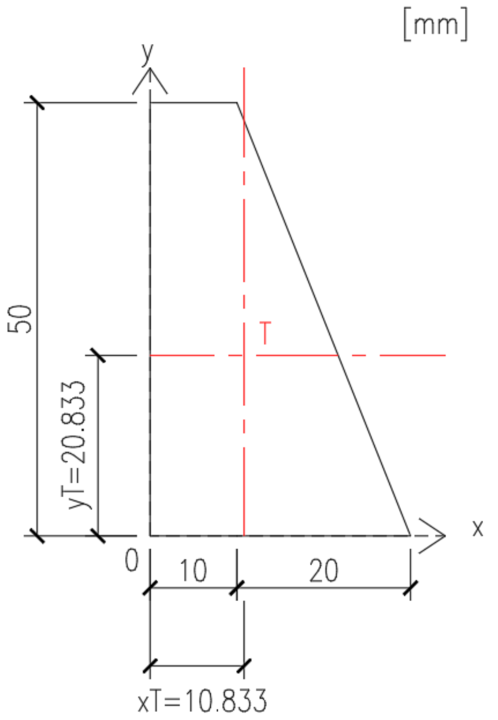
Cvičení 17

Hlavní kvadratické momenty – početní a grafické řešení. Poloměry setrvačnosti, elipsa setrvačnosti

Příklad 1



Celkový obrazec
T=[10,833; 20,833]
A=1000 mm^2
Ix=1,91·10^5 mm^4
Iy=4,93·10^4 mm^4
Dxy=−3,82·10^4 mm^4

- Úloha se dá řešit dvěma způsoby, početně nebo graficky (na zkoušce bude zadáno, který způsob máte použít)
- Početně:

- Nejprve určíme **úhel natočení hlavních** os α0

$$\tan(2\cdot(\alpha 0)) = \frac{2\cdot Dxy}{Iy - Ix} = \frac{2\cdot(-3{,}82\cdot 10^4)}{4{,}93\cdot 10^4 - 19{,}1\cdot 10^4} = 0{,}539$$

- Zbavíme se funkce tan tím, že celou rovnici vynásobíme inverzní funkcí, tedy arctan nebo-li tan^{-1}

$$2\cdot(\alpha 0) = 28{,}33°$$

$$\alpha 0 = 14{,}166°$$

- Nyní stanovíme **hlavní kvadratické momenty** I1 a I2

$$I1{,}2 = \frac{Ix + Iy}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(Iy - Ix)^2 + 4 \cdot Dxy^2}$$
$$= \frac{1{,}91 \cdot 10^5 + 4{,}93 \cdot 10^4}{2} \pm \frac{1}{2}$$
$$\cdot \sqrt{(4{,}93 \cdot 10^4 - 1{,}91 \cdot 10^5)^2 + 4 \cdot (-3{,}82 \cdot 10^4)^2}$$
$$= 1{,}2015 \cdot 10^5 \pm 0{,}8049 \cdot 10^5$$

- I1 = Imax, ve výpočtu použijeme sčítání

$$I1 = Imax = 2{,}0064 \cdot 10^5\ mm^4$$

- I2 = Imin, ve výpočtu použijeme odčítání

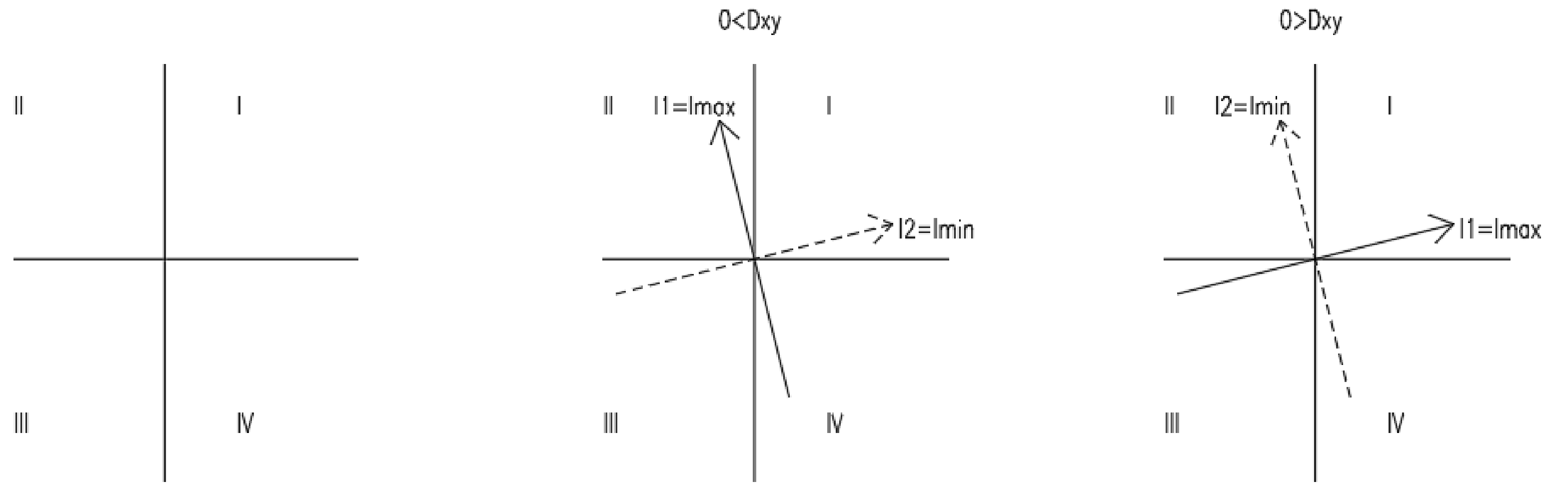
$$I2 = Imin = 0{,}3966 \cdot 10^5\ mm^4$$

- Z hlavních kvadratických momentů stanovíme **poloměry setrvačnosti** i1 a i2

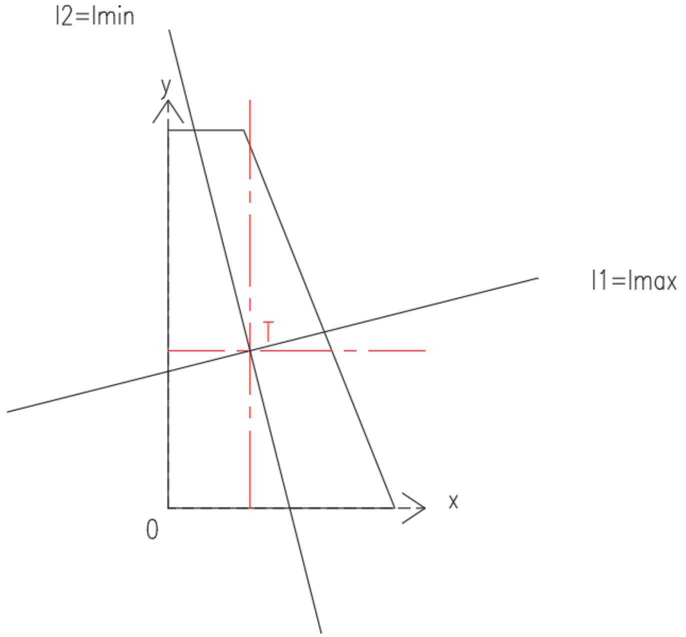
$$i1 = \sqrt{\frac{I1}{A}} = \sqrt{\frac{2{,}0064 \cdot 10^5}{1000}} = 14{,}16\ mm$$

$$i2 = \sqrt{\frac{I2}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}3966 \cdot 10^5}{1000}} = 6{,}3\ mm$$

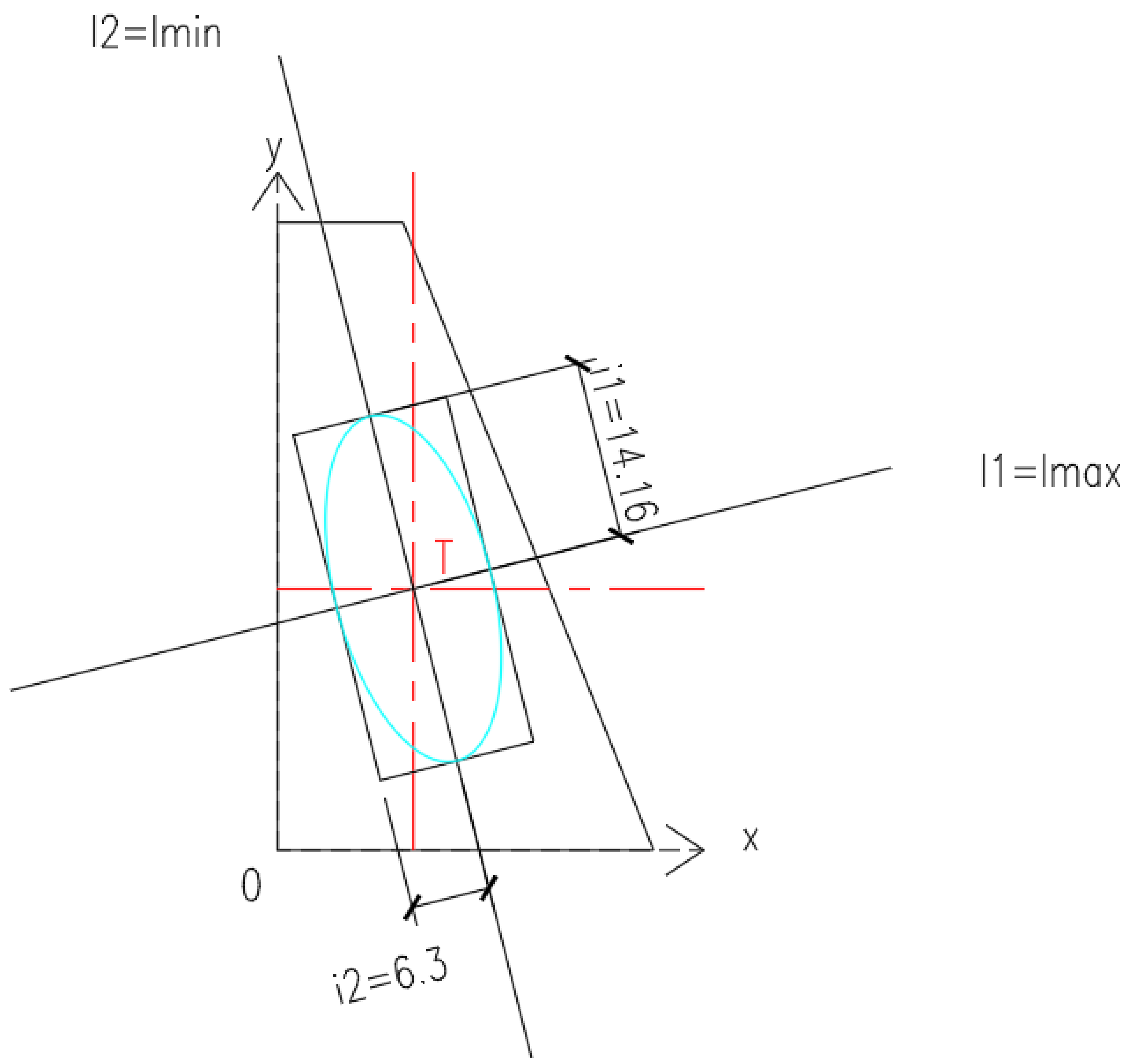
- Dále je potřeba určit, na kterou z os vynášet maximální hodnotu poloměru setrvačnosti a na kterou minimální hodnotu poloměru setrvačnosti
- To určíme podle hodnoty deviačního momentu
- Je-li hodnota deviačního momentu **kladná** 0<Dxy, bude osa maximálního kvadratického momentu procházet **sudými** kvadranty
- Je-li hodnota deviačního momentu **záporná** 0>Dxy, bude osa maximálního kvadratického momentu procházet **lichými** kvadranty

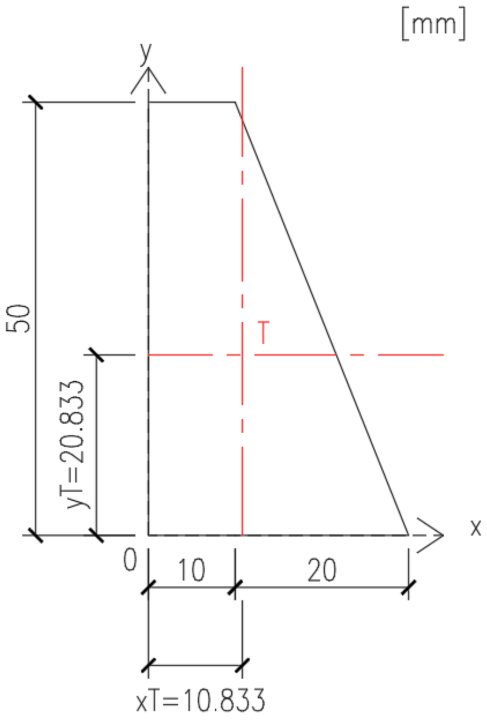


Rozdělení jednotlivých kvadrantů a určení maximální osy



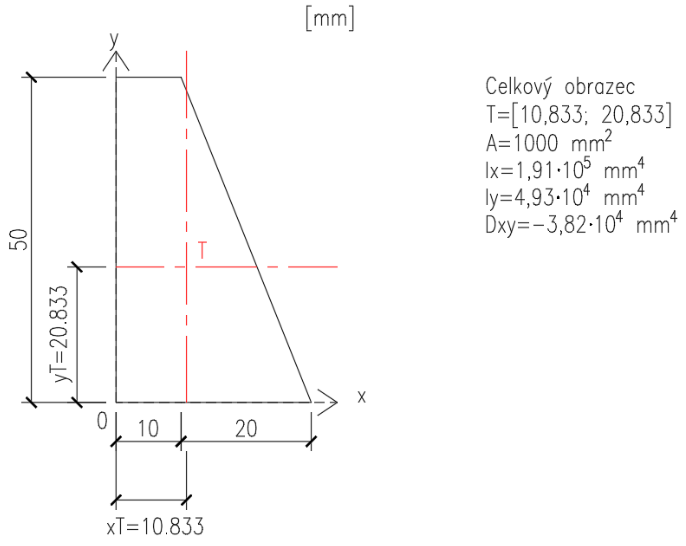
- Máme-li určené osy, vyneseme na ně poloměry setrvačnosti a sestrojíme **elipsu setrvačnosti**

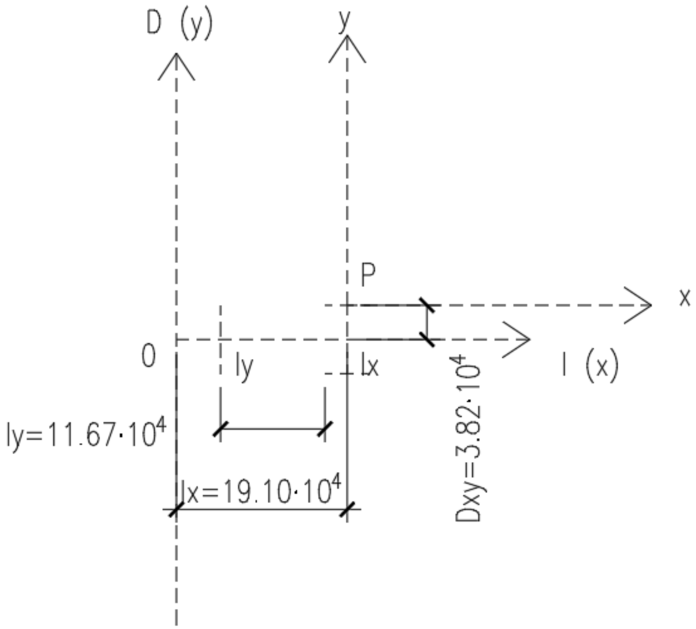

I2=Imin
y
i1=14.16
I1=Imax
T
x
0
i2=6.3



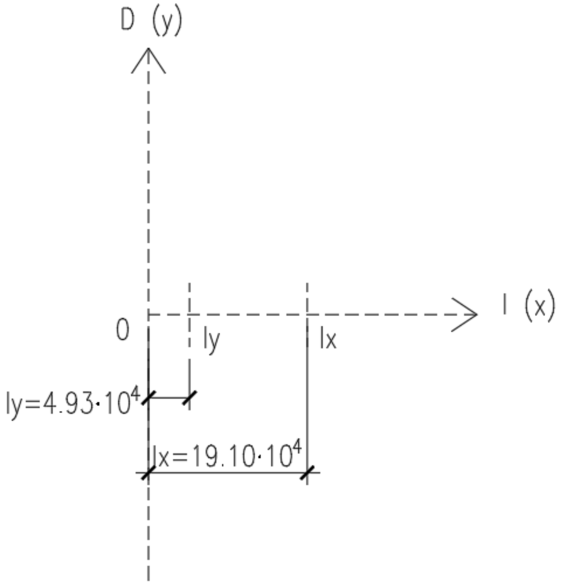
Celkový obrazec
T=[10,833; 20,833]
$A = 1000\ mm^2$
$I_x = 1{,}91 \cdot 10^5\ mm^4$
$I_y = 4{,}93 \cdot 10^4\ mm^4$
$D_{xy} = -3{,}82 \cdot 10^4\ mm^4$

- Úloha se dá řešit dvěma způsoby, početně nebo graficky (na zkoušce bude zadáno, který způsob máte použít)
- Graficky – **Mohrova kružnice**:
- Nejprve si narýsujeme osy ve stejném směru jako osy x a y
- Osa **x** nám představuje hodnoty **kvadratických momentů** I
- Osa **y** nám představuje hodnoty **deviačních momentů** D

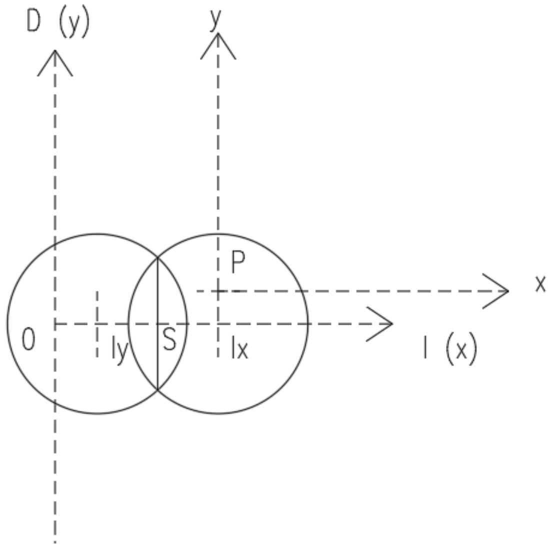




- Na osu x vyneseme hodnoty kvadratických momentů

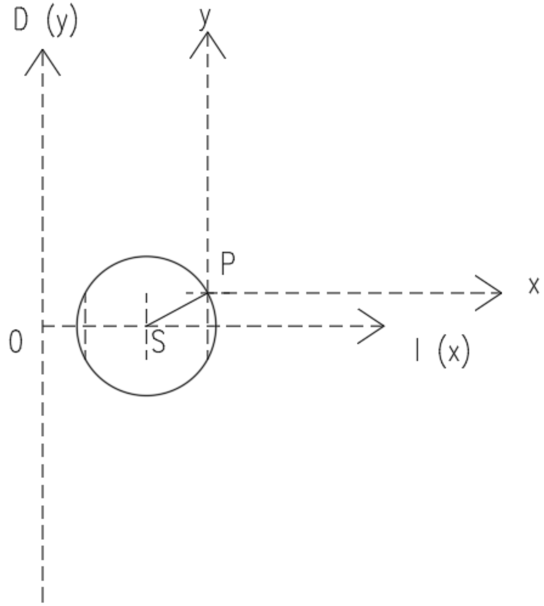


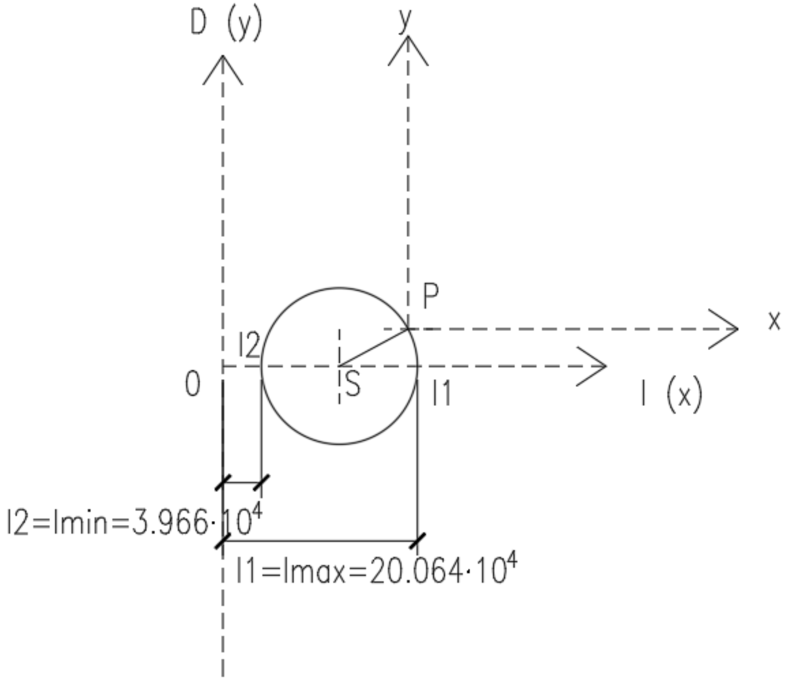
- Určíme bod P jako pól P=[Ix; -Dxy], tzn. záporné hodnoty deviačních momentů vyneseme nahoru



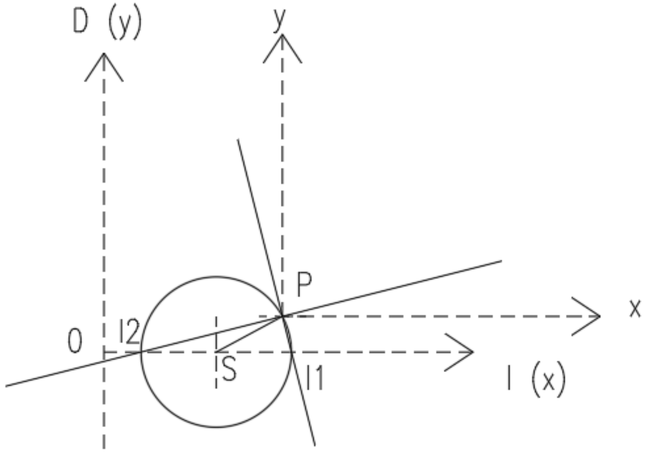
- Najdeme polohu středu **Mohrovy** kružnice, S=[(Ix+Iy)/2; 0]

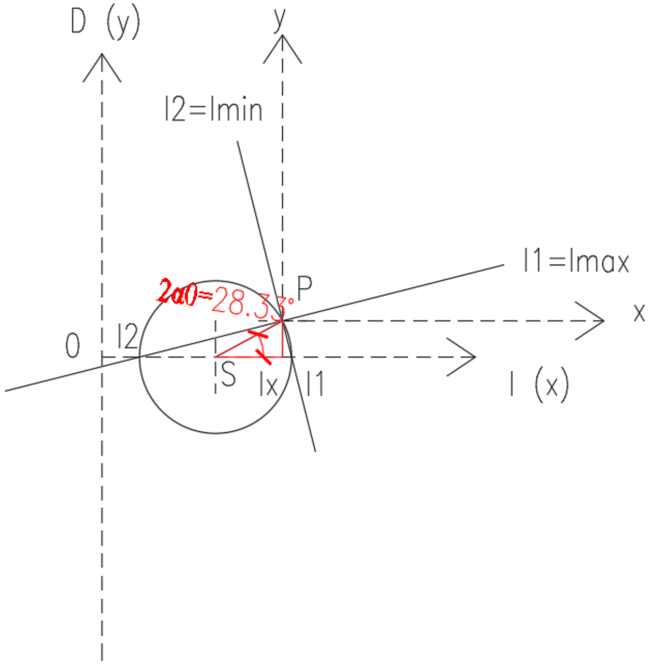
- Sestrojíme Mohrovou kružnici o poloměru $|SP|$





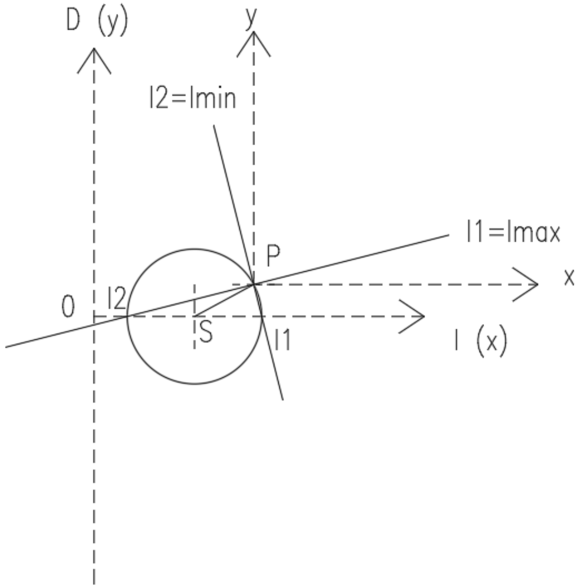
- Kde Mohrova kružnice protne osu kvadratických momentů, nalezneme hodnotu I1=Imax a I2=Imin





- Jedna osa prochází bodem I2=Imin a P, druhá osa prochází bodem I1=Imax a P

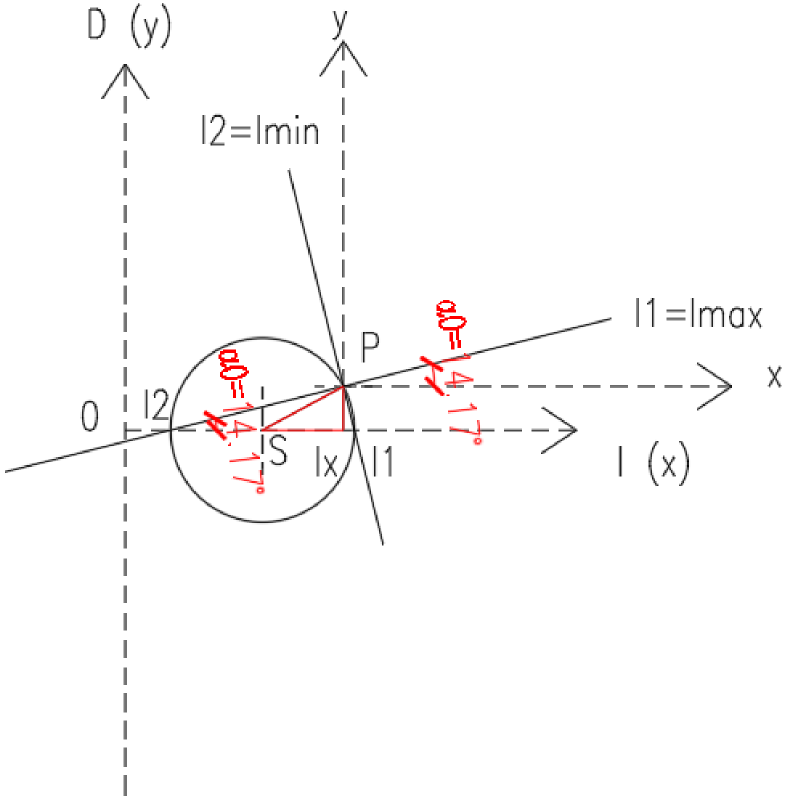
- Podle hodnoty deviačního momentu určíme kterým kvadrantem prochází I1=Imax a kterým I2=Imin

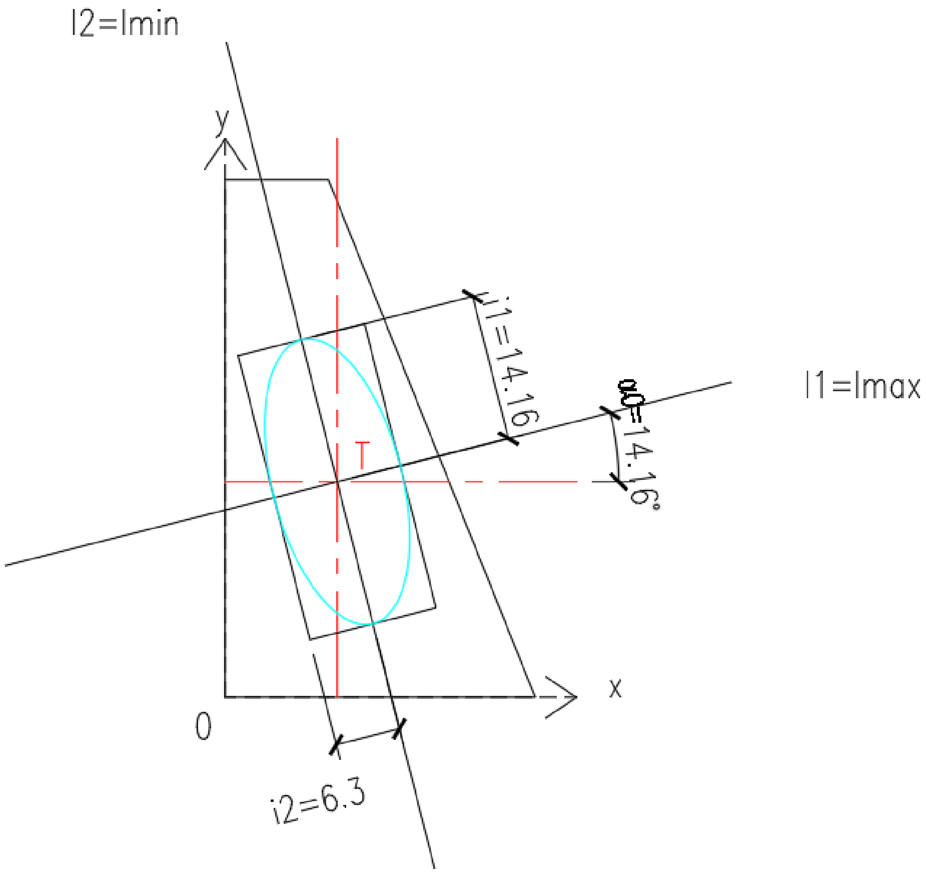


- Hledaný úhel 2α0 najdeme z pravoúhlého trojúhelníku PSIx

- Pak nalezneme velikost úhlu o který se osy pootočí α0

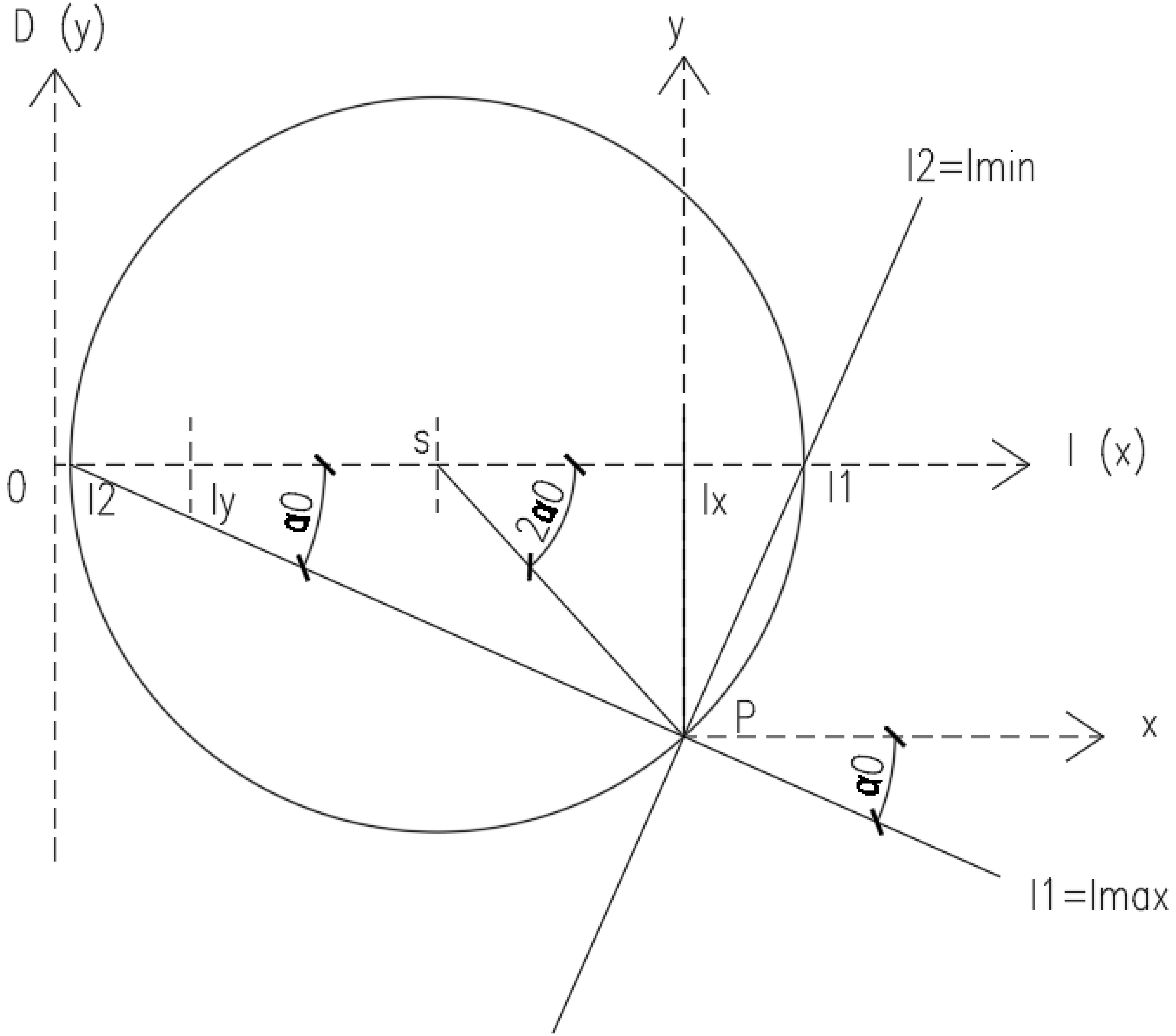
- Z naměřených hodnot dopočítáme poloměry setrvačnosti i1, i2 a vykreslíme elipsu setrvačnosti





Příklad 2

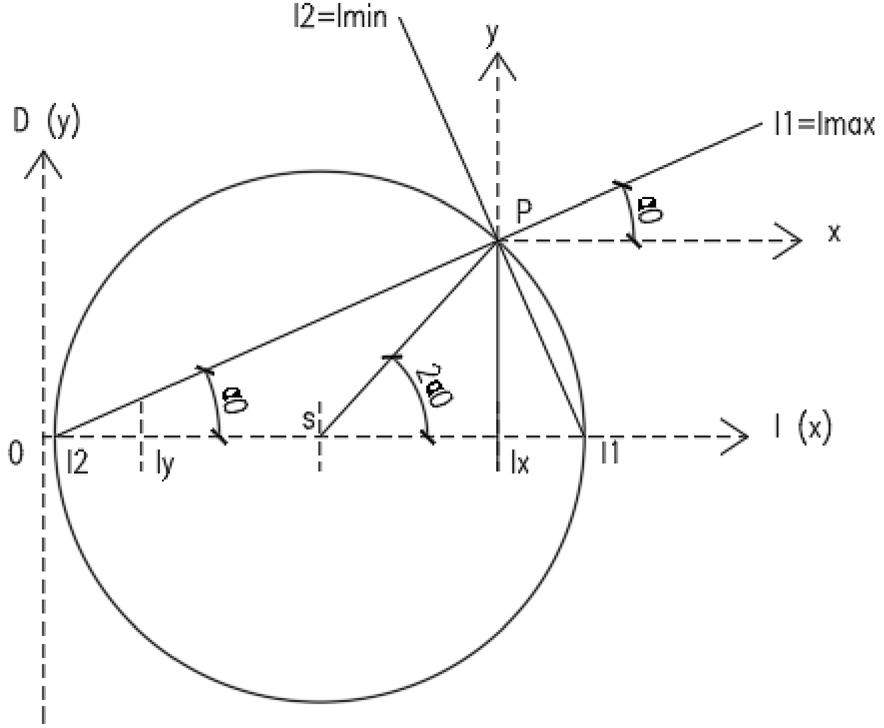
- Zkuste sami grafickou metodou sestrojit Mohrovou kružnici a odměřit úhel $\alpha 0$, když víte že: $I_x > I_y$ a $D_{xy} = +$



D (y)
y
I2=Imin
S
I (x)
0
I2
Iy
α0
2α0
Ix
I1
P
x
α0
I1=Imax

Příklad 3

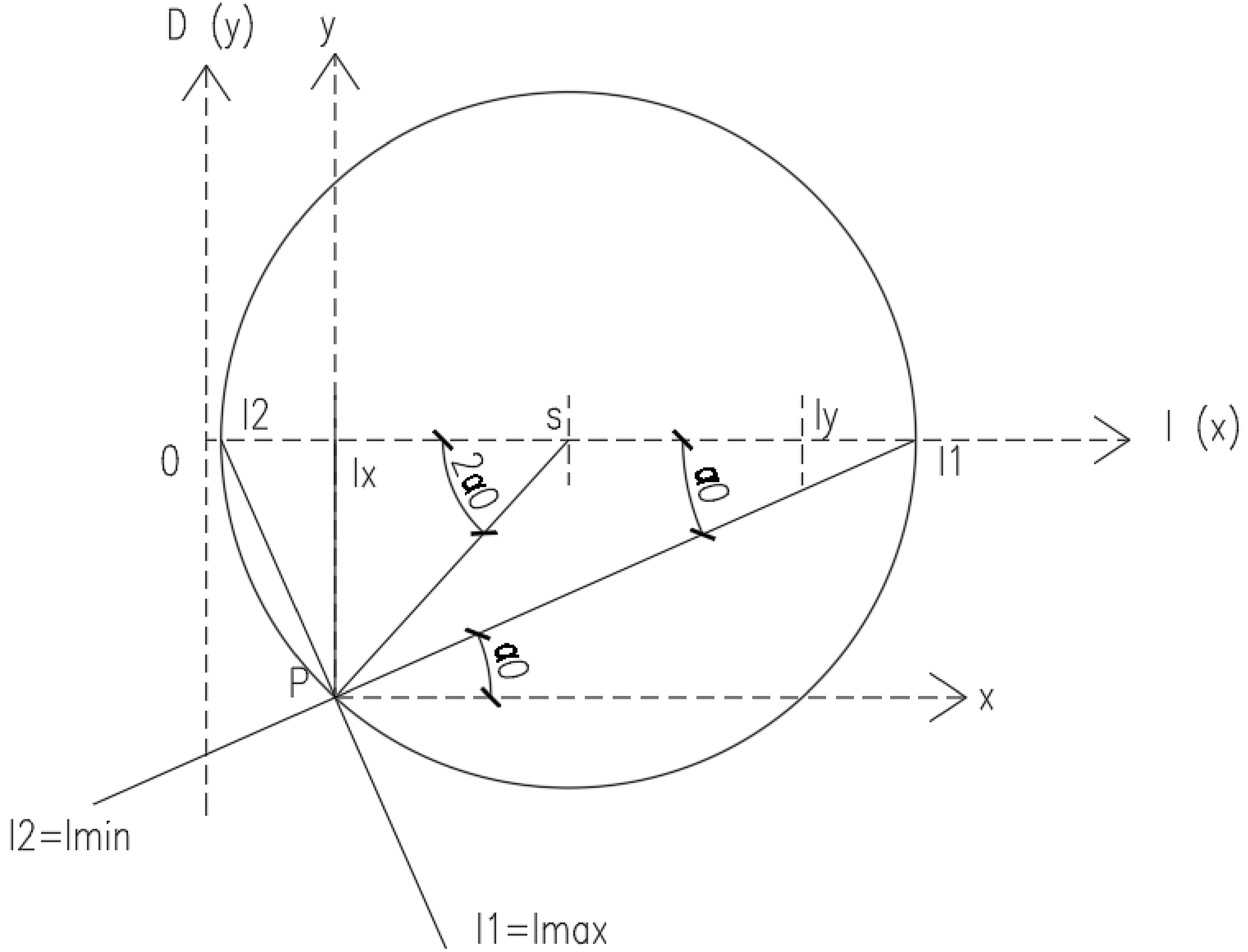
- Zkuste sami grafickou metodou sestrojit Mohrovou kružnici a odměřit úhel α_0, když víte že: $I_x > I_y$ a $D_{xy} = -$



I2=Imin
y
D (y)
I1=Imax
P
x
2α0
α0
α0
S
I (x)
0
I2
Iy
Ix
I1

Příklad 4

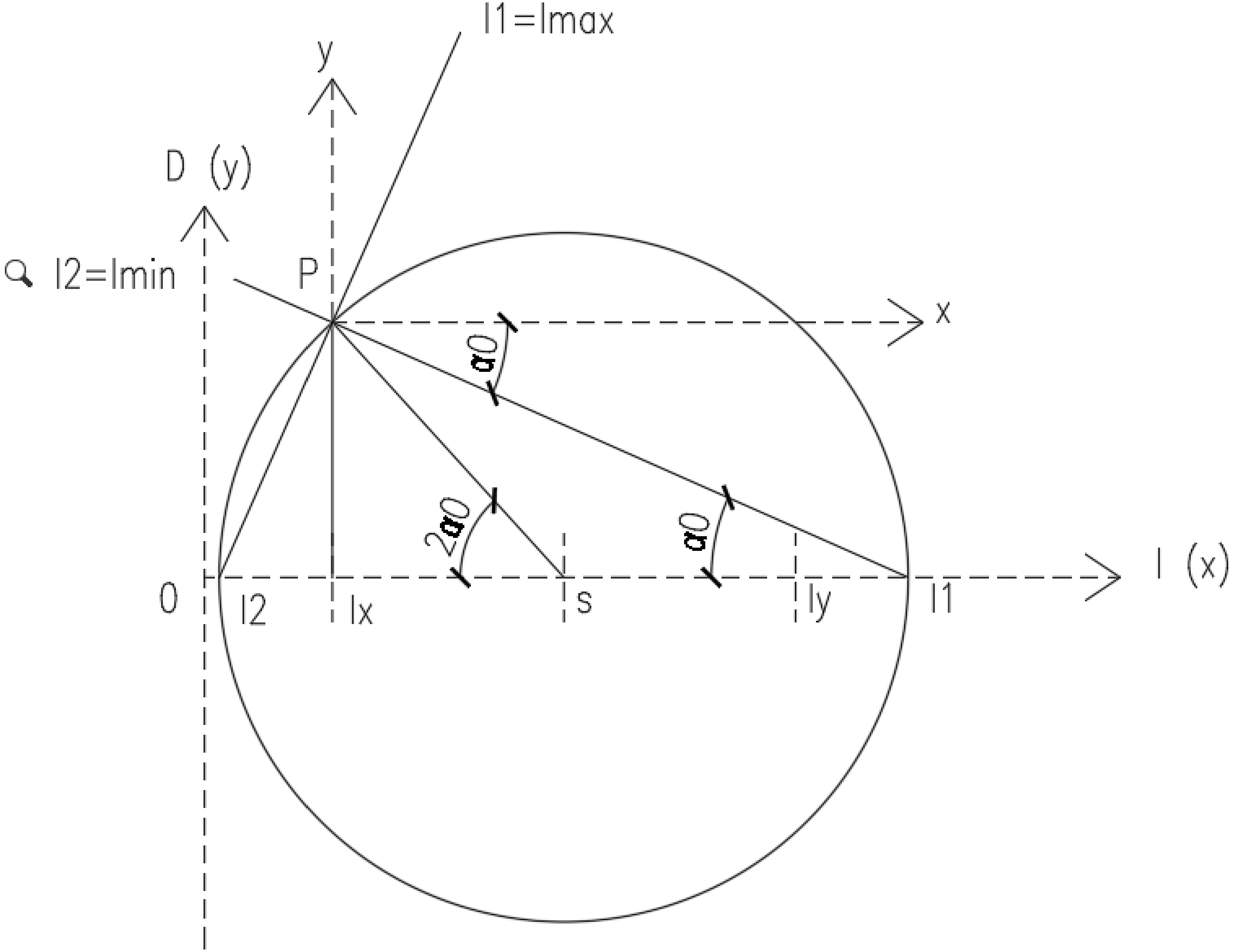
- Zkuste sami grafickou metodou sestrojit Mohrovou kružnici a odměřit úhel $\alpha 0$, když víte že: $Ix<Iy$ a $Dxy=+$



D (y)
y
I2
s
Iy
I (x)
0
Ix
2α0
α0
I1
α0
P
x
I2=Imin
I1=Imax

Příklad 5

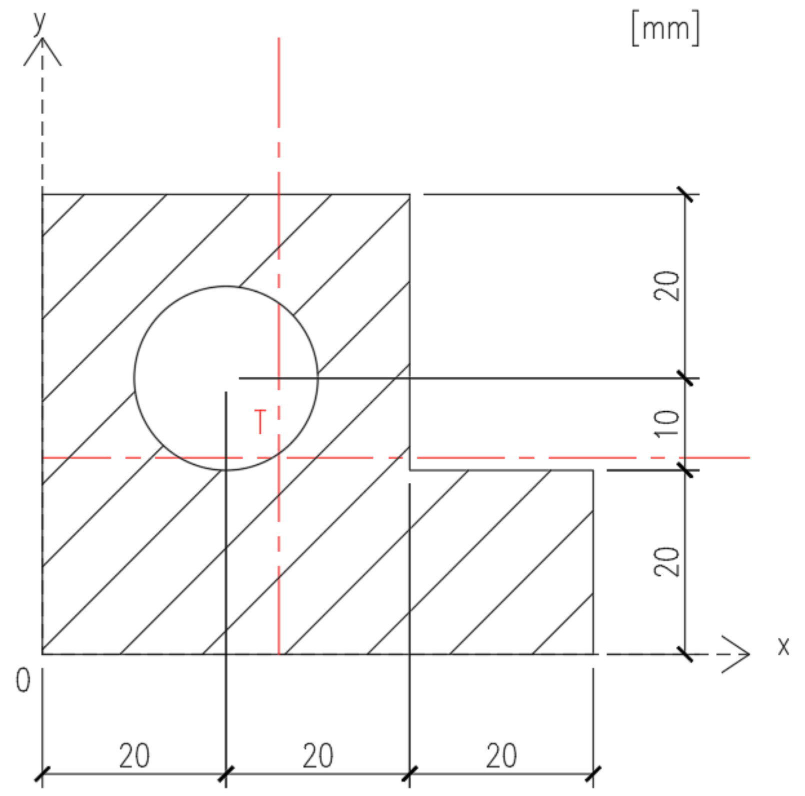
- Zkuste sami grafickou metodou sestrojit Mohrovou kružnici a odměřit úhel α_0, když víte že: $I_x < I_y$ a $D_{xy} = -$



I1=Imax
y
D (y)
I2=Imin
P
x
α0
2α0
α0
I (x)
0
I2
Ix
s
Iy
I1

Příklad 6

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znova pečlivě projděte předchozí příklad, než budete pokračovat dále
- Příklad zkuste vyřešit početní i grafickou metodou



Celkový obrazec
T=[25,753; 21,37]
A=2085,841 mm^2
$I_x=4,768\cdot10^5$ mm^4
$I_y=5,631\cdot10^5$ mm^4
$D_{xy}=-1,364\cdot10^5$ mm^4

- Početně
- Úhel natočení α0

$$\alpha 0 = 53{,}77°$$

- Hlavní kvadratické momenty

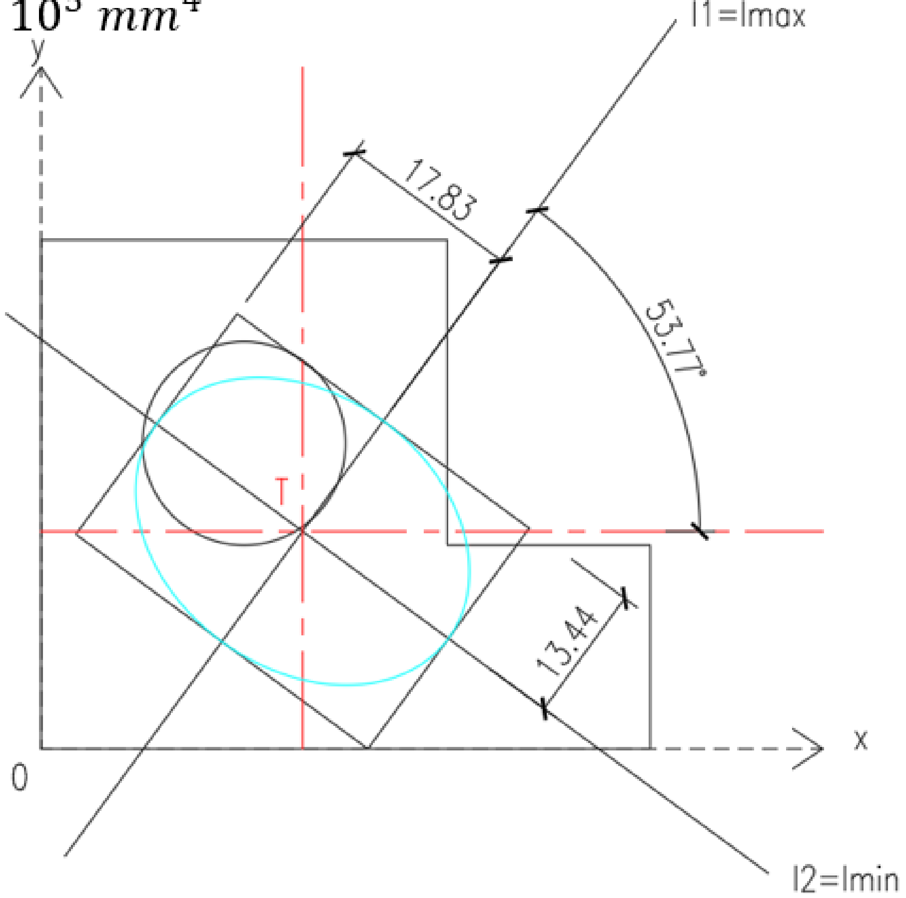
$$I1 = Imax = 6{,}6301 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$I2 = Imin = 3{,}7689 \cdot 10^5\ mm^4$$

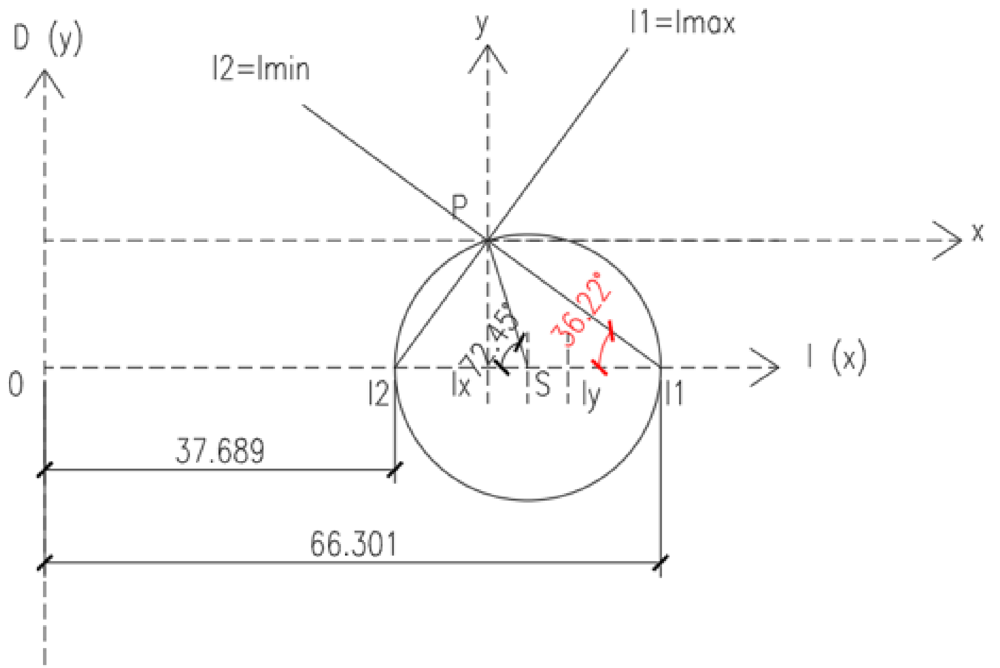
- Poloměry setrvačnosti

$$i1 = 17{,}83\ mm$$

$$i2 = 13{,}44\ mm$$

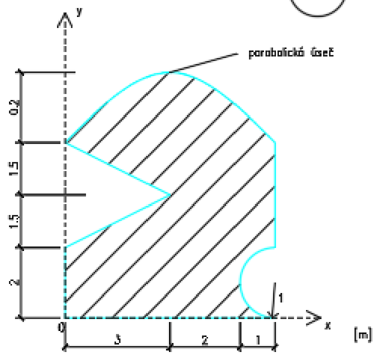


- Graficky

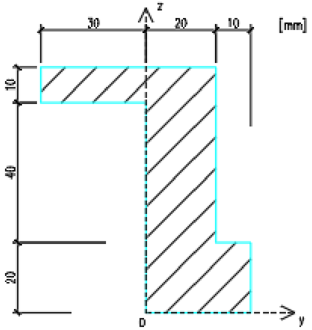


Následující příklady na procvičení jsou bez výsledků. Zkuste příklady vyřešit sami a případnou kontrolu proveďte porovnáním s ostatními kolegy. Všechny zkuste vyřešit jak početní tak grafickou metodou.

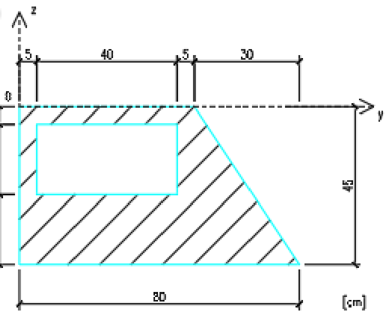
P167



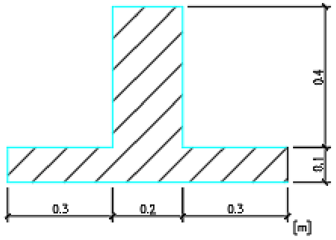
P52



P53



C3P4



P53a