

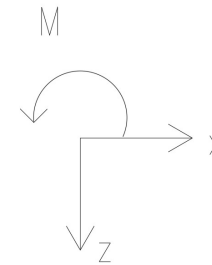
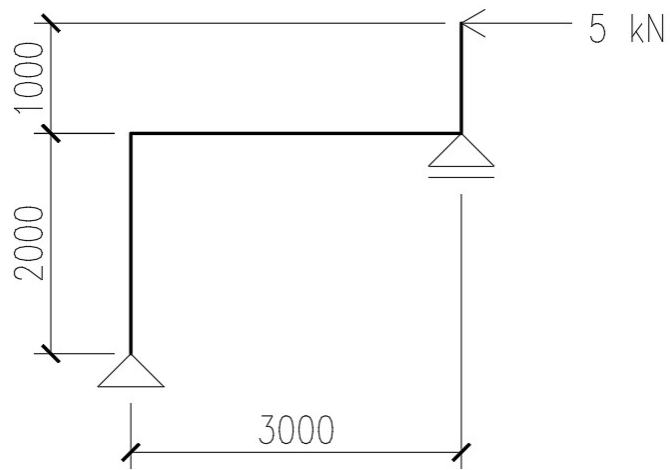
Cvičení 9

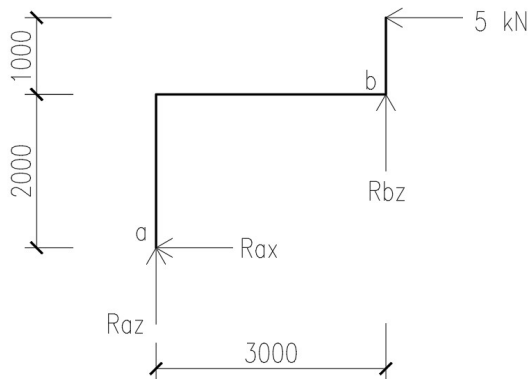
Rovinné pravouhle lomené nosníky a konzoly zatížené libovolným zatížením včetně rovnoměrně spojitých a lineárních, reakce a diagramy vnitřních sil a momentů.

Příklad 1

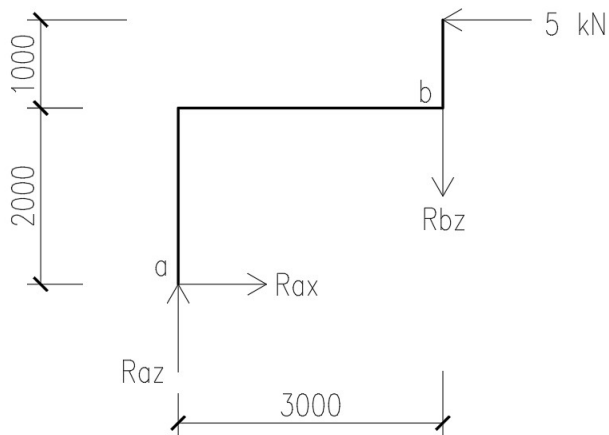
- Nejprve nosník uvolníme z vazeb a ty nahradíme **předpoklady** průběhu reakcí, používáme přitom dohodnutou osovou konvenci – kladný směr je ve směru šipek

[mm]





Správný směr reakcí



- V bodě **a** se nachází **pevná podpora**, proto ji nahradíme dvěma složkami reakcí R_{az} a R_{ax}
- V bodě **b** se nachází **posuvná podpora ve vodorovném směru**, proto ji nahradíme jedinou složkou reakce ve svislém směru R_{bz}
- Libovolnou kombinací silových a momentových podmínek tyto neznámé složky reakcí vypočteme

Např.:

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow 5 \cdot 3 + R_{bz} \cdot 3 = 0 \rightarrow R_{bz} = -5kN$$

- Protože je předpoklad směru reakce R_{bz} **špatný**, musí být směr z důvodu **podmínky rovnováhy** opačný $R_{bz} = 5kN \downarrow$

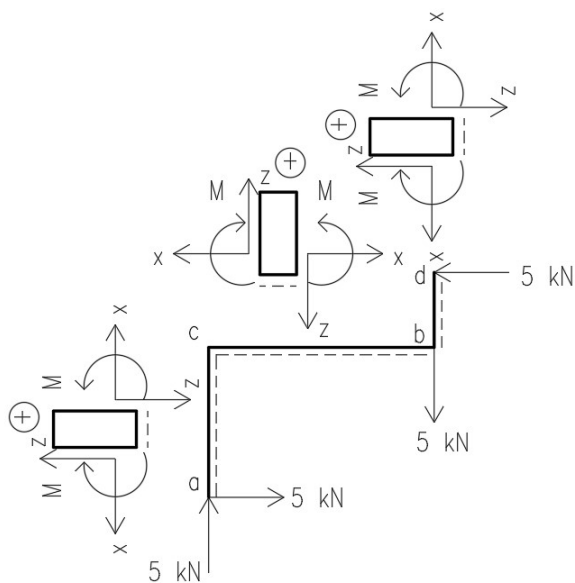
$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow -5 - R_{ax} = 0 \rightarrow -R_{ax} = 5kN$$

- Protože je předpoklad směru reakce R_{ax} **špatný**, musí být směr z důvodu **podmínky rovnováhy** opačný $R_{ax} = 5kN \rightarrow$

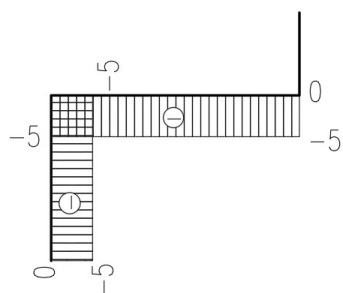
$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow -R_{az} \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 0 \rightarrow -R_{az} = -5kN$$

- Protože je předpoklad směru reakce R_{az} **správný**, zachová se i její směr $R_{az} = 5kN \uparrow$
- libovolnou podmínkou rovnováhy provedeme kontrolu:

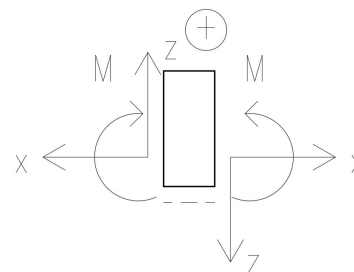
$$\sum F_{iz} = 0 \rightarrow -5 + 5 = 0 \rightarrow 0 = 0$$



(N)



- Nyní můžeme přistoupit k vykreslení průběhu vnitřních sil na nosníku
- Pro snadnější orientaci vyznačíme na nosníku tzv. **referenční vlákna** – podle nich orientujeme naši znaménkovou konvenci
- Nosník si označíme ve zkoumaných průřezech např. a, b, c a d.



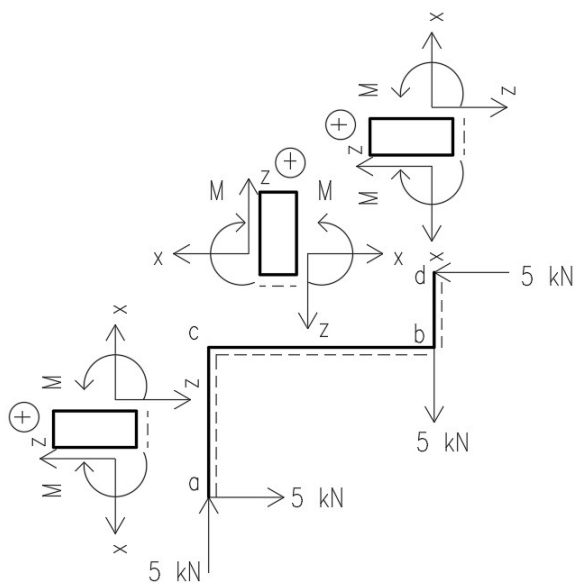
- Pro vykreslení **Normálových** složek, zahrnujeme všechny síly které působí **ve směru** osy prutu, dbáme na to, aby referenční vlákna byla shodná se znaménkovou konvencí

$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = -5 \text{ kN}$$

$$N_c^I = -5 \text{ kN}; N_c^{II} = -5 \text{ kN}$$

$$N_b^I = -5 \text{ kN}; N_b^{II} = -5 + 5 = 0 \text{ kN}$$

$$N_d^I = -5 + 5 = 0 \text{ kN}; N_d^{II} = -5 + 5 = 0 \text{ kN}$$



- Pro vykreslení **Posouvajících** složek, zahrnujeme všechny síly které působí **kolmo** na osu prutu, dbáme na to, aby referenční vlákna byla shodná se znaménkovou konvencí

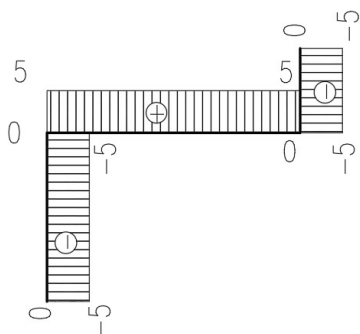
$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = -5 \text{ kN}$$

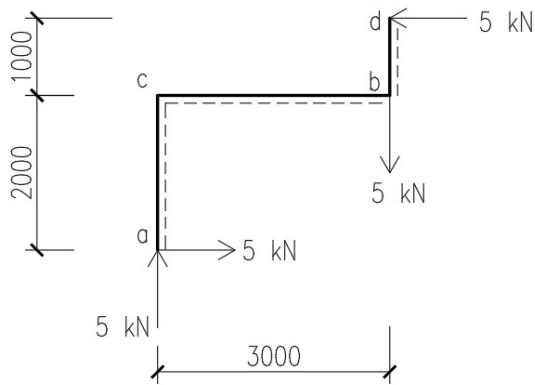
$$V_c^I = 0 \text{ kN}; V_c^{II} = 5 \text{ kN}$$

$$V_b^I = 5 \text{ kN}; V_b^{II} = 5 - 5 = 0 \text{ kN}$$

$$V_d^I = -5 \text{ kN}; V_d^{II} = -5 + 5 = 0 \text{ kN}$$

(V)





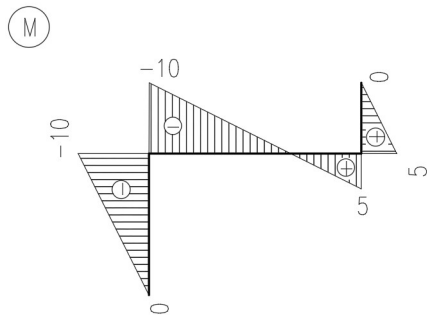
- Pro vykreslení **Momentových** složek, zahrnujeme všechny **momentové** účinky které působí **ve** vyšetřovaném **bodě**, znaménková konvence je pro každý momentový účinek ve vyšetřovaném bodě shodná – není potřeba otáčet znaménkovou konvencí

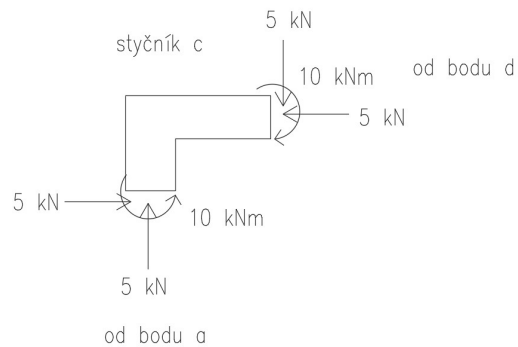
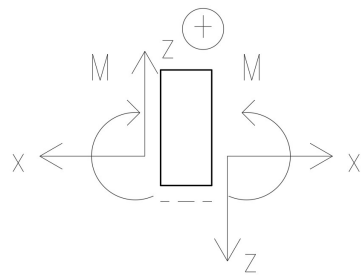
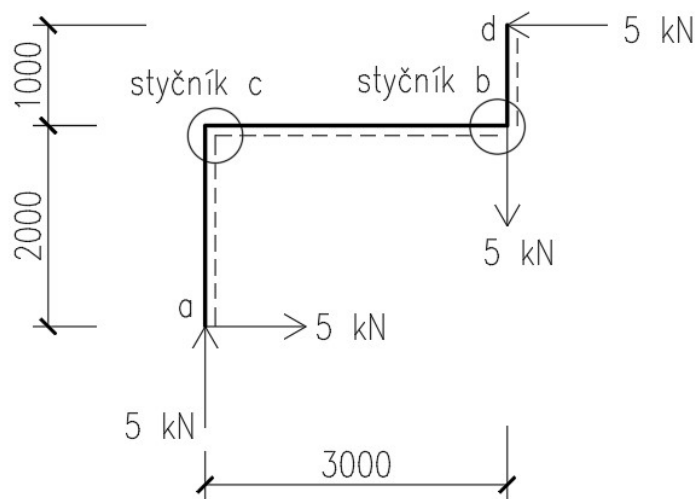
$$M_a^I = 0 \text{ kNm}; M_a^{II} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_c^I = -5 \cdot 2 = -10 \text{ kNm}; M_c^{II} = -5 \cdot 2 = -10 \text{ kNm}$$

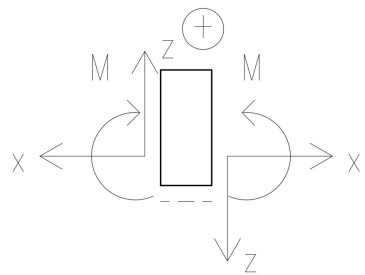
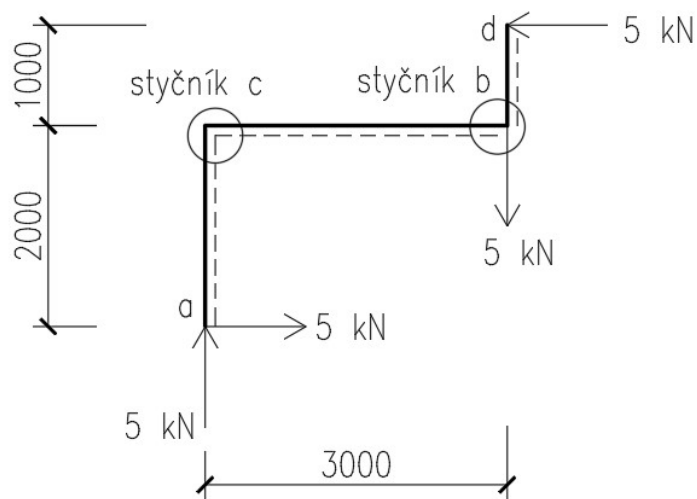
$$M_b^I = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 5 \text{ kNm}; M_b^{II} = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 5 \text{ kNm}$$

$$M_d^I = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0 \text{ kNm}; M_d^{II} = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0 \text{ kNm}$$





- **Doporučení:** místo, kde se setkává 2 a více prutů nazýváme **styčník**, v tomto bodě můžeme provést kontrolu výsledků – ověříme **rovnováhu ve styčníku**
 - Rovnováhu ve styčníku ověříme tak, že postupujeme od volného konce nosníku směrem k vyšetřovanému bodu
 - Rovnováhou ve styčníku lze ověřit všechny vnitřní síly N, V, M.
- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Styčník c od bodu a: $N_c^I = 5 \text{ kN} \uparrow$ $V_c^I = 5 \text{ kN} \rightarrow$ $M_c^I = -5 \cdot 2 = -10 \text{ kNm}$ | <ul style="list-style-type: none"> • Styčník c od bodu d: $N_c^{II} = 5 \text{ kN} \leftarrow$ $V_c^{II} = 5 \text{ kN} \downarrow$ $M_c^{II} = 5 \cdot 1 - 5 \cdot 3 = -10 \text{ kNm}$ |
|--|---|
- Z obrázku je patrné, že pomocí podmínky rovnováhy (**silové** nebo **momentové**) vyjde po sečtení účinků ve styčníku c **nula** → řešení je správně



- Styčník b od bodu a:

$$N_b^I = 5 \text{ kN} \rightarrow$$

$$V_b^I = 5 \text{ kN} \uparrow$$

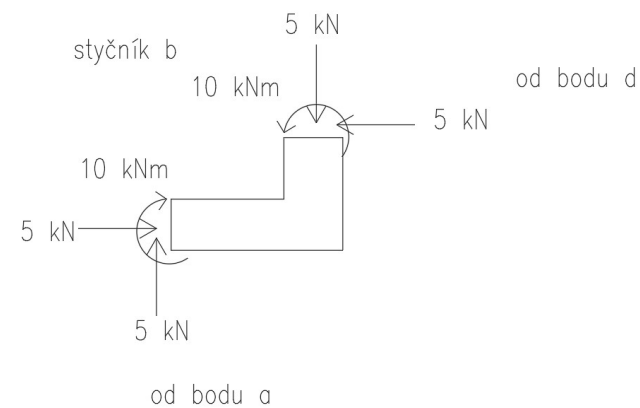
$$M_b^I = 5 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 5 \text{ kNm}$$

- Styčník b od bodu d:

$$N_b^{II} = 5 \text{ kN} \downarrow$$

$$V_b^{II} = 5 \text{ kN} \leftarrow$$

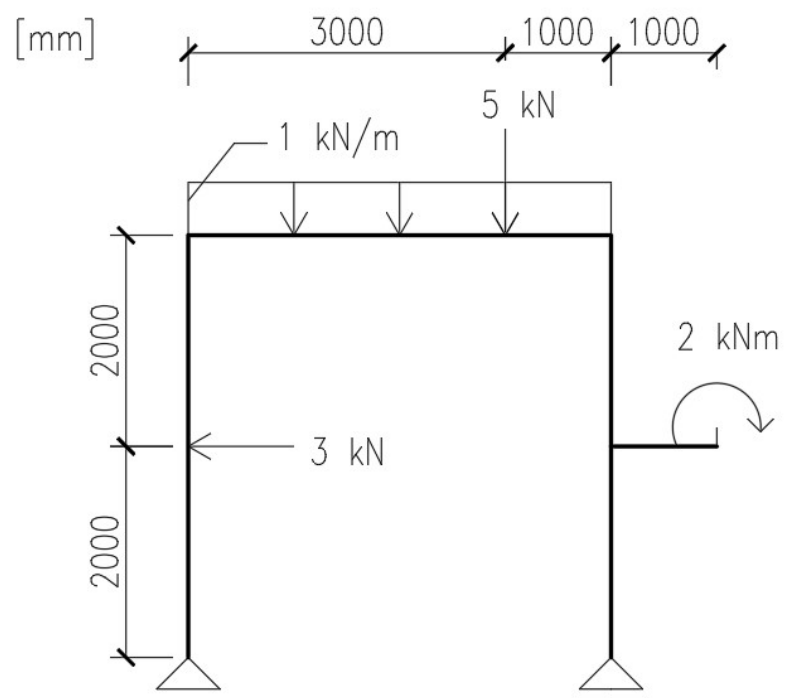
$$M_b^{II} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ kNm}$$

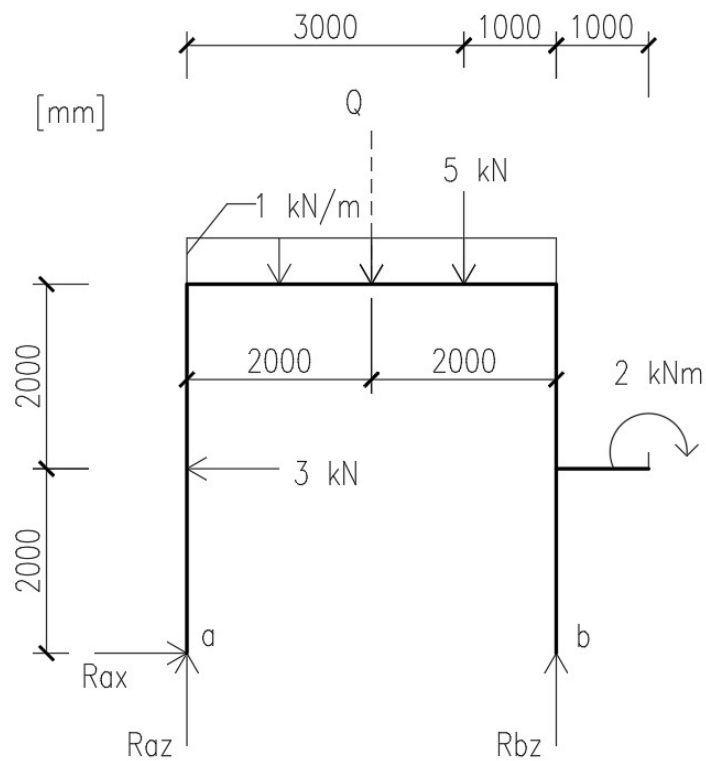


- Z obrázku je patrné, že pomocí podmínky rovnováhy (**silové** nebo **momentové**) vyjde po sečtení účinků ve styčníku b **nula** → řešení je správně

Příklad 2

- Obdobně postupujeme i u ostatních příkladů





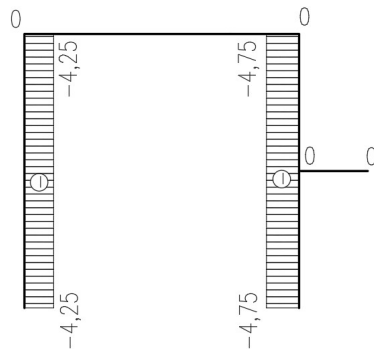
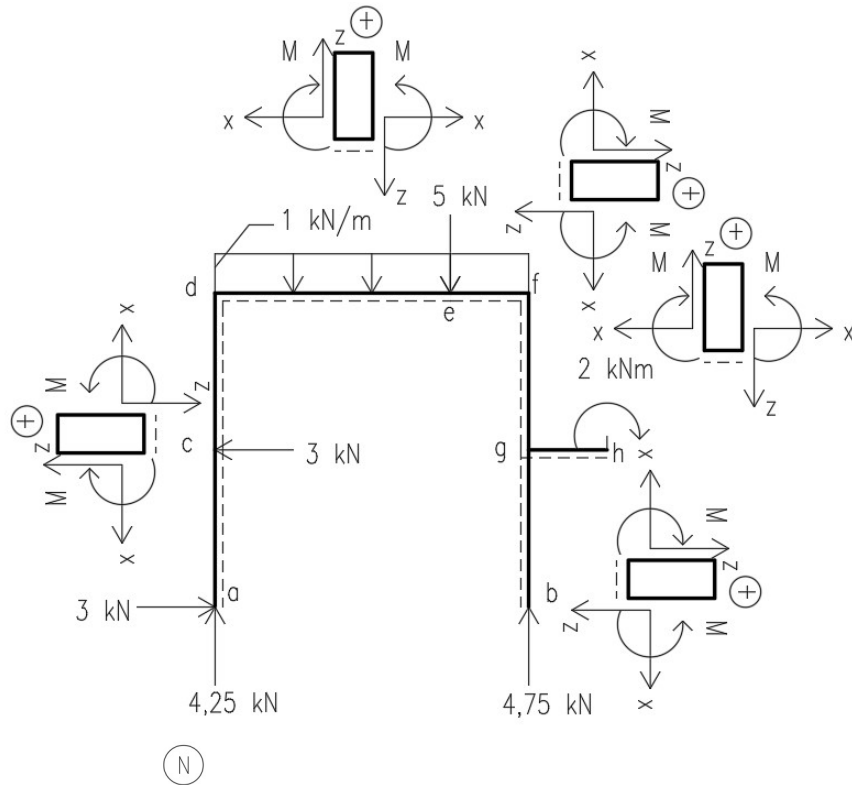
- Uvolníme nosník z **vazeb** a určíme hodnotu a polohu **náhradního břemene Q**

$$Q = 1 \cdot 4 = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow R_{bz} \cdot 4 - 2 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{bz} = 4,75 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow -R_{az} \cdot 4 - 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{az} = 4,25 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow -3 + R_{ax} = 0 \rightarrow R_{ax} = 3 \text{ kN} \rightarrow$$



- Normálové složky účinků sil:

$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = -4,25 \text{ kN}$$

$$N_c^I = -4,25 \text{ kN}; N_c^{II} = -4,25 \text{ kN}$$

$$N_d^I = 4,25 \text{ kN}; N_d^{II} = -3 + 3 = 0 \text{ kN}$$

$$N_e^I = -3 + 3 = 0 \text{ kN}; N_e^{II} = -3 + 3 = 0 \text{ kN}$$

$$N_f^I = -3 + 3 = 0 \text{ kN}; N_f^{II} = 4,25 - 4 - 5 = -4,75 \text{ kN}$$

- Protože se v bodě g střetávají 3 pruty je potřeba sílu určit pomocí rovnováhy ve styčnicku:

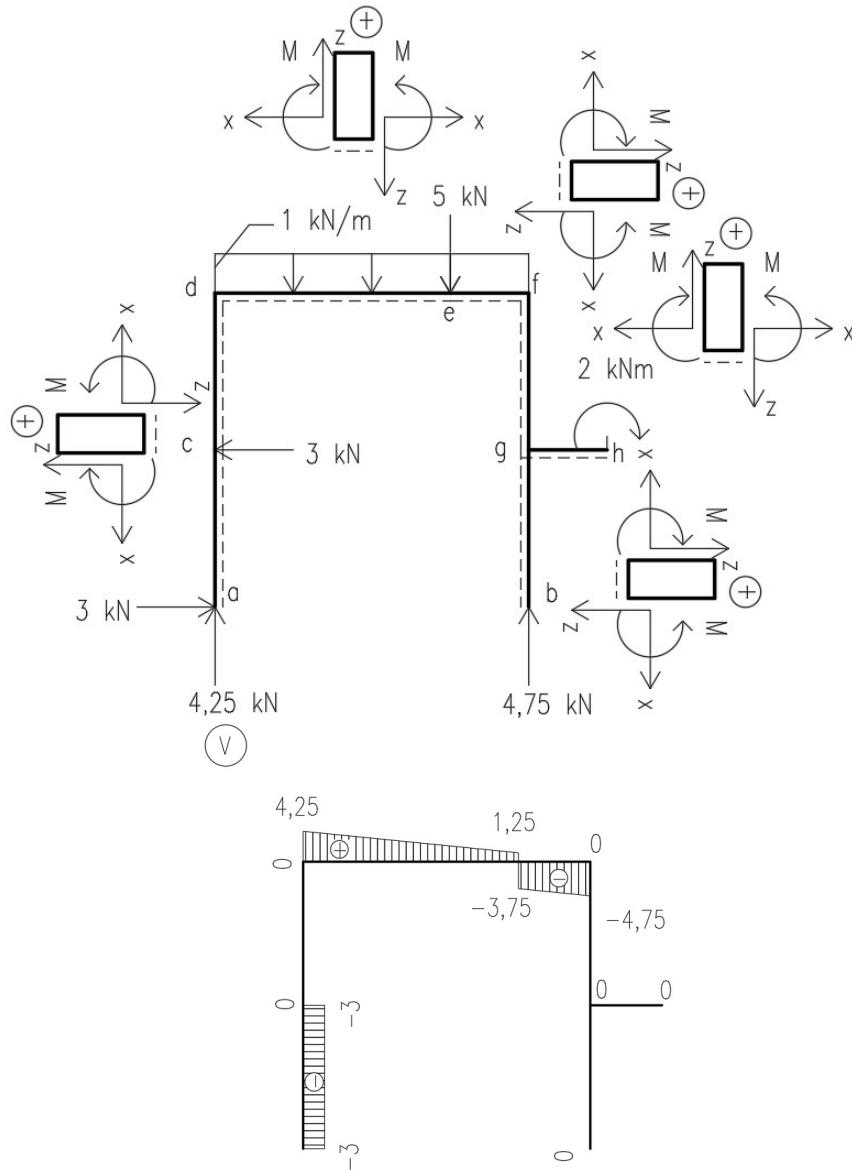
$$N_g^I = 4,25 - 4 - 5 = -4,75 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu a})$$

$$N_g^{II} = -4,75 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu b})$$

$$N_g^{III} = 0 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu h})$$

$$N_h^I = -3 + 3 = 0 \text{ kN}; N_h^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$N_b^I = 4,25 - 4 - 9 = -4,75 \text{ kN}; N_b^{II} = 0 \text{ kN}$$



- Posouvající složky účinků sil:

$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = -3 \text{ kN}$$

$$V_c^I = -3 \text{ kN}; V_c^{II} = -3 + 3 = 0 \text{ kN}$$

$$V_d^I = 0 \text{ kN}; V_d^{II} = 4,25 \text{ kN}$$

$$V_e^I = 4,25 - 1 \cdot 3 = 1,25 \text{ kN}; V_e^{II} = 4,25 - 1 \cdot 3 - 5 = -3,75 \text{ kN}$$

$$N_f^I = 4,25 - 1 \cdot 4 - 5 = -4,75 \text{ kN}; N_f^{II} = 3 - 3 = 0 \text{ kN}$$

- Protože se v bodě g střetávají 3 pruty je potřeba sílu určit pomocí **rovnováhy ve styčnicku**:

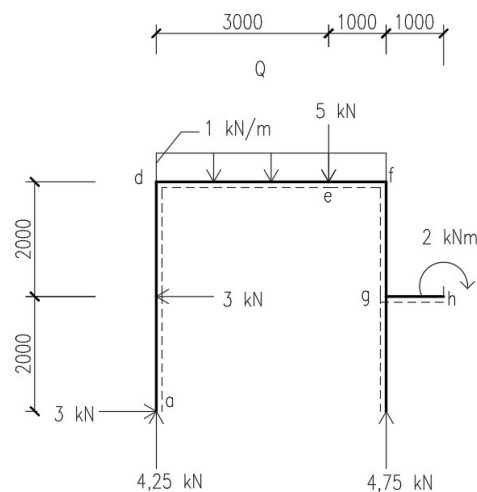
$$V_g^I = 3 - 3 = 0 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu a})$$

$$V_g^{II} = 0 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu b})$$

$$V_g^{III} = 0 \text{ kN}; (\text{výpočet provádíme od bodu h})$$

$$V_h^I = 4,25 - 1 \cdot 4 - 5 + 4,75 = 0 \text{ kN}; V_h^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$V_b^I = 3 - 3 = 0 \text{ kN}; V_b^{II} = 0 \text{ kN}$$



- Momentové složky účinků sil:

$$M_a^I = 0 \text{ kN}; M_a^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$M_c^I = -3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}; M_c^{II} = -3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}$$

$$M_d^I = -3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}; M_d^{II} = -3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = -6 \text{ kNm}$$

$$M_e^I = 4,25 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{3^2}{2} = 2,25 \text{ kNm}$$

$$M_e^{II} = 4,25 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{3^2}{2} = 2,25 \text{ kNm}$$

$$M_f^I = 4,25 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 1 = -2 \text{ kNm}$$

$$M_f^{II} = 4,25 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 1 = -2 \text{ kNm}$$

- Protože se v bodě g střetávají 3 pruty je potřeba sílu určit pomocí **rovnováhy ve styčnicku**:

$$M_g^I = 4,25 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 1 = -2 \text{ kNm}; (\text{výpočet provádíme od bodu a})$$

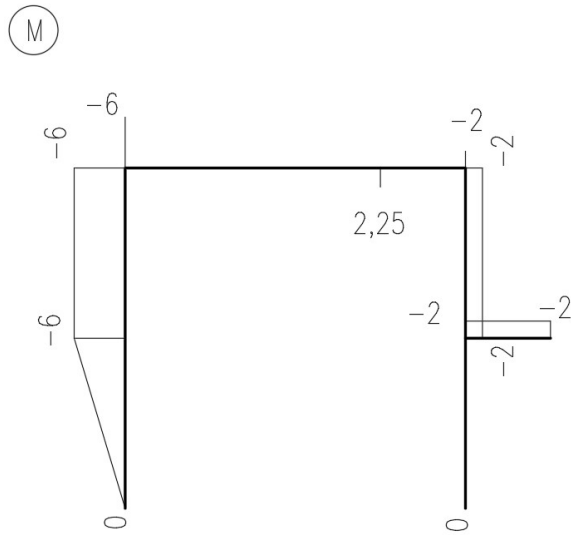
$$M_g^{II} = 0 \text{ kNm}; (\text{výpočet provádíme od bodu b})$$

$$M_g^{III} = -2 \text{ kNm}; (\text{výpočet provádíme od bodu h})$$

$$M_h^I = 4,25 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 4,75 \cdot 1 = -2 \text{ kNm}$$

$$M_h^{II} = 4,25 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 4,75 \cdot 1 + 2 = 0 \text{ kNm}$$

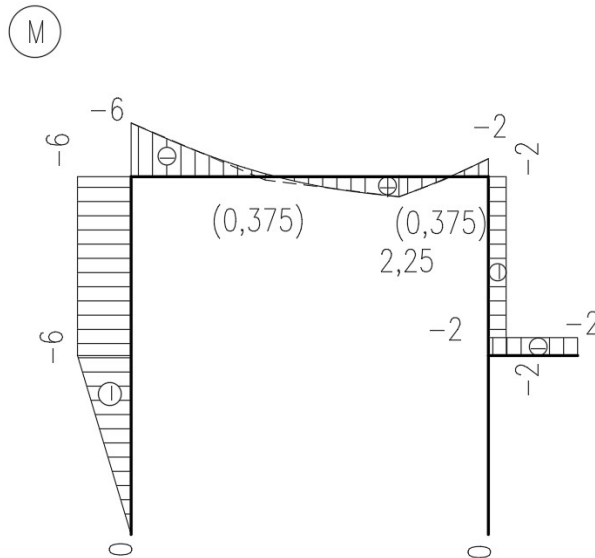
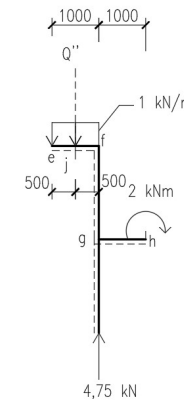
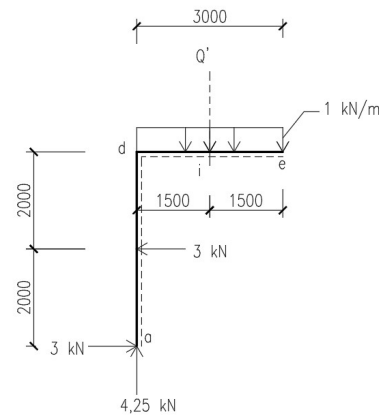
$$M_b^I = 4,25 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 1 + 2 = 0 \text{ kNm}; M_b^{II} = 4,25 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot \frac{4^2}{2} - 5 \cdot 1 + 2 = 0 \text{ kNm}$$



- Pro jasnější pochopení průběhu momentových účinků na konstrukci použijeme k vykreslení **tečnový polygon**:
- Protože do průběhu spojitého zatížení zasahuje **osamělá síla** obrazec rozdělíme na dvě části:

• Část 1:

• Část 2:



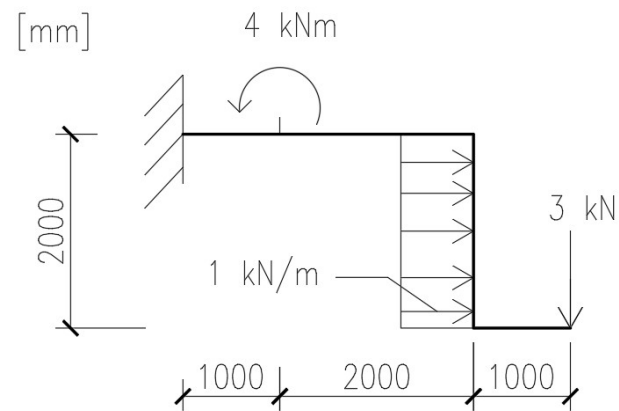
- Vypočítáme momentový účinek k bodu otáčení od náhradních břemen pro obě části

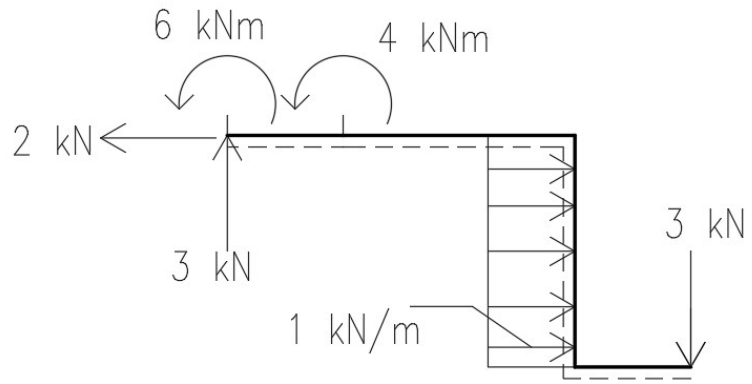
$$M_i^I = 4,25 \cdot 1,5 - 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 0,375 \text{ kNm}$$

$$M_j^{II} = 4,75 \cdot 0,5 - 2 = 0,375 \text{ kNm}$$

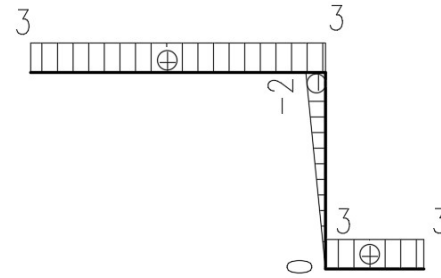
Příklad 3

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znova pečlivě projděte předchozí dva příklady, než budete pokračovat dále

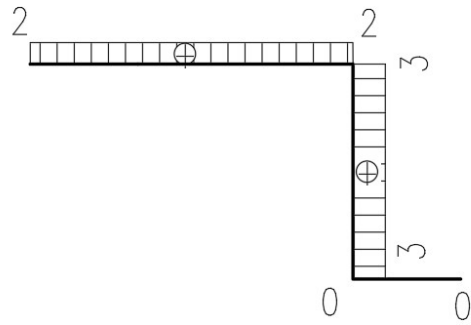




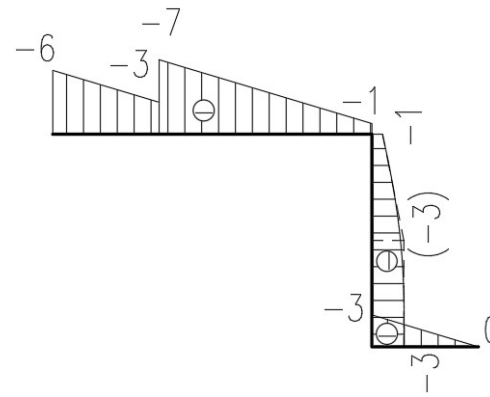
(V)



(N)

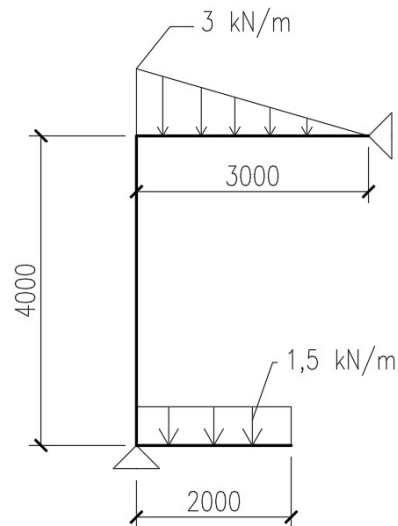


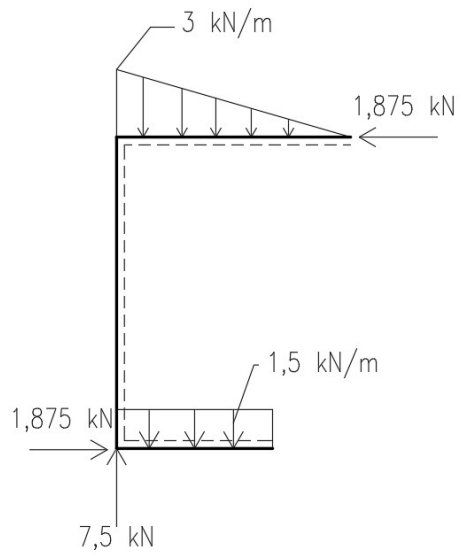
(M)



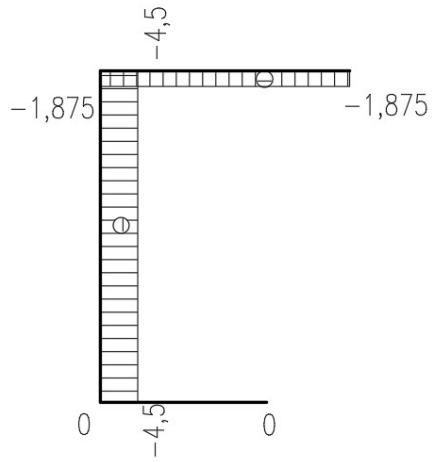
Příklad 4

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znova pečlivě projděte předchozí dva příklady, než budete pokračovat dále

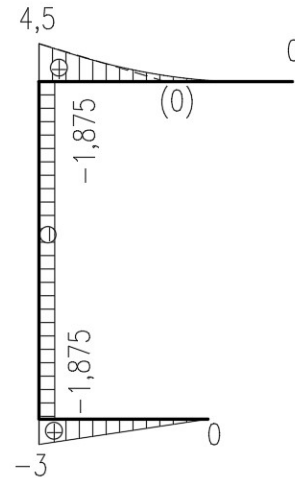




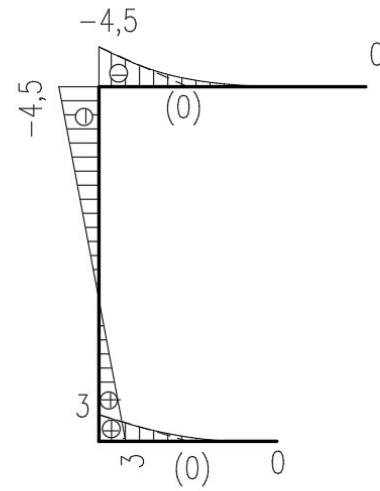
(N)



(V)



(M)



Následující příklady na procvičení jsou bez výsledků. Zkuste příklady vyřešit sami a případnou kontrolu proveďte porovnáním s ostatními kolegy.

