0 = 0,317 b^4$$

Kontrola :

$$J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0}$$

$$\frac{1}{4} b^4 + \frac{1}{12} b^4 = 0,0164 b^4 + 0,317 b^4$$

$$D_{x_0 y_0} = \frac{\frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{12} b^4}{2} \sin 2\alpha_0 + \frac{1}{8} \cos 2\alpha_0 = 0,0693 - 0,0693 = 0$$

Poloha hlavních centrálních os setrvačnosti

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{OT} = \frac{2D_{x_T y_T}}{J_{y_T} - J_{x_T}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{72} b^2 h^2}{\frac{1}{36} h b^3 - \frac{1}{36} b h^3} = \frac{bh}{(b^2 - h^2)}$$

je-li  $b = h$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{OT} = \infty \Rightarrow \alpha_{OT} = 45^\circ$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti

$$J_{x_{OT}} = J_{x_T} \cos^2 45^\circ + J_{y_T} \sin^2 45^\circ - D_{x_T y_T} \sin 90^\circ = \frac{1}{36} b^4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{36} b^4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{b^4}{72} \cdot 1 = \frac{b^4}{72}$$

$$J_{y_{OT}} = \frac{b^4}{24}$$

Kontrola :

$$J_{x_T} + J_{y_T} = J_{x_{OT}} + J_{y_{OT}}$$

$$b^4 \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \right) = b^4 \left( \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \right)$$

$$D_{x_{OT} y_{OT}} = \frac{J_{x_T} - J_{y_T}}{2} \sin 90^\circ + D_{x_T y_T} \cos 90^\circ = 0$$

Osa  $y_{OT}$  je osou symetrie obrazce a současně hlavní centrální osou setrvačnosti, (obr. 2.117), platí

$$D_{x_{OT} y_{OT}} = 0$$

$$A = 0,5 b^2$$

Podle rovnic ( 2.185 ) a ( 2.186 ) jsou poloměry setrvačnosti k zadaným osám dány vztahy :

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{0,25 b^4}{0,5 b^2}} = 0,707 b ;$$

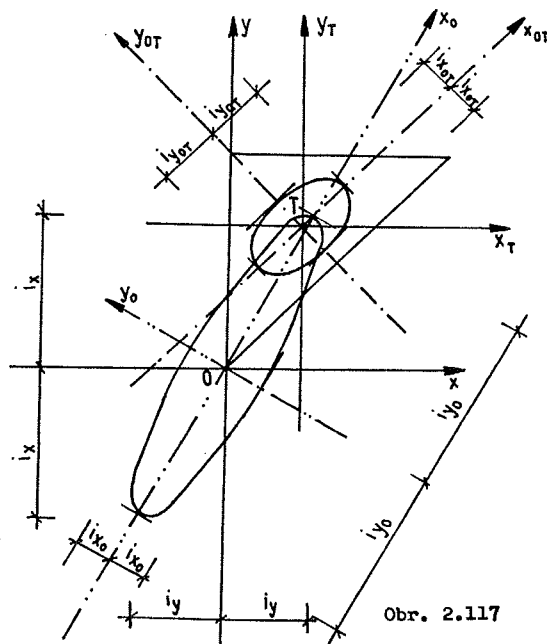
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{0,0833 b^4}{0,5 b^2}} = 0,408 b ;$$

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{0,0164 b^4}{0,5 b^2}} = 0,18 b ;$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{0,317 b^4}{0,5 b^2}} = 0,8 b .$$

Pro centrální elipsu setrvačnosti platí :

$$i_{x_{OT}} = \sqrt{\frac{J_{x_{OT}}}{A}} = \sqrt{\frac{0,014 b^4}{0,5 b^2}} = 0,167 b = i_{\min} ; \quad i_{y_{OT}} = \sqrt{\frac{J_{y_{OT}}}{A}} = 0,289 b = i_{\max}$$



Obr. 2.117

### Příklad 5.14

Stanovte hlavní centrální momenty i poloměry setrvačnosti lichoběžníkového průřezu na obr. 5.17 a nakreslete příslušnou centrální elipsu setrvačnosti.

Řešení

Lichoběžník lze považovat za složený rovinný obrazec skládající se z obdélníku 1 a pravouhlého trojúhelníku 2.

1) Těžiště lichoběžníku.

Obsahy  $A_i$  a pravouhlé souřadnice  $x_i, y_i$  těžišť  $t_i$  jednotlivých částí  $i = 1, 2$  ve zvolené souřadnicové soustavě  $x, y$ .

Obdélník 1:

$$A_1 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ m}^2, x_1 = 0,5 \text{ m}, y_1 = 2,5 \text{ m}.$$

Trojúhelník 2:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5 \text{ m}^2, x_2 = y_2 = 1,667 \text{ m}.$$

Obsah lichoběžníku

$$A = A_1 + A_2 = 5 + 5 = 10 \text{ m}^2.$$

Statické momenty lichoběžníku k osám  $x, y$

$$U_x = Ay_t = \sum_{i=1}^2 A_i y_i = 5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 1,667 = 20,833 \text{ m}^3,$$

$$U_y = Ax_t = \sum_{i=1}^2 A_i x_i = 5 \cdot 0,5 + 5 \cdot 1,667 = 10,833 \text{ m}^3.$$

Souřadnice těžiště  $t$  lichoběžníku

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{10,833}{10} = 1,083 \text{ m},$$

$$y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{20,833}{10} = 2,083 \text{ m}.$$

Lze je stanovit rovněž pomocí obecných vztahů (4.27).

2) Centrální kvadratické momenty  $I_{x_t}, I_{y_t}, D_{x_t y_t}$  k centrálním osám  $x_t, y_t$  (obr. 5.17).

S použitím Steinerovy věty (5.23) lze psát

$$I_{x_t} = \frac{1}{12} b_1 h^3 + A_1 (y_1 - y_t)^2 + \frac{1}{36} b_2 h^3 + A_2 (y_2 - y_t)^2 = \\ = \frac{1}{12} 1 \cdot 5^3 + 5(2,5 - 2,083)^2 + \frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 5^3 + 5(1,667 - 2,083)^2 = 19,095 \text{ m}^4,$$

$$I_{y_t} = \frac{1}{12} h b_1^3 + A_1 (x_1 - x_t)^2 + \frac{1}{36} h b_2^3 + A_2 (x_2 - x_t)^2 = \\ = \frac{1}{12} 5 \cdot 1^3 + 5(0,5 - 1,083)^2 + \frac{1}{36} \cdot 5 \cdot 2^3 + 5(1,667 - 1,083)^2 = 4,932 \text{ m}^4.$$

Podle rovnice (5.25) platí

$$D_{x_t y_t} = D_{x_1 y_1} + A_1 (x_1 - x_t)(y_1 - y_t) + D_{x_2 y_2} + A_2 (x_2 - x_t)(y_2 - y_t) = \\ = 0 + 5(0,5 - 1,083)(2,5 - 2,083) - \frac{1}{72} \cdot 2^2 \cdot 5^2 + 5(1,667 - 1,083)(1,667 - 2,083) = \\ = -3,820 \text{ m}^4.$$

3) Směry hlavních centrálních os setrvačnosti  $x_{t_0}, y_{t_0}$  (1, 2).

Aplikací vztahu (5.31) získáme

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{x_t y_t}}{I_{y_t} - I_{x_t}} = \frac{2(-3,820)}{4,932 - 19,095} = 0,539 \Rightarrow 2\alpha_0 = 28^\circ 20' \Rightarrow \alpha_0 = 14^\circ 10'.$$

4) Hlavní centrální momenty setrvačnosti  $I_{\max}, I_{\min}$ .

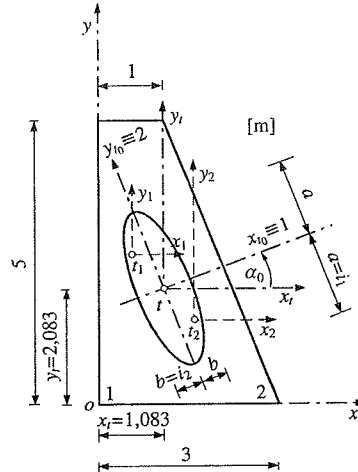
S použitím výrazů (5.34) obdržíme

$$I_{\max}^{\min} = I_{1,2} = \frac{19,095 + 4,932}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(19,095 - 4,932)^2 + 4(-3,820)^2} = \\ = \begin{cases} 20,060 \text{ m}^4 = I_{x_{t_0}}, \\ 3,968 \text{ m}^4 = I_{y_{t_0}}. \end{cases}$$

5) Hlavní centrální poloměry setrvačnosti  $i_{\max}, i_{\min}$ .

Určíme je pomocí vztahu (5.39) a představují poloosy  $a, b$  centrální elipsy setrvačnosti lichoběžníkového průřezu (obr. 5.17). Platí tedy

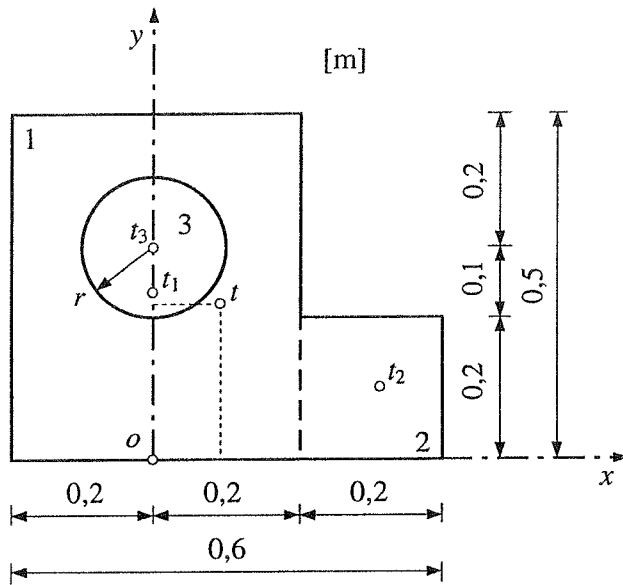
$$a = i_{\max} = i_1 = i_{x_{t_0}} = \sqrt{\frac{20,060}{10}} = 1,416 \text{ m}, \\ b = i_{\min} = i_2 = i_{y_{t_0}} = \sqrt{\frac{3,968}{10}} = 0,630 \text{ m}.$$



Obr. 5.17. Centrální elipsa setrvačnosti lichoběžníku

### Příklad 5.15

U rovinného složeného obrazce (obr. 4.9) z příkladu 4.7 stanovte hlavní momenty a hlavní poloměry setrvačnosti k osám procházejícím daným bodem  $o$ .



Obr. 4.9. Složený obrazec

### Příklad 4.7

Stanovte polohu těžiště složeného obrazce oslabeného kruhovým otvorem o poloměru  $r = 0,1$  m podle obr. 4.9.

#### Řešení

Vyšetřovaný složený obrazec se skládá z obdélníku 1, čtverce 2 a kruhového otvoru 3. Souřadnicovou soustavu  $x, y$  volíme s výhodou podle obr. 4.9.

Obsahy jednotlivých částí

$$A_1 = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \text{ m}^2,$$

$$A_2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \text{ m}^2,$$

$$A_3 = -3,142 \cdot 0,1^2 = -3,142 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

a jejich těžiště mají souřadnice

$$t_1(0; 0,25) \text{ m}, t_2(0,3; 0,1) \text{ m}, t_3(0; 0,3) \text{ m}.$$

Celkový obsah složeného obrazce

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 0,2 + 0,04 - 3,142 \cdot 10^{-2} = 0,209 \text{ m}^2,$$

statické momenty k souřadnicovým osám  $x, y$

$$U_x = 0,2 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,1 - 3,142 \cdot 10^{-2} \cdot 0,3 = 4,458 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3,$$

$$U_y = 0,2 \cdot 0 + 0,04 \cdot 0,3 - 3,142 \cdot 10^{-2} \cdot 0 = 0,012 \text{ m}^3$$

a souřadnice těžiště  $t$  podle (4.24)

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{0,012}{0,209} = 0,0575 \text{ m},$$

$$y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{4,458 \cdot 10^{-2}}{0,209} = 0,2137 \text{ m}.$$

#### Řešení

$$I_x = 142,940 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_y = 63,215 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad D_{xy} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -0,301, \quad \alpha'_0 = -8^\circ 23',$$

$$I_{\max} = I_1 = I_{x_0} = 144,707 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_{\min} = I_2 = I_{y_0} = 61,447 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$a = i_{\max} = i_1 = 0,263 \text{ m}, \quad b = i_{\min} = i_2 = 0,172 \text{ m}.$$

Příklad 3.12

Z a d á n í : Vypočtete polární moment setrvačnosti a narýsujte elipsu setrvačnosti k bodu O daného složeného obrazce obr.3.33 .

$$A_1 = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 0,4^2}{4} = 0,1257 \text{ m}^2$$

$$A = \sum_j A_j = 0,3657 \text{ m}^2$$

$$C_1(0,3; 0,2)$$

$$C_2(0,7698; 0,1698)$$

$$I_{Y_1} = \frac{1}{12} 0,6 \cdot 0,4^3$$

$$I_{Z_1} = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,6^3$$

$$D_{Y_1 Z_1} = 0$$

$$I_{Y_2} = 0,0549 \cdot 0,4^4 = I_{Z_2}$$

$$D_{Y_2 Z_2} = -0,0165 \cdot 0,4^4$$

$$\begin{aligned} I_Y &= I_{Y_1} + A_1 \cdot z_1^2 + I_{Y_2} + A_2 \cdot z_2^2 = \\ &= 32,0 \cdot 10^{-4} + 0,24 \cdot 0,2^2 + 14,054 \cdot 10^{-4} + 0,1257 \cdot 0,1698^2 = \\ &= 178,2688 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Z &= I_{Z_1} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{Z_2} + A_2 \cdot y_2^2 = \\ &= 72,0 \cdot 10^{-4} + 0,24 \cdot 0,3^2 + 14,054 \cdot 10^{-4} + 0,1257 \cdot 0,7698^2 = \\ &= 1046,6519 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{YZ} &= D_{Y_1 Z_1} + A_1 y_1 z_1 + D_{Y_2 Z_2} + A_2 y_2 z_2 = \\ &= 0 + 0,24 \cdot 0,3 \cdot 0,2 - 4,224 \cdot 10^{-4} + 0,1257 \cdot 0,7698 \cdot 0,1698 = \\ &= 303,9868 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 D_{YZ}}{I_Z - I_Y} = \frac{2 \cdot 303,9868 \cdot 10^{-4}}{(1046,6519 - 178,2688) \cdot 10^{-4}} = 0,7001 \Rightarrow 2\alpha_0 = 35^\circ 60'$$

$$\alpha_0 = 17^\circ 30' (107^\circ 30')$$

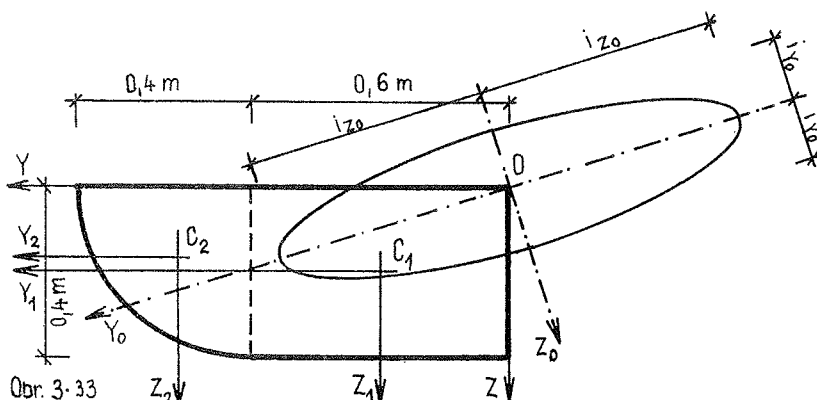
$D_{YZ} > 0$  , proto hlavní osa, k níž je moment setrvačnosti maximální, prochází 2. a 4. kvadrantem

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_{Z_0} \\ I_{\min} &= I_{Y_0} \end{aligned} \right\} &= \frac{I_Y + I_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4 D_{YZ}^2} = \frac{(178,2688 + 1046,6519) \cdot 10^{-4}}{2} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(178,2688 - 1046,6519)^2 \cdot 10^{-8} + 4 \cdot 303,9868^2 \cdot 10^{-8}} = \\ &= \begin{cases} 1142,4889 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ 82,4318 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$i_{Z_0} = \sqrt{\frac{1142,4889 \cdot 10^{-4}}{36,5664 \cdot 10^{-2}}} = 0,5590 \text{ m} \quad i_{Y_0} = \sqrt{\frac{82,4318 \cdot 10^{-4}}{36,5664 \cdot 10^{-2}}} = 0,1501 \text{ m}$$

Polární moment setrvačnosti k bodu O :

$$I_0 = I_Y + I_Z = I_{Y_0} + I_{Z_0} = 12,2492 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$



Obr. 3.33

**Příklad 3.13**

**Z a d á n í :** Určit centrální elipsu setrvačnosti rovinného složeného obrazce podle obr.3.34 a jeho polární moment setrvačnosti k těžišti.

**Ř e š e n í :** Daný obrazec rozdělíme na dva základní geometrické tvary - obdélník č.1 a trojúhelník č.2. Při řešení zachováme postup výpočtu z kap.3.3.3 :

$$A_1 = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32 \text{ m}^2 \quad A_2 = \frac{-1}{2} \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,09 \text{ m}^2 \quad A = A_1 - A_2 = 0,23 \text{ m}^2$$

Poloha těžišť vzhledem k osám  $Y, Z$ , které volíme např. totožné s osami symetrie obrazce č.1 :

$$C_1(y_1, z_1) = C_1(0; 0), \quad C_2(y_2, z_2) = C_2(0,1; 0,2)$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = -0,0391 \text{ m}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A} = -0,0783 \text{ m}$$

Poloha těžišť vzhledem k osám  $Y_c, Z_c$ :

$$C_1(y_{1c}, z_{1c}) = C_1(0,0391; 0,0783)$$

$$C_2(y_{2c}, z_{2c}) = C_2(0,1391; 0,2783)$$

$$I_{Y_1} = \frac{0,4 \cdot 0,8^3}{12} = 170,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_1} = \frac{0,8 \cdot 0,4^3}{12} = 42,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_1 Z_1} = 0$$

$$I_{Y_2} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{36} = 18,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_2} = \frac{0,6 \cdot 0,3^3}{36} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_2 Z_2} = -\frac{0,3^2 \cdot 0,6^2}{72} = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \rightarrow$$

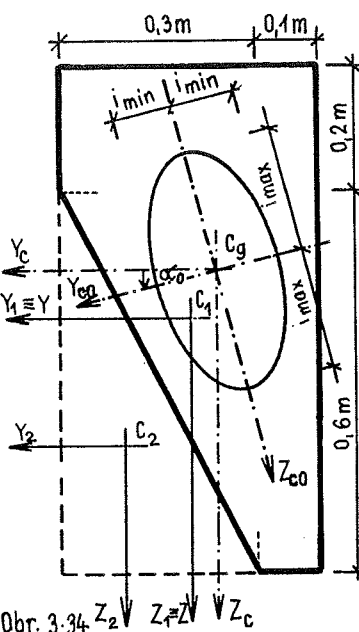
→ pozor na znaménko podle polohy trojúhelníka !

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + A_1 z_{1c}^2 - I_{Y_2} - A_2 z_{2c}^2 = 102,5797 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = I_{Z_1} + A_1 y_{1c}^2 - I_{Z_2} - A_2 y_{2c}^2 = 25,6449 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_c Z_c} = D_{Y_1 Z_1} + A_1 y_1 z_1 - D_{Y_2 Z_2} - A_2 y_2 z_2 = -20,5435 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-20,5435) \cdot 10^{-4}}{(25,6449 - 102,5797) \cdot 10^{-4}} = 0,5340 \Rightarrow 2\alpha_0 = 28^\circ 06'$$



Obr. 3.34

$$\alpha_0 = 14^\circ 03' \quad (104^\circ 03')$$

$D_{Y_c Z_c} < 0$ , proto osa, k níž je moment setrvačnosti maximální, jde prvním a třetím kvadrantem.

$$I_{\max/\min} = \frac{I_{Y_c} + I_{Z_c} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Y_c} - I_{Z_c})^2 + 4D_{Y_c Z_c}^2}}{2} =$$

$$= \frac{(102,5797 + 25,6449) \cdot 10^{-4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(102,5797 - 25,6449)^2 \cdot 10^{-8} + 4 \cdot (-20,5435)^2 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= \begin{cases} 107,7216 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{Y_{c0}} \\ 20,5030 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{Z_{c0}} \end{cases}$$

Platí

$$I_{Y_c} + I_{Z_c} = I_{\max} + I_{\min} = 128,2246 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = I_{C_g}$$

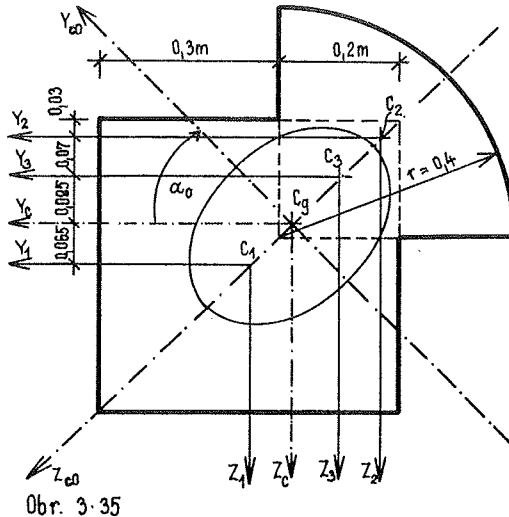
$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{107,7216 \cdot 10^{-4}}{0,23}} = 0,21642 \text{ m} = i_{Y_{c0}}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{20,5030 \cdot 10^{-4}}{0,23}} = 0,09442 \text{ m} = i_{Z_{c0}}$$

**Příklad 3.14**

**Z a d á n í :** Určit centrální elipsu setrvačnosti složeného obrazce z příkladu 2.8 (obr.3.35).

**Ř e š e n í :** Základní geometrické tvary volíme obdobně jako v příkladu 2.8. Pro každou část zvolíme vlastní souřadný systém  $Y_j, Z_j (j=1,2,3)$ , pro něž známe (tabulka 3.1) kvadratické momenty setrvačnosti. Pro symetrické geometrické tvary je výhodné volit vlastní souřadný systém tak, aby aspoň jedna osa byla osou symetrie tohoto obrazce, protože potom deviační moment k vlastním osám je nulový. Při výpočtu zachováváme postup uvedený v kap.3.3.3 :  
 Poloha těžiště byla vyřešena v příkladě 2.8. Počátky souřadných systémů  $Y_j, Z_j$  jsou v těžištích  $C_j$  obrazců.



Obr. 3.35

Pro jejich souřadnice vzhledem k osám  $Y_c, Z_c$  platí

$$C_1 (y_1, z_1) = C_1(0,065; 0,065)$$

$$C_2 (y_2, z_2) = C_2(-0,155; -0,155)$$

$$C_3 (y_3, z_3) = C_3(-0,085; -0,085)$$

$$I_{Y_1} = I_{Z_1} = \frac{a^4}{12} = \frac{0,5^4}{12} = 52,08\dot{3} \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_1 Z_1} = 0$$

$$I_{Y_2} = I_{Z_2} = 0,0549 r^4 = 0,0549 \cdot 0,4^4 = 14,0544 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_2 Z_2} = -0,0165 r^4 = -0,0165 \cdot 0,4^4 = -4,224 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Y_3} = I_{Z_3} = \frac{a^4}{12} = \frac{0,2^4}{12} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_3 Z_3} = 0$$

Užitím Steinerovy věty z ( 3.18 ) určíme hodnoty kvadratických momentů k těžištvým osám (hodnoty týkající se čtverce č.3 nutno odčítat, protože v této části se překrývají obrazce č.1 a č.2) :

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + A_1 z_1^2 + I_{Y_2} + A_2 z_2^2 - I_{Y_3} - A_3 z_3^2 = 52,08\dot{3} \cdot 10^{-4} + 25 \cdot 10^{-2} \cdot 0,65^2 + 14,0544 \cdot 10^{-4} + 12,56 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,155)^2 - 1,3 \cdot 10^{-4} - 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,085)^2 = 102,6523 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = I_{Y_c}$$

$$D_{Y_c Z_c} = D_{Y_1 Z_1} + A_1 y_1 z_1 + D_{Y_2 Z_2} + A_2 y_2 z_2 - D_{Y_3 Z_3} - A_3 y_3 z_3 = 0 + 25 \cdot 10^{-2} \cdot 0,065^2 - 4,224 \cdot 10^{-4} + 12,56 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,155)^2 - 0 - 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,085)^2 = 33,6239 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Vzhledem k symetrii obrazce musí jedna hlavní centrální osa setrvačnosti splýnout s osou symetrie, tím je splněna podmínka nulového deviačního momentu k hlavním centrálním osám setrvačnosti. V našem případě je tedy  $\alpha_0 = -45^\circ$ . Protože  $D_{Y_c Z_c} > 0$ , leží osa  $Y_{co}$ , k níž je maximální moment setrvačnosti, v druhém a čtvrtém kvadrantu (obr.3.35).

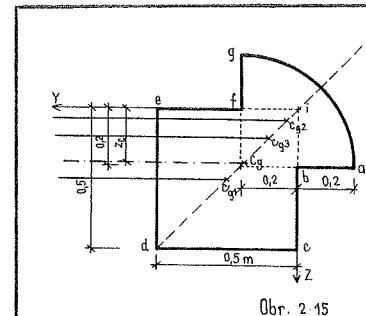
$$I_{\max} = I_{Y_{co}} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} = \frac{I_{Y_c} + I_{Z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Y_c} - I_{Z_c})^2 + 4 D_{Y_c Z_c}^2} = \frac{2 \cdot 102,6523 \cdot 10^{-4}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0 + 4 \cdot (33,6239 \cdot 10^{-4})^2} = \begin{matrix} 136,2762 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ 69,0284 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{matrix}$$

Platí  $I_{Y_c} + I_{Z_c} = I_{\max} + I_{\min} = 2,053 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ ,

$$i_{Y_{co}} = \sqrt{\frac{I_{Y_{co}}}{A}} = \sqrt{\frac{136,2762 \cdot 10^{-4}}{33,56 \cdot 10^{-2}}} = 0,2015 \text{ m}$$

$$i_{Z_{co}} = \sqrt{\frac{I_{Z_{co}}}{A}} = \sqrt{\frac{69,0284 \cdot 10^{-4}}{33,56 \cdot 10^{-2}}} = 0,1434 \text{ m}$$

Vykreslíme hlavní centrální elipsu setrvačnosti o hlavních poloosách  $a = i_{Y_{co}}$ ,  $b = i_{Z_{co}}$ .



Obr. 2.15

**Příklad 2.8**

**Z a d á n í :** Určit polohu těžiště složeného rovinného obrazce dle obr. 2.15.  
**Ř e š e n í :** Za základní geometrické útvary lze volit čtverec ( c d e i ) č.1, kruhovou výseč ( a j g ) č.2 a čtverec ( b j f i ) č.3, kde se překrývají obrazce č.1 a č.2, uvažovat jako otvor. Zvolíme souřadný systém  $Y, Z$ . Na základě symetrie obrazce platí, že  $Y_c = Z_c$ , stačí tedy určit jen jednu souřadnici. Výpočet je uspořádán v tabulce 2.2.

TABULKA 2.2

OBR. č.	$A_j \cdot 10^2$ [m <sup>2</sup> ]	$z_j \cdot 10^1$ [m]	$S_{Y_j} \cdot 10^3$ [m]
1	25,00	2,5	62,50
2	12,56	0,3	3,77
3	-4,00	1,0	-4,00
$\Sigma$	33,56		62,27

$$A_2 = \frac{1}{4} \pi \cdot 0,4^2 = 0,1256 \text{ m}^2$$

$$z_2 = 0,2 - 0,424 \cdot 0,4 = 0,03 \text{ m}$$

$$Z_c = \frac{62,27 \cdot 10^{-3}}{33,56 \cdot 10^{-2}} = 0,185 \text{ m}$$

$C_g (0,185 ; 0,185)$  v souřadném systému  $Y, Z$ .



**Příklad 3.15**

**Z a d á n í :** Určit elipsu setrvačnosti k bodu 0, hlavní centrální elipsu setrvačnosti a polární momenty setrvačnosti k bodům 0 a  $C_g$  pravouhlého trojúhelníka (obr.3.36) o odvěsnách  $b = 0,3 \text{ m}$  a  $h = 0,5 \text{ m}$ .

**Ř e š e n í :** Na základě příkladů 3.6, 3.9 a tabulky 3.1 známe hodnoty kvadratických momentů k osám  $Y, Z, Y_c, Z_c$ .

$$I_Y = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,5^3 = 31,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

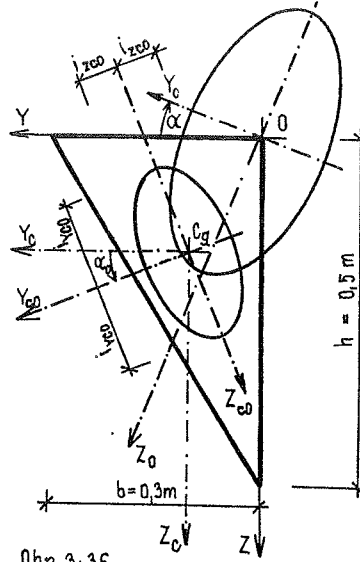
$$I_Z = \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} 0,5 \cdot 0,3^3 = 11,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{YZ} = \frac{1}{24} b^2 h^2 = \frac{1}{24} 0,3^2 \cdot 0,5^2 = 9,375 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Y_c} = \frac{1}{36} b h^3 = \frac{1}{36} 0,3 \cdot 0,5^3 = 10,416 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = \frac{1}{36} h b^3 = \frac{1}{36} 0,5 \cdot 0,3^3 = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_c Z_c} = -\frac{1}{72} b^2 h^2 = -\frac{1}{72} 0,3^2 \cdot 0,5^2 = -3,125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$



Obr. 3.36

Porovnáme-li  $D_{Y_c Z_c}$  s deviačním momentem z příkladu 3.9, liší se jejich hodnoty znaménkem. To vyplývá ze stejné úvahy, jako v příkladu 3.6 (obr.3.14b).

Plocha obrazce :

$$A = \frac{1}{2} b h = \frac{0,3 \cdot 0,5}{2} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

Elipsa setrvačnosti k bodu 0 :

Z ( 3.12 ) určíme polohu hlavních os pro bod 0 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{2D_{YZ}}{I_Z - I_Y} = \frac{2 \cdot 9,375 \cdot 10^{-4}}{(11,25 - 31,25) \cdot 10^{-4}} = -0,9375 \Rightarrow 2\alpha_0 = -43^\circ 09' \\ &\alpha_0 = -21^\circ 35' \\ &\quad (-111^\circ 35'). \end{aligned}$$

$D_{YZ} > 0$ , proto osa, k níž je moment setrvačnosti maximální, prochází druhým a čtvrtým kvadrantem.

Z ( 3.14 ) určíme extrémní hodnoty momentů setrvačnosti

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_{Y_0} \\ I_{\min} &= I_{Z_0} \end{aligned} \right\} &= \frac{I_Y + I_Z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_Y - I_Z)^2 + 4D_{YZ}^2} = \\ &= \left[ \frac{31,25 + 11,25}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(31,25 - 11,25)^2 + 4 \cdot 9,375^2} \right] \cdot 10^{-4} = \begin{cases} 34,96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ 7,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{cases} \end{aligned}$$

Platí  $I_0 = I_Y + I_Z = I_{\max} + I_{\min} = (34,96 + 7,54) \cdot 10^{-4} = 42,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Z ( 3.16 ) určíme hlavní poloměry setrvačnosti :

$$\begin{aligned} i_{Y_0} &= i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{Y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{34,9573 \cdot 10^{-4}}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,2159 \text{ m} \\ i_{Z_0} &= i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{Z_0}}{A}} = \sqrt{\frac{7,5427 \cdot 10^{-4}}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,1003 \text{ m} \end{aligned}$$

a vykreslíme elipsu setrvačnosti pro bod 0 - viz obr.3.36.

Centrální elipsu setrvačnosti určíme použitím stejných vzorců ( 3.12, 3.14 a 3.16) :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{Y_c Z_c}}{I_{Z_c} - I_{Y_c}} = \frac{2 \cdot (-3,125 \cdot 10^{-4})}{(3,75 - 10,416) \cdot 10^{-4}} = 0,9375 \Rightarrow 2\alpha_0 = 43^\circ 09'$$

$$\alpha_0 = 21^\circ 35' \quad (111^\circ 35') - \text{určuje}$$

polohu hlavních centrálních os setrvačnosti vzhledem k osám  $Y_c, Z_c$ .  $D_{Y_c Z_c} < 0$ , proto osa, k níž je maximální moment setrvačnosti, jde prvním a třetím kvadrantem.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} I_{\max, c} &= I_{Y_c} \\ I_{\min, c} &= I_{Z_c} \end{aligned} \right\} &= \frac{I_{Y_c} + I_{Z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Y_c} - I_{Z_c})^2 + 4D_{Y_c Z_c}^2} = \\ &= \left[ \frac{10,416 + 3,75}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10,416 - 3,75)^2 + 4 \cdot (-3,125)^2} \right] \cdot 10^{-4} = \begin{cases} 11,65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ 2,51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{cases} \end{aligned}$$

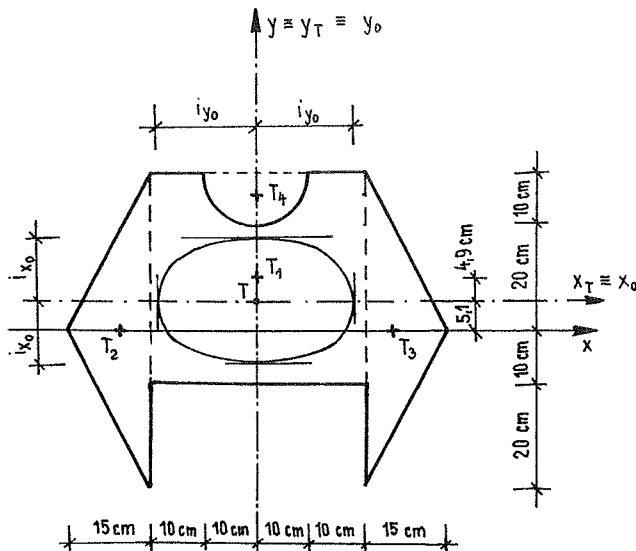
$$I_{C_g} = I_{Y_c} + I_{Z_c} = I_{\max, c} + I_{\min, c} = 14,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$i_{Y_c} = i_{\max, c} = \sqrt{\frac{I_{Y_{c0}}}{A}} = \sqrt{\frac{11,6524 \cdot 10^{-4}}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,1246 \text{ m}$$

$$i_{Z_c} = i_{\min, c} = \sqrt{\frac{I_{Z_{c0}}}{A}} = \sqrt{\frac{2,5142 \cdot 10^{-4}}{7,5 \cdot 10^{-2}}} = 0,0579 \text{ m}$$

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti  $i_{Y_{c0}}, i_{Z_{c0}}$  určují hlavní poloosy  $a, b$  hlavní centrální elipsy setrvačnosti - viz obr.3.36.

PŘÍKLAD 2.68



Určete centrální elipsu setrvačnosti u daného složeného obrazce (obr. 2.120).

Obr. 2.120

Daný rovinný obrazec je složen ze čtyř základních geometrických útvarů (dvou trojúhelníků, obdélníka a polokruhu). Je zřejmé, že je symetrický, osa symetrie je osou těžišтовую a současně i hlavní centrální osou setrvačnosti.

Plochy :

$$\begin{aligned} A_1 &= 16 \text{ dm}^2 \\ A_2 &= 4,5 \text{ dm}^2 \\ A_3 &= 4,5 \text{ dm}^2 \\ -A_4 &= -1,57 \text{ dm}^2 \\ \hline A &= 23,43 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

Poloha těžiště :

Volíme pomocnou osu  $x$  :

$$x_T = 0$$

$$y_T = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{16 \cdot 1 - 1,57 \cdot 2,576}{23,43} = 0,51 \text{ dm} = 5,1 \text{ cm}$$

Souřadnice těžišť jednotlivých ploch k těžišovým osám :

$$\begin{aligned} x_{1T} &= 0 & y_{1T} &= 0,49 \text{ dm} \\ x_{2T} &= -2,5 \text{ dm} & y_{2T} &= -0,51 \text{ dm} \\ x_{3T} &= 2,5 \text{ dm} & y_{3T} &= -0,51 \text{ dm} \\ x_{4T} &= 0 & y_{4T} &= 2,07 \text{ dm} \end{aligned}$$

Momenty setrvačnosti jednotlivých ploch k vlastním těžišovým osám :

$$\begin{aligned} \square : J_{x1} &= \frac{1}{12} 4 \cdot 4^3 = 21,33 \text{ dm}^4 & J_{y1} &= \frac{1}{12} 4^3 \cdot 4 = 21,33 \text{ dm}^4 \\ \triangle : J_{x2} &= \frac{1}{48} 1,5 \cdot 6^3 = 6,75 \text{ dm}^4 & J_{y2} &= \frac{1}{36} 1,5^3 \cdot 6 = 0,56 \text{ dm}^4 \\ \triangleright : J_{x3} &= \frac{1}{48} 1,5 \cdot 6^3 = 6,75 \text{ dm}^4 & J_{y3} &= \frac{1}{36} 1,5^3 \cdot 6 = 0,56 \text{ dm}^4 \\ -(\cup : J_{x4} &= 0,1098 \cdot 1^4 = 0,11 \text{ dm}^4 & J_{y4} &= \frac{\pi \cdot 1^4}{8} = 0,39 \text{ dm}^4 \end{aligned}$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti :

$$J_{x0} = \sum_{i=1}^4 (J_{x_i} + A_i y_{iT}^2) = 21,33 + 16 \cdot 0,49^2 + 6,75 + 4,5 \cdot (-0,51)^2 + 6,75 + 4,5 \cdot (-0,51)^2 - [0,11 + 1,57 \cdot 2,07^2] = 34,17 \text{ dm}^4 = 3,417 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

$$J_{y0} = \sum_{i=1}^4 (J_{y_i} + A_i x_{iT}^2) = 21,33 + 16 \cdot 0 + 0,56 + 4,5 \cdot (-2,5)^2 + 0,56 + 4,5 \cdot 2,5^2 - [0,39 + 0] = 78,31 \text{ dm}^4 = 7,831 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

Centrální elipsa setrvačnosti

hlavní poloměry setrvačnosti :

$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{J_{x_0}}{A}} = \sqrt{\frac{34,17}{23,43}} = 1,21 \text{ dm} = 12,1 \text{ cm}$$

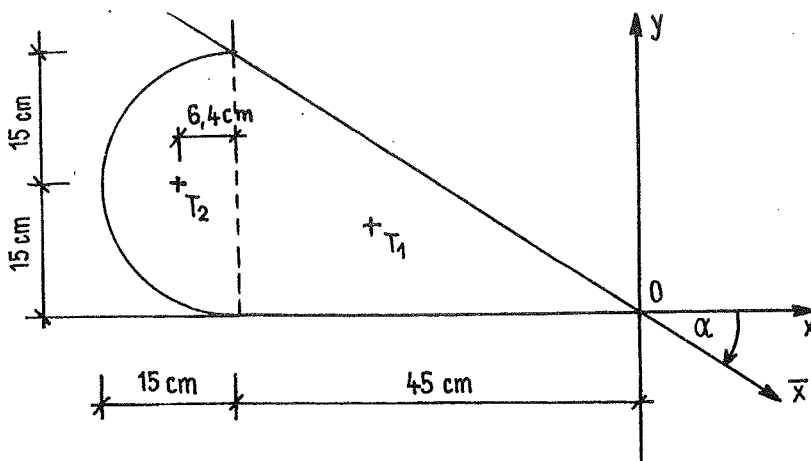
$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{J_{y_0}}{A}} = \sqrt{\frac{78,31}{23,43}} = 1,83 \text{ dm} = 18,3 \text{ cm}$$

Ve vzdálenosti  $i_{x_0}$  vedeme rovnoběžky s osou  $x_0$ , podobně ve vzdálenosti  $i_{y_0}$  rovnoběžky s osou  $y_0$ , získáme tak tečny centrální elipsy setrvačnosti.

Hlavní poloměry setrvačnosti jsou hlavními poloosami centrální elipsy setrvačnosti.

P Ř Í K L A D 2.69

Vypočtete moment setrvačnosti k ose  $\bar{x}$  daného složeného obrazce (obr.2.121).



V libovolném bodě na ose  $\bar{x}$  volíme počátek souřadnicového systému  $0, x, y$ , vypočítáme  $J_x, J_y, D_{xy}$ .  
Dále stanovíme moment setrvačnosti  $J_{\bar{x}}$  k ose  $\bar{x}$  pootočené o úhel  $\alpha$ .

Plochy :

$$A_1 = 6,75 \text{ dm}^2$$

$$A_2 = 3,53 \text{ dm}^2$$

Obr. 2.121

Souřadnice těžišť :

$$x_{1T} = -3 \text{ dm} \quad y_{1T} = 1 \text{ dm}$$

$$x_{2T} = -5,14 \text{ dm} \quad y_{2T} = 1,5 \text{ dm}$$

Momenty setrvačnosti a deviační moment k osám  $x, y$  :

$$J_x = \frac{1}{36} \cdot 4,5^3 \cdot 3 + 6,75 \cdot 1^2 + \frac{\pi \cdot 1,5^4}{8} + 3,53 \cdot 1,5^2 = 20,06 \text{ dm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{36} \cdot 4,5^3 \cdot 3 + 6,75 \cdot (-3)^2 + 0,1098 \cdot 1,5^4 + 3,53 \cdot (-5,14)^2 = 156,25 \text{ dm}^4$$

$$D_{xy} = -\frac{1}{72} \cdot 4,5^2 \cdot 3^2 + 6,75 \cdot (-3) \cdot 1 + 0 + 3,53 \cdot (-5,14) \cdot 1,5 = -50 \text{ dm}^4$$

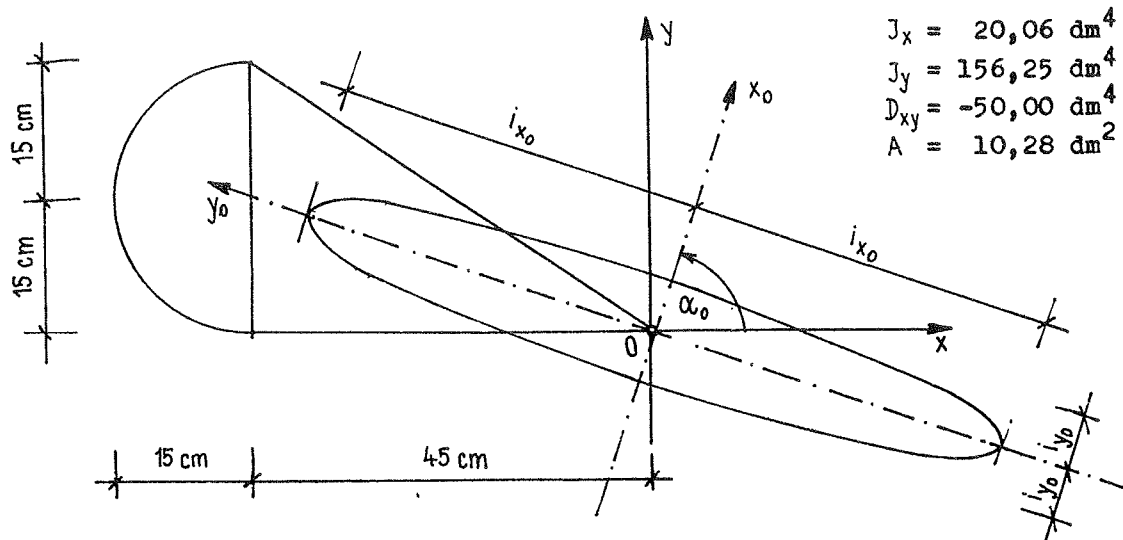
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4,5} \Rightarrow \alpha = -33,69^\circ$$

Moment setrvačnosti k ose  $\bar{x}$  :

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= 20,06 \cdot \cos^2(-33,69^\circ) + 156,25 \sin^2(-33,69^\circ) + 50 \sin(-67,38^\circ) = \\ &= \underline{15,82 \text{ dm}^4} \end{aligned}$$

## PŘÍKLAD 2.70

Vypočtete polohu hlavních os setrvačnosti a zakreslete elipsu setrvačnosti v bodě 0 obrazce z příkladu 2.69.



Obr. 2.122

Poloha hlavních os setrvačnosti (obr. 2.122)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-50)}{156,25 - 20,06} \Rightarrow 2\alpha_0 = 180^\circ - 36,3^\circ = 143,7^\circ$$

$$\alpha_0 = 71,85^\circ$$

Hlavní momenty setrvačnosti

$$J_{x_0} = 20,06 \cdot \cos^2 71,85^\circ + 156,25 \cdot \sin^2 71,85^\circ + 50 \cdot \sin 143,7^\circ = 172,64 \text{ dm}^4$$

$$J_{y_0} = 20,06 \cdot \sin^2 71,85^\circ + 156,25 \cdot \cos^2 71,85^\circ - 50 \cdot \sin 143,7^\circ = 3,67 \text{ dm}^4$$

Kontrola :  $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0}$

$$20,06 + 156,25 = 172,64 + 3,67$$

$$D_{x_0 y_0} = \frac{20,06 - 156,25}{2} \sin 143,7^\circ - 50 \cdot \cos 143,7^\circ = -40,30 + 40,30 = 0$$

Hlavní poloměry setrvačnosti :

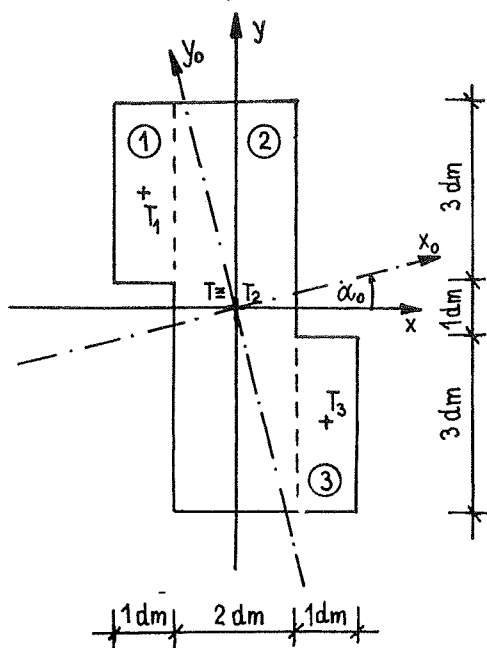
$$i_{x_0} = \sqrt{\frac{172,64}{10,28}} = 4,1 \text{ dm} = 41 \text{ cm} = i_{\max}$$

$$i_{y_0} = \sqrt{\frac{3,67}{10,28}} = 0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm} = i_{\min}$$

**P Ř Í K L A D 2.71**

Vypočtete polohu hlavních centrálních os setrvačnosti u rovinného složeného obrazce, jehož tvar a rozměry jsou zřejmé z obr. 2.123.

Těžiště složeného obrazce je totožné s těžištěm plochy (2).



Obr. 2.123

Plochy jednotlivých částí budou :

$$A_1 = 3 \text{ dm}^2$$

$$A_2 = 14 \text{ dm}^2$$

$$A_3 = 3 \text{ dm}^2$$

Celková plocha je

$$A = 20 \text{ dm}^2$$

Souřadnice těžišť jednotlivých obrazců :

$$x_1 = -1,5 \text{ dm} \quad y_1 = 2 \text{ dm}$$

$$x_2 = 0 \quad y_2 = 0$$

$$x_3 = +1,5 \text{ dm} \quad y_3 = -2 \text{ dm}$$

Momenty setrvačnosti a deviační momenty jednotlivých obrazců k vlastním těžišťovým osám :

$$J_{x_1} = J_{x_3} = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 3^3 = 2,25 \text{ dm}^4 \quad J_{y_1} = J_{y_3} = \frac{1}{12} \cdot 1^3 \cdot 3 = 0,25 \text{ dm}^4$$

$$J_{x_2} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 7^3 = 57,7 \text{ dm}^4 \quad J_{y_2} = \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot 7 = 4,67 \text{ dm}^4$$

$$D_{x_1 y_1} = D_{x_2 y_2} = D_{x_3 y_3} = 0$$

Vlastní těžišťové osy jsou osami symetrie základních ploch.

Centrální momenty setrvačnosti a deviační moment :

$$J_x = 2,25 + 3 \cdot 2^2 + 57,7 + 14 \cdot 0 + 2,25 + 3 \cdot (-2)^2 = 86,2 \text{ dm}^4$$

$$J_y = 0,25 + 3 \cdot (-1,5)^2 + 4,67 + 0 + 0,25 + 3 \cdot 1,5^2 = 18,67 \text{ dm}^4$$

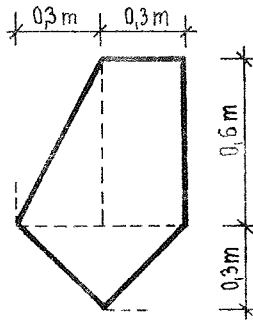
$$D_{xy} = 0 + 3 \cdot (1,5) \cdot 2 + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 1,5 \cdot (-2) = -18,00 \text{ dm}^4$$

Poloha hlavních centrálních os setrvačnosti :

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-18)}{18,67 - 86,2} \Rightarrow 2\alpha_0 = 28,06^\circ \quad \alpha_0 = 14,03^\circ$$

1. Stanovte centrální elipsu setrvačnosti daného rovinného složeného obrazce (obr.3.39).

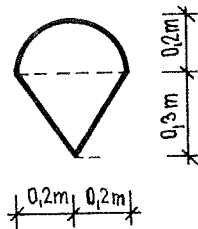
$$\left( \begin{array}{l} \alpha_0 = -17^\circ 42'; \quad I_{\max} = 184,775 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \quad I_{\min} = 60,505 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \\ i_{\max} = 0,2265 \text{ m}; \quad i_{\min} = 0,1296 \text{ m} \end{array} \right)$$



Obr. 3.39

2. Určete centrální elipsu setrvačnosti rovinného složeného obrazce podle obr.3.40.

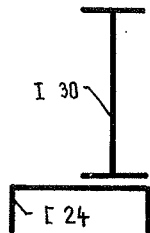
$$\left( \begin{array}{l} I_{\max} = 15,2474 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \quad I_{\min} = 10,2848 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \\ i_{\max} = 0,114 \text{ m}; \quad i_{\min} = 0,0915 \text{ m} \end{array} \right)$$



Obr. 3.40

3. Vypočítejte hlavní centrální momenty setrvačnosti průřezu složeného z válcovaných profilů I 30 a  $\Gamma$  24 (obr.3.41).

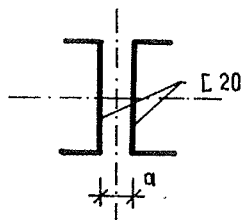
$$\left( \alpha_0 = -11^\circ; \quad I_{\max} = 18,323 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4; \quad I_{\min} = 4,423 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \right)$$



Obr. 3.41

4. Pro průřez složený ze dvou válcovaných profilů I 20 určete vzdálenost  $a$  tak, aby hlavní centrální momenty setrvačnosti byly stejné (obr.3.42).

$$( a = 0,108 \text{ m} )$$



Obr. 3.42

### Příklad 5.16

Stanovte hlavní centrální momenty a poloměry setrvačnosti rovinného průřezu z příkladu 4.8 složeného ze dvou válcovaných profilů UE140 a UE160 podle obr. 5.18.

#### Příklad 4.8

Stanovte polohu těžiště průřezu složeného z válcovaných profilů UE140 a UE160 podle obr. 4.10.

Řešení

S použitím statických tabulek [5] zjistíme průřezové plochy a souřadnice těžišť jednotlivých UE profilů ve zvolené souřadnicové soustavě  $x, y$

$$\text{UE140: } A_1 = 1560 \text{ mm}^2, t_1 (-16,7; 70) \text{ mm,}$$

$$\text{UE160: } A_2 = 1810 \text{ mm}^2, t_2 (80; 122) \text{ mm.}$$

Složený rovinný průřez má celkový obsah

$$A = A_1 + A_2 = 1560 + 1810 = 3370 \text{ mm}^2,$$

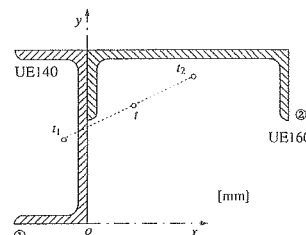
statické momenty k souřadnicovým osám  $x, y$

$$U_x = 1560 \cdot 70 + 1810 \cdot 122 = 330020 \text{ mm}^3,$$

$$U_y = 1560 (-16,7) + 1810 \cdot 80 = 118748 \text{ mm}^3$$

a souřadnice těžiště  $t$

$$x_t = \frac{U_y}{A} = \frac{118748}{3370} = 35,24 \text{ mm, } y_t = \frac{U_x}{A} = \frac{330020}{3370} = 97,93 \text{ mm.}$$



Obr. 4.10. Průřez z válcovaných profilů

#### Řešení

Poloha těžiště  $t$  složeného průřezu o obsahu  $A = A_1 + A_2 = 1560 + 1810 = 3370 \text{ mm}^2$  je určena v příkladu 4.8. Souřadnice těžišť  $t_i(x_i, y_i)$  jednotlivých částí  $i = 1, 2$  a celé obrazce v souřadnicové soustavě  $x, y$  jsou uvedeny na obr. 5.18.

Momenty setrvačnosti a deviační momenty jednotlivých profilů k vlastním těžištním osám  $x_i, y_i$  získáme ze statických tabulek [5]. Pro

$$\text{UE140: } I_{x_1} = 491 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, I_{y_1} = 45,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, D_{x_1 y_1} = 0,$$

$$\text{UE160: } I_{x_2} = 63,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, I_{y_2} = 747 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, D_{x_2 y_2} = 0.$$

Kvadratické momenty průřezu k centrálním osám  $x, y$  mají velikosti

$$\begin{aligned} I_{x_t} &= 491 \cdot 10^4 + 1560 (70 - 97,93)^2 + 63,3 \cdot 10^4 + 1810 (122 - 97,93)^2 = \\ &= 780,858 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_t} &= 45,4 \cdot 10^4 + 1560 (-16,7 - 35,24)^2 + 747 \cdot 10^4 + 1810 (80 - 35,24)^2 = \\ &= 1575,877 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_t y_t} &= 0 + 1560 (-16,7 - 35,24)(70 - 97,93) + 0 + 1810 (80 - 35,24)(122 - 97,93) = \\ &= 421,311 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

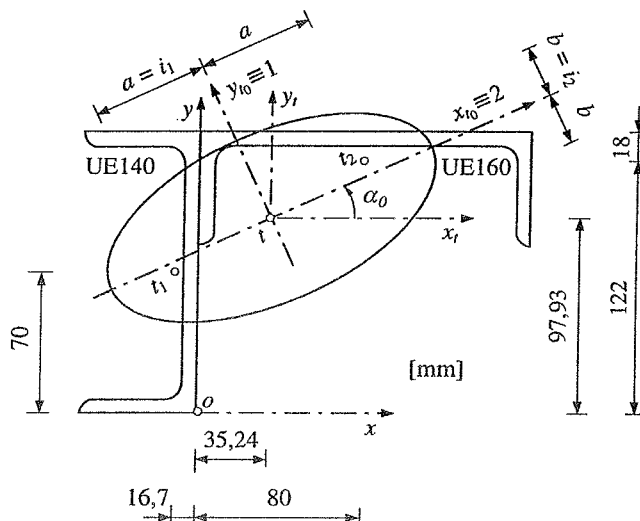
a pomocí nich stanovíme

$$\text{tg } 2\alpha_0 = 1,060, \quad \alpha_0 = 23^\circ 20',$$

$$I_{\max}^{\min} = I_{1,2} = \begin{cases} 1757,606 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = I_{y_{t0}}, \\ 599,130 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = I_{x_{t0}}, \end{cases}$$

$$a = i_{\max} = i_1 = 72,22 \text{ mm, } b = i_{\min} = i_2 = 42,16 \text{ mm.}$$

Centrální elipsa setrvačnosti průřezu je nakreslena na obr. 5.18.



Obr. 5.18. Centrální elipsa setrvačnosti složeného průřezu z válcovaných profilů

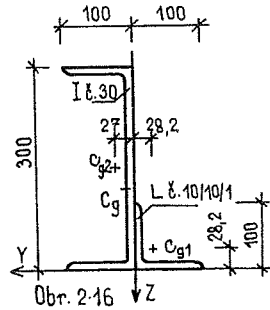
**Příklad 3.16**

**Z a d á n í :** Vyřešit centrální elipsu setrvačnosti složeného rovinného obrazce z válcovaných profilů z příkladu 2.9 (obr.2.16, 3.37).

**Příklad 2.9**

**Z a d á n í :** Určit polohu těžiště složeného rovinného obrazce z válcovaných profilů [č.30 a Lč.10/10/1 dle obr. 2.16 .

**Ř e š e n í :** Profil L bereme jako obrazec č.1 a [profil jako obrazec č.2. Zvolíme souřadný systém a z tabulek např. /3/ kótujeme polohy těžišť  $C_{gj}$  najdeme plochy  $A_j$  jednotlivých profilů. Výpočet podle ( 2.4 ) je sestaven v tabulce 2.3 .



TABULKA 2.3

OBR. č.	$A_j \cdot 10^{-2}$ [mm <sup>2</sup> ]	$y_j \cdot 10^{-1}$ [mm]	$z_j \cdot 10^{-1}$ [mm]	$S_{y_j} \cdot 10^{-3}$ [mm <sup>3</sup> ]	$S_{z_j} \cdot 10^{-3}$ [mm <sup>3</sup> ]
1	19,2	-2,82	-2,82	-54,144	-54,144
2	58,8	2,70	-15,00	-882,000	158,760
$\Sigma$	78,0			-936,144	104,616

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{104,616 \cdot 10^{-3}}{78,0 \cdot 10^{-2}} = +13,41 \text{ mm}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = - \frac{936,144 \cdot 10^{-3}}{78,0 \cdot 10^{-2}} = -120,02 \text{ mm}$$

$$C_g (+13,41 ; -120,02) \text{ mm .}$$

**Ř e š e n í :** Z příkladu 2.9 známe polohu těžiště, proto můžeme přímo volit centrální osy  $Y_c, Z_c$  (rovnoběžně s osami  $Y_j, Z_j, j=1,2$ ). Zachováme-li postup výpočtu uvedený v kap.3.3.3, můžeme potřebné veličiny brát z příkladu 2.9. Řešení provádíme v m.

$$C_1 (-0,0416; 0,0972) \quad C_2 (0,0136; -0,0299)$$

$$I_{Y_1} = 177 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad I_{Z_1} = 177 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_1 Z_1} = 104 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{Y_2} = 8030 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad I_{Z_2} = 495 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_2 Z_2} = 0$$

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + A_1 \cdot z_1^2 + I_{Y_2} + A_2 \cdot z_2^2 =$$

$$= 177 \cdot 10^{-8} + 19,2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,0972^2 + 8030 \cdot 10^{-8} + 58,8 \cdot 10^{-4} \cdot (-0,0299)^2 = 1,055 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = I_{Z_1} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{Z_2} + A_2 \cdot y_2^2 = 0,1113 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_c Z_c} = D_{Y_1 Z_1} + A_1 \cdot y_1 z_1 + D_{Y_2 Z_2} + A_2 \cdot y_2 z_2 = -9,1227 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

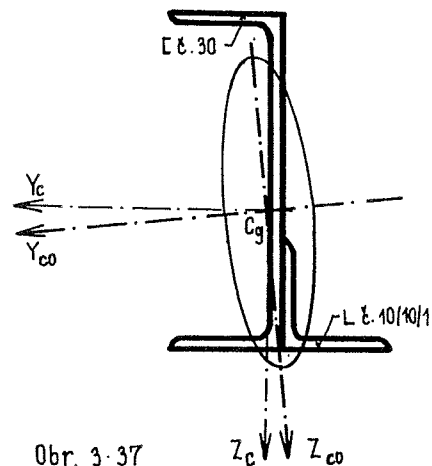
$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot (-9,1227) \cdot 10^{-8}}{(1113,0239 - 10550,2265) \cdot 10^{-8}} = 0,1933 \implies 2\alpha_0 = 10^\circ 57', \alpha_0 = 5^\circ 28' (95^\circ 28')$$

$$I_{\max/\min} = \frac{I_{Y_c} + I_{Z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Y_c} - I_{Z_c})^2 + 4D_{Y_c Z_c}^2} = \begin{cases} 1,0638 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ 0,1025 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{cases}$$

$$I_{Y_c} + I_{Z_c} = I_{\max} + I_{\min} = 1,1663 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{10637,6042 \cdot 10^{-8}}{78 \cdot 10^{-4}}} = 11,6782 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{1025,6462 \cdot 10^{-8}}{78 \cdot 10^{-4}}} = 3,6262 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$



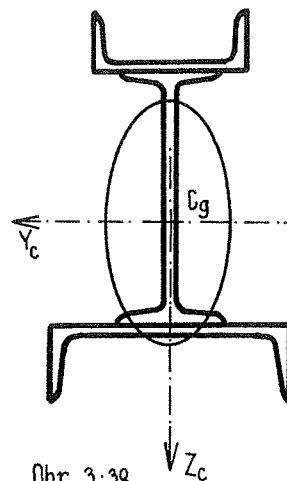
Obr. 3.37



**Příklad 3.17**

**Z a d á n í :** Určit centrální elipsu setrvačnosti složeného rovinného obrazce z příkladu 2.10 (obr.2.17, 3.38).

**Ř e š e n í :** Postup řešení obdobný jako v příkladě 3.16, ale zjednodušený vzhledem k symetrii obrazce. Některé veličiny můžeme brát z příkladu 2.10 :

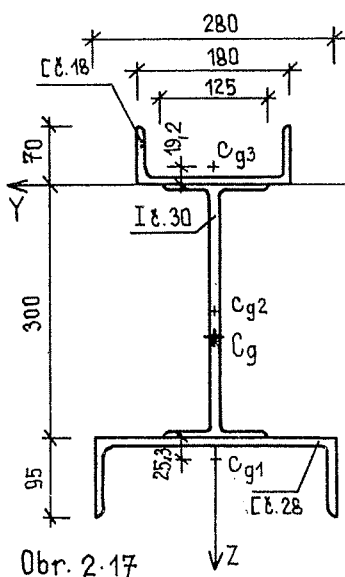


Obr. 3.38

**Příklad 2.10**

**Z a d á n í :** Určit polohu těžiště složeného obrazce dle obr. 2.17 .

**Ř e š e n í :** [ č.28 obrazec č.1, [ č.30 obrazec č.2, [ č.18 obrazec č.3 .



Obr. 2.17

Zvolíme souřadný systém vzhledem k symetrii složeného obrazce. Osa Z je totožná s osou symetrie, proto hledáme jen souřadnici těžiště  $Z_c$  ( $y_c = 0$ ). Poloha těžišť  $C_{gj}$  a velikosti ploch  $A_j$  určeny např. z /3/.

Výpočet podle (2.4 ) je sestaven v tabulce 2.4 .

TABULKA 2.4

OBR. č.	$A_j \cdot 10^{-2}$ /mm <sup>2</sup> /	$z_j \cdot 10^{-1}$ /mm/	$S_{Y_j} \cdot 10^{-3}$ /mm <sup>3</sup> /
1	53,3	32,53	1 733,849
2	69,1	15,00	1 036,500
3	28,0	-1,92	-53,760
$\Sigma$	150,4		2 716,589

$$Z_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{2\,716,589 \cdot 10^3}{150,4 \cdot 10^2} = 180,62 \text{ mm}$$

$$C_g (0 ; 180,62) \text{ mm}$$

$$C_1(0; 0,1447) \quad C_2(0; -0,0306) \quad C_3(0; -0,1998)$$

$$I_{Y_1} = 399 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad I_{Z_1} = 6280 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad D_{Y_1 Z_1} = 0$$

$$I_{Y_2} = 9800 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad I_{Z_2} = 451 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad D_{Y_2 Z_2} = 0$$

$$I_{Y_3} = 114 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad I_{Z_3} = 1350 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad D_{Y_3 Z_3} = 0$$

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + A_1 \cdot z_1^2 + I_{Y_2} + A_2 \cdot z_2^2 + I_{Y_3} + A_3 \cdot z_3^2 = 3,3298 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{Z_c} = I_{Z_1} + A_1 \cdot y_1^2 + I_{Z_2} + A_2 \cdot y_2^2 + I_{Z_3} + A_3 \cdot y_3^2 = 0,8081 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$D_{Y_c Z_c} = 0 \text{ (symetrie)}$$

$\alpha_0 = 0$  - centrální osy byly zvoleny tak, aby jedna z nich splynula s osou symetrie

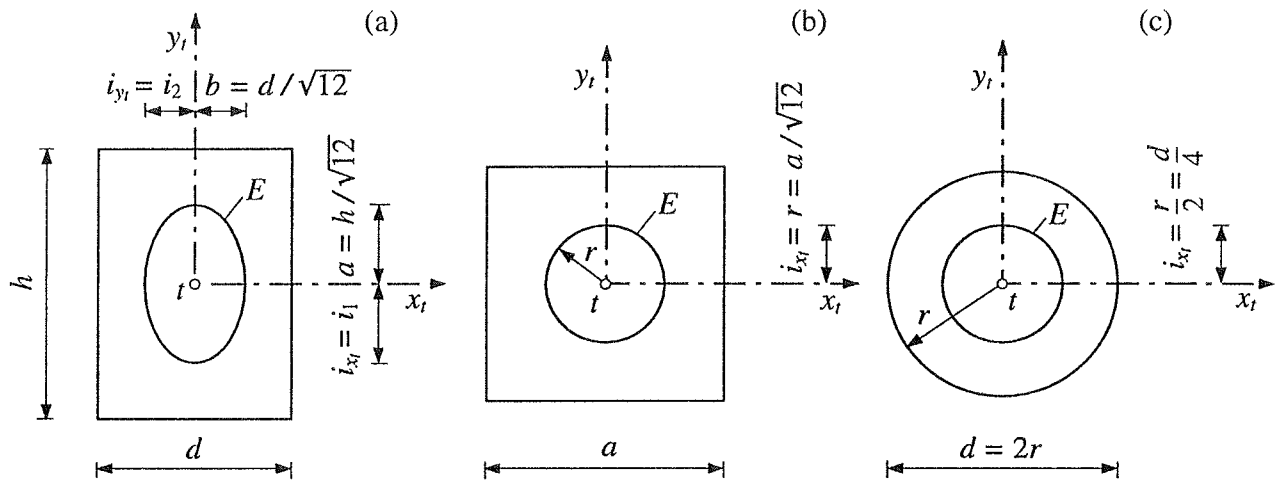
$$I_{\max} = I_{Y_c} = 3,3298 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I_{\min} = I_{Z_c} = 0,8081 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{3,3298 \cdot 10^{-4}}{150,4 \cdot 10^{-4}}} = 14,8793 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{8081 \cdot 10^{-8}}{150,4 \cdot 10^{-4}}} = 7,3301 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

### Příklad 5.12

S použitím výsledků z příkladů 5.10 a 5.11 stanovte tvary centrálních elips setrvačnosti:

- obdélníku o stranách  $d, h$  (obr. 5.15a),
- čtverce o straně  $a$  (obr. 5.15b),
- kruhu o poloměru  $r$  (obr. 5.15c).



Obr. 5.15. Centrální elipsy setrvačnosti jednoduchých obrazců

### Řešení

dané úlohy je nakresleno na obr. 5.15. *Centrální elipsou* setrvačnosti obrazců s více než dvěma osami symetrie (čtverec, kruh, pravidelný mnohoúhelník) je *kružnice*, viz obr. 5.15b, c.

### Příklad 5.17

Stanovte polární momenty setrvačnosti  $I_t$  a  $I_o$  obdélníkového průřezu o stranách  $b = 0,2$  m,  $h = 0,3$  m k jeho těžišti  $t$  a bodu  $o$  (obr. 5.20).

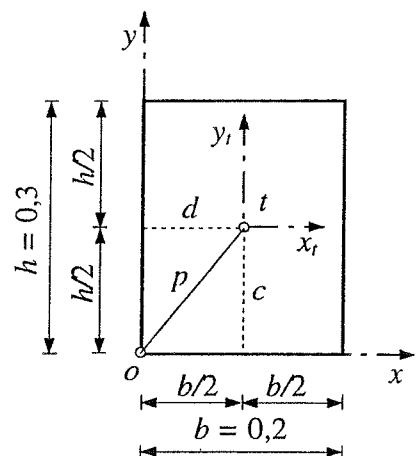
### Řešení

Polární moment setrvačnosti obdélníku k těžišti  $t$  má s přihlédnutím ke vztahům (5.4) a (5.5) velikost

$$I_t = I_{x_t} + I_{y_t} = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{1}{12}hb^3 = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2). \quad (5.53)$$

S použitím vztahu (5.51), do nějž dosazujeme  $I_t$  podle (5.53),  $A = bh$ ,

$$p^2 = c^2 + d^2 = \frac{1}{4}(b^2 + h^2),$$



Obr. 5.20. Polární momenty obdélníku

plyne výraz pro polární moment setrvačnosti obdélníku k bodu  $o$

$$I_o = I_t + Ap^2 = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2) + \frac{bh}{4}(b^2 + h^2) = \frac{bh}{3}(b^2 + h^2). \quad (5.54)$$

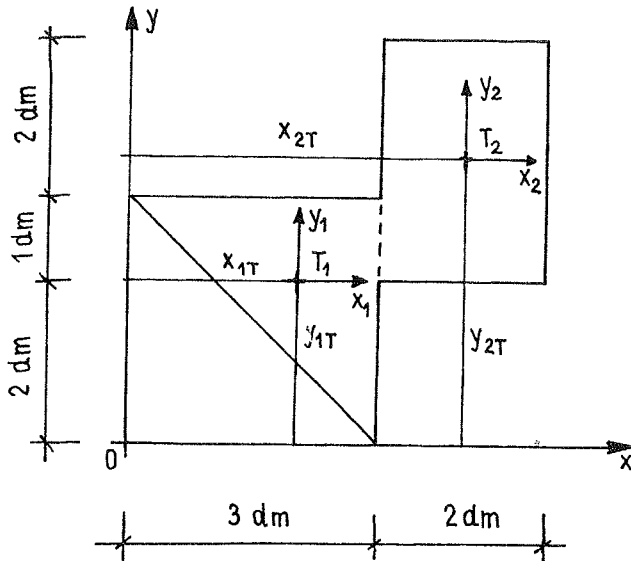
Tento výraz lze rovněž získat z rov. (5.48), do níž dosazujeme vztahy (5.6).

Numerické hodnoty:

$$I_t = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4, \quad I_o = 26 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

P Ř Í K L A D 2.67

Vypočtete axiální momenty setrvačnosti  $J_x$ ,  $J_y$  daného složeného obrazce k osám  $x$ ,  $y$  a deviační moment  $D_{xy}$  (obr. 2.119).



Obr. 2.119

Plochy :

$$A_1 = 4,5 \text{ dm}^2$$

$$A_2 = 6,0 \text{ dm}^2$$

Souřadnice těžišť :

$$x_{1T} = 2 \text{ dm} \quad y_{1T} = 2 \text{ dm}$$

$$x_{2T} = 4 \text{ dm} \quad y_{2T} = 3,5 \text{ dm}$$

Momenty setrvačnosti k osám  $x$ ,  $y$  :

$$J_x = \frac{1}{36} \cdot 3 \cdot 3^2 + 4,5 \cdot 2^2 + \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3,5^2 = 98,25 \text{ dm}^4$$

$$J_y = \frac{1}{36} \cdot 3^3 \cdot 3 + 4,5 \cdot 2^2 + \frac{1}{12} \cdot 2^3 \cdot 3 + 6 \cdot 4^2 = 118,25 \text{ dm}^4$$

Deviační moment

$$D_{xy} = -\frac{1}{72} \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 4,5 \cdot 2 \cdot 2 + 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3,5 = 100,88 \text{ dm}^4$$

Příklad 3.5

**Z a d á n í :** Určit polární moment setrvačnosti kruhu o poloměru  $r$  k jeho středu  $P$  (obr. 3.13a).

**Ř e š e n í :** Elementární mezikruží o tloušťce  $d\rho$  má plochu

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

a polární moment setrvačnosti ke středu  $P$

$$dI_p = \rho^2 dA = 2\pi\rho^3 d\rho$$

Polární moment setrvačnosti celého kruhu

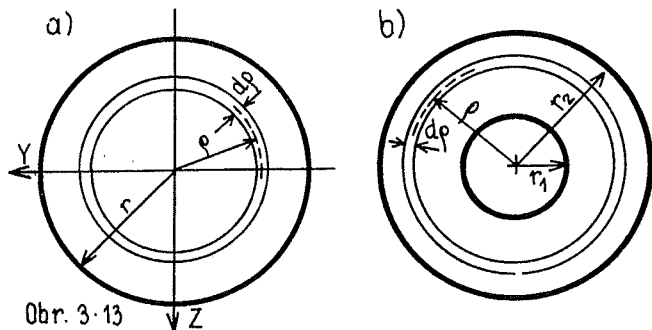
$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi r^4$$

Protože platí  $I_p = I_y + I_z$ , kde  $I_y$ ,  $I_z$  jsou dvě navzájem kolmé centrální osy, pro něž vyplývá ze symetrie obrazce  $I_y = I_z$ , je axiální moment setrvačnosti kruhu

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

**Poznámka :** Polární moment pro mezikruží řešíme obdobně jako pro kruh, mění se pouze integrační meze proměnné  $\rho$  (obr. 3.13b)

$$I_p = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi (r_2^4 - r_1^4)$$



Obr. 3.13

**Příklad 3.11**

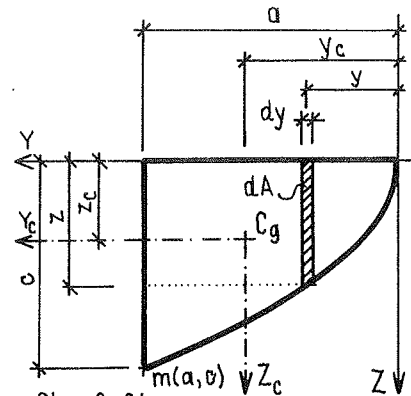
**Z a d á n í :** Určit moment y setrvačnosti k osám  $Y$ ,  $Z$  a k osám těžišťovým  $Y_c$ ,  $Z_c$  dané parabolické úseče (obr.3.24).

**Ř e š e n í :** V rovnici paraboly  $z^2 = 2py$  určíme parametr  $p$  aplikací rovnice na bod  $m(a, c)$  :

$$2p = \frac{c^2}{a} .$$

Rovnice má tedy tvar  $z^2 = \frac{c^2}{a} \cdot y$  a platí

$$y = \frac{az^2}{c^2} , \quad dy = \frac{2az}{c^2} dz .$$



Polohy těžiště určíme z ( 2.3 ) :

$$dA = z \cdot dy ,$$

$$A = \int_A dA = \int_0^c z \cdot \frac{2az}{c^2} dz = \frac{2}{3} ac ,$$

$$S_Y = \int_A \frac{z}{2} dA = \int_0^c \frac{z^2}{2} \cdot \frac{2az}{c^2} dz = \frac{2}{8} ac^2 = \frac{1}{4} ac^2 ,$$

$$S_Z = \int_A y dA = \int_0^c \frac{az^2}{c^2} \cdot z \cdot \frac{2az}{c^2} dz = \frac{2}{5} a^2 c ,$$

$$y_c = \frac{S_Z}{A} = \frac{3}{5} a , \quad z_c = \frac{S_Y}{A} = \frac{3}{8} c .$$

Moment setrvačnosti elementu o ploše  $dA$  k ose  $Y$  stanovíme jako moment setrvačnosti obdélníka ke hraně (příklad 3.1)

$$dI_Y = \frac{1}{3} z^3 dy$$

a moment setrvačnosti k ose  $Z$  z ( 3.1a )

$$dI_Z = y^2 dA = y^2 \cdot z \cdot dy .$$

Momenty setrvačnosti celé úseče k osám  $Y$ ,  $Z$  jsou

$$I_Y = \frac{1}{3} \int_0^c z^3 \frac{2az}{c^2} dz = \frac{2a}{3c^2} \int_0^c z^4 dz = \frac{2}{15} ac^3 ,$$

$$I_Z = \int_0^c \frac{a^2 z^4}{c^4} \cdot z \cdot \frac{2az}{c^2} dz = \frac{2a^3}{c^6} \int_0^c z^6 dz = \frac{2}{7} a^3 c .$$

Momenty setrvačnosti k osám těžišťovým  $Y_c$ ,  $Z_c$  určíme pomocí Steinerovy věty ( 3.5 ) z momentů k osám  $Y$ ,  $Z$

$$I_{Y_c} = I_Y - A z_c^2 , \quad I_{Z_c} = I_Z - A y_c^2 ,$$

platí tedy

$$I_{Y_c} = \frac{2}{15} ac^3 - \frac{2}{3} ac \left( \frac{3}{8} c \right)^2 = \frac{19}{480} ac^3 ,$$

$$I_{Z_c} = \frac{2}{7} a^3 c - \frac{2}{3} ac \left( \frac{3}{5} a \right)^2 = \frac{8}{175} a^3 c .$$

### Příklad 5.3

Centrální momenty setrvačnosti **kruhu** o poloměru  $r$  (obr. 5.4).

Řešení

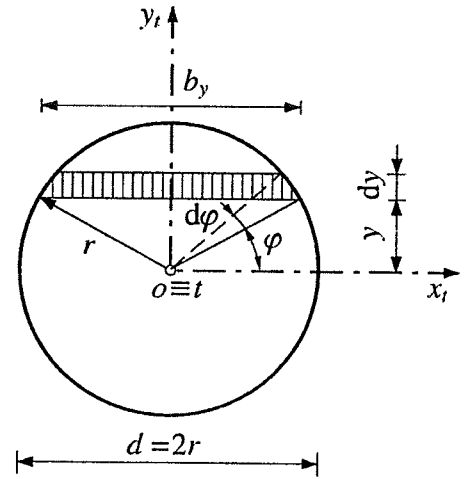
S přihlédnutím k obr. 5.4 lze psát

$$y = r \sin \varphi, \quad dy = r \cos \varphi d\varphi, \quad b_y = 2r \cos \varphi,$$

$$dA = b_y dy = 2r \cos \varphi \cdot r \cos \varphi d\varphi = 2r^2 \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Centrální moment setrvačnosti kruhu k ose  $x_t$

$$\begin{aligned} I_{x_t} &= \int_{\bar{A}} y^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \sin^2 \varphi \cdot 2r^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 2r^4 \left[ \frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} d^4. \end{aligned} \quad (5.11)$$



Obr. 5.4. Kruhový průřez

Vzhledem k rotační symetrii kruhu mají centrální momenty setrvačnosti ke všem osám procházejícím těžištěm  $t$  kruhu stejné hodnoty. Platí tedy  $I_{y_t} = I_{x_t}$ .

### Příklad 5.11

Hlavní centrální poloměry setrvačnosti **kruhu** o poloměru  $r = d/2$  na obr. 5.4.

Řešení

Pro všechny centrální osy má poloměr setrvačnosti kruhu stejnou velikost

$$i_{x_t} = i_{y_t} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \pi r^4}{\pi r^2}} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}. \quad (5.44)$$

### Příklad 5.18

Stanovte polární moment setrvačnosti  $I_t$  kruhu (obr. 5.4) o poloměru  $r = 0,2$  m k jeho středu  $s \equiv t$ .

Řešení

Do rov. (5.48) dosadíme vztah (5.11) a obdržíme

$$I_t = I_{x_t} + I_{y_t} = 2 \cdot \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} d^4; \quad (5.55)$$

po numerickém vyčíslení  $I_t = 2,513 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ .

**Příklad 3.3**

**Z a d á n í :** Určit momenty setrvačnosti průřezu ve tvaru půlkruhu k osám Y, Z (obr.3.12).

**Ř e š e n í :** Element o ploše  $dA = b_z \cdot dz$  má k ose Y moment setrvačnosti

$$dI_Y = z^2 dA.$$

Zavedeme-li proměnnou  $\varphi$ , platí :

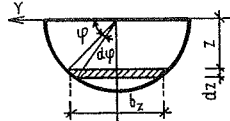
$$z = r \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad dz = r \cdot \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$b_z = 2r \cdot \cos \varphi \quad \text{pro} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

a pro moment setrvačnosti celého půlkruhu k ose Y

$$I_Y = \int_A dI_Y = 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32} \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I_Y = \frac{\pi r^4}{8}.$$



Obr. 3.12 ZV

Moment setrvačnosti elementu dA k ose Z je

$$dI_Z = \frac{1}{12} b_z^3 dz = \frac{1}{12} (2r \cos \varphi)^3 r \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{12} r^4 \cos^4 \varphi \, d\varphi.$$

Pro celý půlkruh

$$I_Z = \int_A dI_Z = \frac{2}{3} r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} r^4 \left[ \frac{3}{8} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I_Z = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Pro čtvrtkruh se změni vyjádření  $b_z = r \cos \varphi$ , platí  $I_Y = \frac{\pi r^4}{16}$  a ze symetrie

$$I_Z = \frac{\pi r^4}{16}.$$

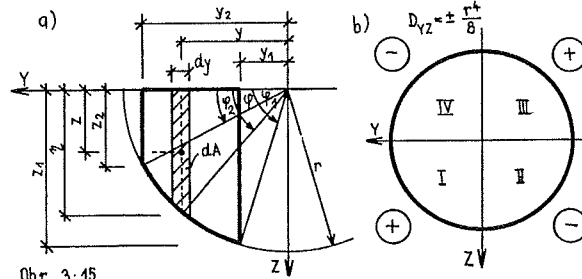
**Příklad 3.7**

**Z a d á n í :** Určit pro část kruhu (obr.3.15) omezenou kružnicí, poloměrem a dvěma polotětivami k poloměru kolmými deviační moment  $D_{YZ}$  k omezujičímu poloměru a k poloměru kolmému.

**Ř e š e n í :**  $dA = \eta \, dy$ ,

$$dD_{YZ} = y \cdot \frac{\eta}{2} \cdot dA,$$

kte  $\eta$  je pořadnice omezujičí kružnice příslušná k proměnné y.



Obr. 3.15

Zavedeme substituci

$$y = r \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad dy = -r \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$\eta = r \cdot \sin \varphi$$

a vyjde

$$D_{YZ} = \int dD_{YZ} = \int_{y_1}^{y_2} y \frac{\eta}{2} \, dy = -\frac{r^4}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = -\frac{r^4}{2} \left[ \frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Protože platí

$$r \cdot \sin \varphi_1 = z_1, \quad r \cdot \sin \varphi_2 = z_2, \text{ je}$$

$$D_{YZ} = -\frac{1}{8} (z_2^4 - z_1^4) = \frac{1}{8} (z_1^4 - z_2^4).$$

Pro čtvrtkruh je  $z_1 = r$ ,  $z_2 = 0$ , a proto

$$D_{YZ} = \frac{r^4}{8}.$$

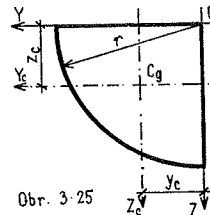
Hodnota deviačního momentu čtvrtkruhu může být (3.15b) kladná (případ I, III) nebo záporná (případ II, IV) obdobně jako v příkladu 3.6 u deviačního momentu pravouhlého trojúhelníka.

**Cvičení 3.2**

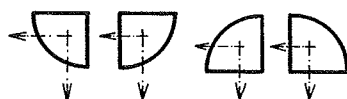
Užitím transformačních vzorců stanovte momenty setrvačnosti a deviační moment k těžištvým osám  $Y_c, Z_c$  a polární moment setrvačnosti k těžišti  $C_g$  plochy čtvrtkruhu (obr.3.25) na základě známých hodnot momentů setrvačnosti (příklad 3.3) a deviačního momentu (příklad 3.7) k osám Y, Z. Polohu těžiště je možné vzít z tabulek (3.1), ev. určit (postup z příkladu 2.6).

$$\left( I_{Y_c} = I_Z = \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4 \approx 0,0549 r^4; \right. \\ \left. D_{Y_c Z_c} = \left( \frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4 \approx -0,0165 r^4; I_{C_g} = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) r^4 \right)$$

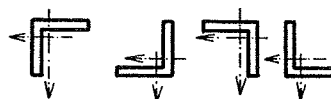
**Poznámka 1 :** Podle polohy čtvrtkruhu (obr.3.26) má jeho deviační moment k těžištvým osám různá znaménka.



Obr. 3.25



Obr. 3.26



Obr. 3.27