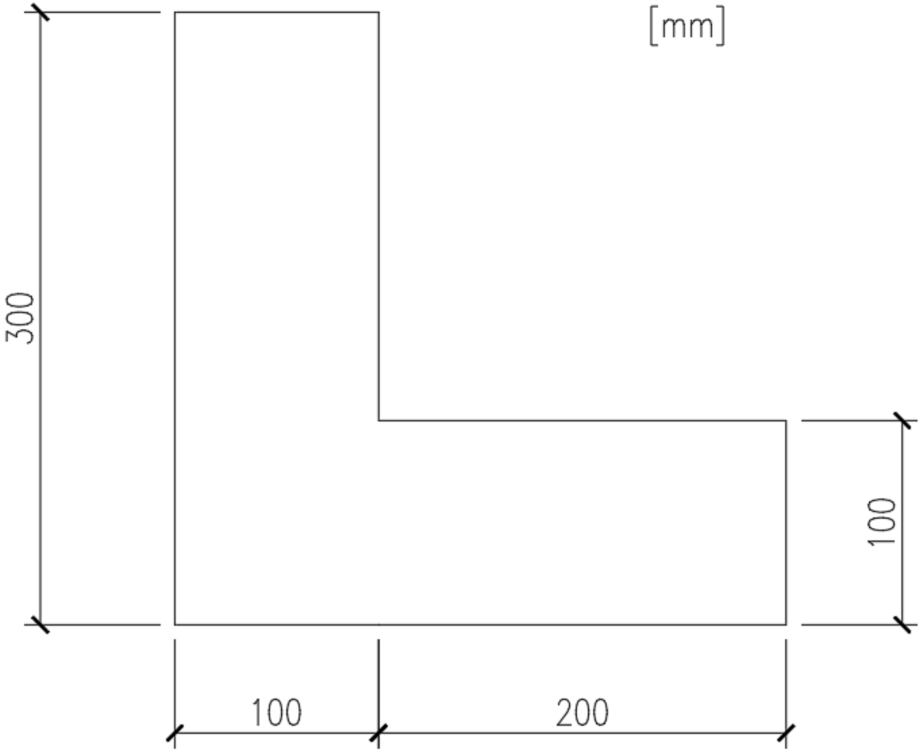
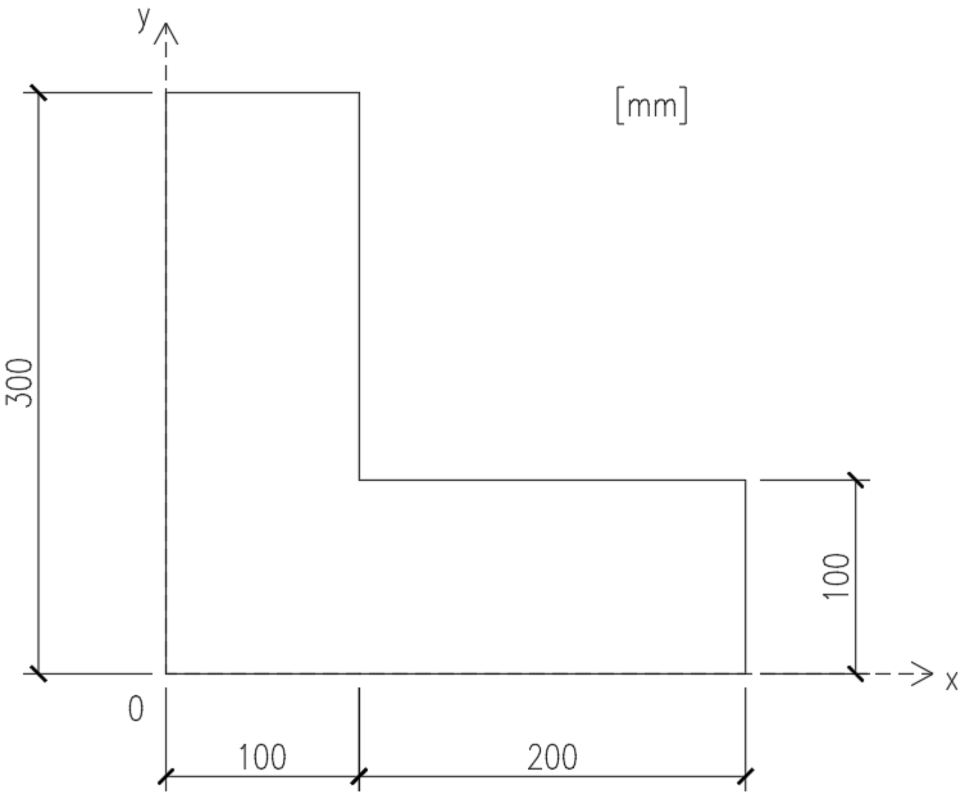
Cvičení 16

Těžiště, kvadratické a deviační momenty rovinných složených obrazců, aplikace Steinerovy věty.

Příklad 1

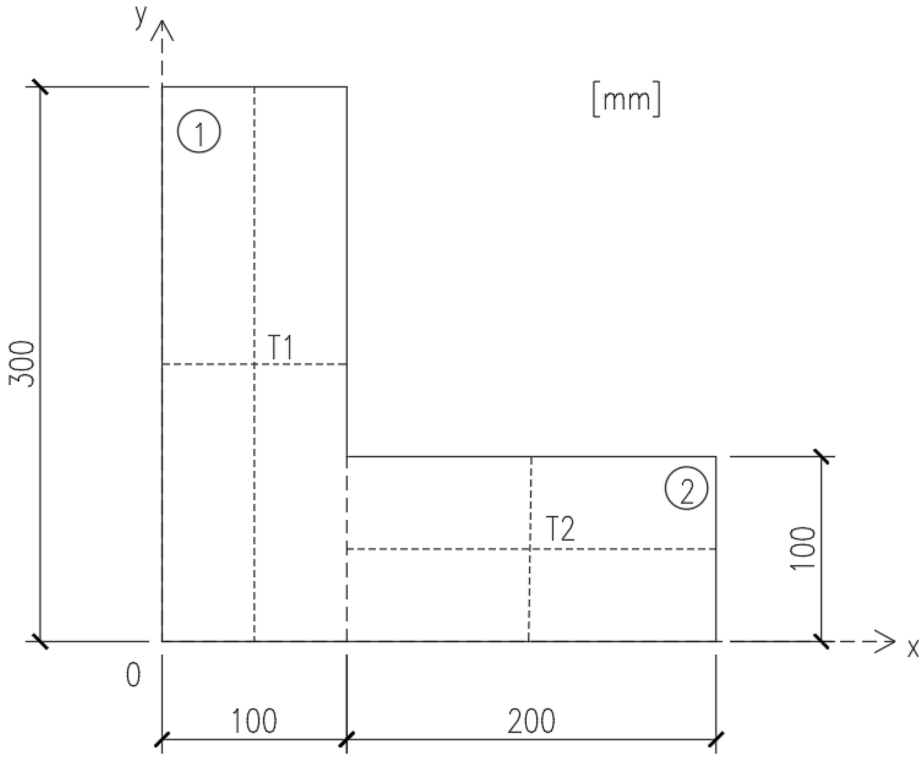


- Pokud na rovinném obrazci nejsou určeny osy, **zvolíme** si jejich **polohu**, **orientaci**, **natočení**
- Např.:



- Obrazec vhodně rozdělíme na jednotlivé části pro každou z nich určíme jeho **plochu** a **polohu těžiště** ke zvoleným osám x a y

Např.:



- Plocha A1 a poloha těžiště T1 vzhledem k počátku zvolených os x a y:

$$A1 = 100 \cdot 300 = 3 \cdot 10^4\ mm^2$$

$$y1 = 150\ mm$$

$$x1 = 50\ mm$$

- Plocha A2 a poloha těžiště T2 vzhledem k počátku zvolených os x a y:

$$A2 = 200 \cdot 100 = 2 \cdot 10^4\ mm^2$$

$$y2 = 50\ mm$$

$$x2 = 200\ mm$$

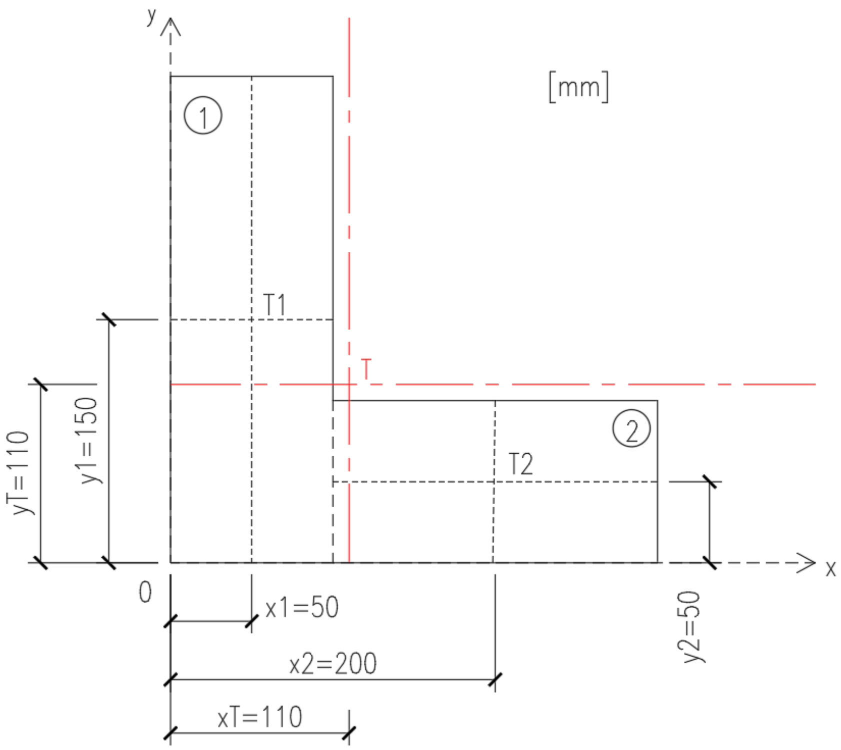
- Celková plocha A a poloha těžiště T celého obrazce vzhledem k počátku zvolených os x a y:

$$A = A1 + A2 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^4 mm^2$$

$$yT = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 150 + 2 \cdot 10^4 \cdot 50}{5 \cdot 10^4} = 110\ mm$$

$$xT = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 50 + 2 \cdot 10^4 \cdot 200}{5 \cdot 10^4} = 110\ mm$$

- Pozn.: pokud je v obrazci některá část **otvorem** nebo **výřezem**, musí se tato část pro celkovou plochu odečíst



- **Kvadratický moment** Ix nebo Iy rovinného obrazce spočítáme tak, že spočítáme kvadratické momenty jednotlivých částí a ty pak spolu sesumírujeme

- pokud je v obrazci některá část otvorem nebo výřezem, musí se tato část pro celkový kvadratický moment odečíst

- pokud není těžišťová osa části shodná s těžišťovou osou celého obrazce, musí být výpočet rozšířen o Steinerovu větu

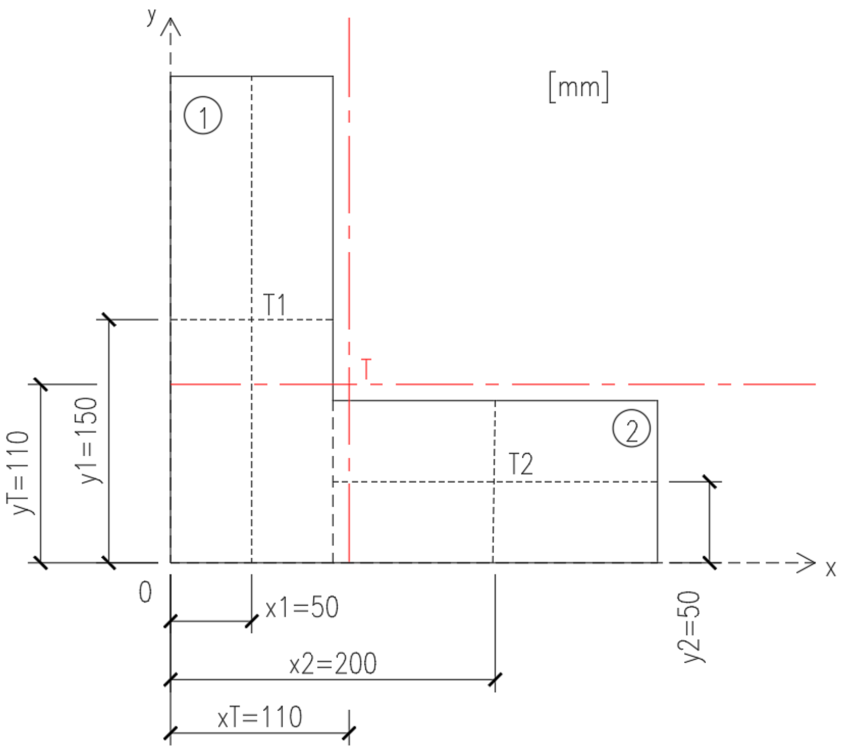
- Kvadratické momenty Ix1 a Iy1

$$Ix1 = kvadratický\ moment\ rovinného\ obrazce + Steinerova\ věta = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + A1 \cdot (y1 - yT)^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 300^3 + 3 \cdot 10^4 \cdot (150 - 110)^2 = 273 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$Iy2 = kvadratický\ moment\ rovinného\ obrazce + Steinerova\ věta = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 + A1 \cdot (x1 - xT)^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 100^3 + 3 \cdot 10^4 \cdot (50 - 110)^2 = 133 \cdot 10^6\ mm^4$$



- Obdobně kvadratické momenty Ix2 a Iy2

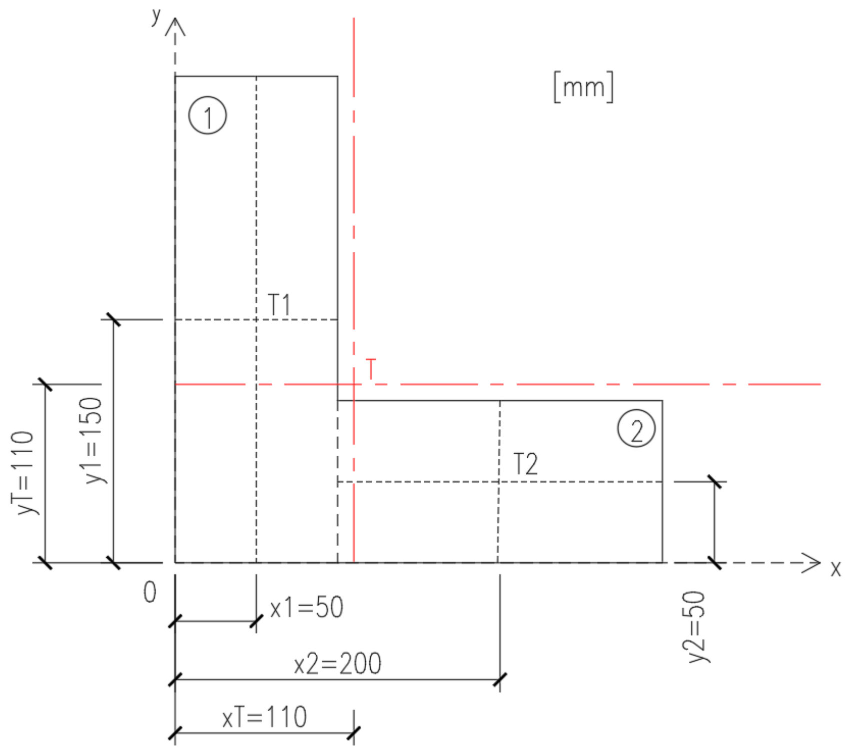
$$Ix2 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + A2 \cdot (y2 - yT)^2$$
$$= \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 100^3 + 2 \cdot 10^4 \cdot (50 - 110)^2 = 88{,}67 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$Iy2 = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 + A2 \cdot (x2 - xT)^2$$
$$= \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200^3 + 2 \cdot 10^4 \cdot (200 - 110)^2 = 228{,}67 \cdot 10^6\ mm^4$$

- Kvadratický moment celkového obrazce Ix a Iy

$$Ix = Ix1 + Ix2 = 273 \cdot 10^6 + 88{,}67 \cdot 10^6 = 361{,}67 \cdot 10^6 mm^4$$

$$Iy = Iy1 + Iy2 = 133 \cdot 10^6 + 228{,}67 \cdot 10^6 = 361{,}67 \cdot 10^6 mm^4$$



- **Deviační moment** Dxy rovinného obrazce spočítáme tak, že spočítáme deviační momenty jednotlivých částí a ty pak spolu sesumírujeme
- pokud je v obrazci některá část otvorem nebo výřezem, musí se tato část pro celkový kvadratický moment odečíst
- pokud není těžišťová osa části shodná s těžišťovou osou celého obrazce, musí být výpočet rozšířen o Steinerovu větu
- Pokud je obrazec **symetrický** alespoň s jednou z těžišťových os je deviační moment obrazce **0**
- Deviační moment D1xy

$$D1xy = deviační\ moment\ rovinného\ obrazce + Steinerova\ věta = 0 + A1 \cdot (x1 - xT) \cdot (y1 - yT)$$
$$= 0 + 3 \cdot 10^4 \cdot (50 - 110) \cdot (150 - 110) = -72 \cdot 10^6\ mm^4$$

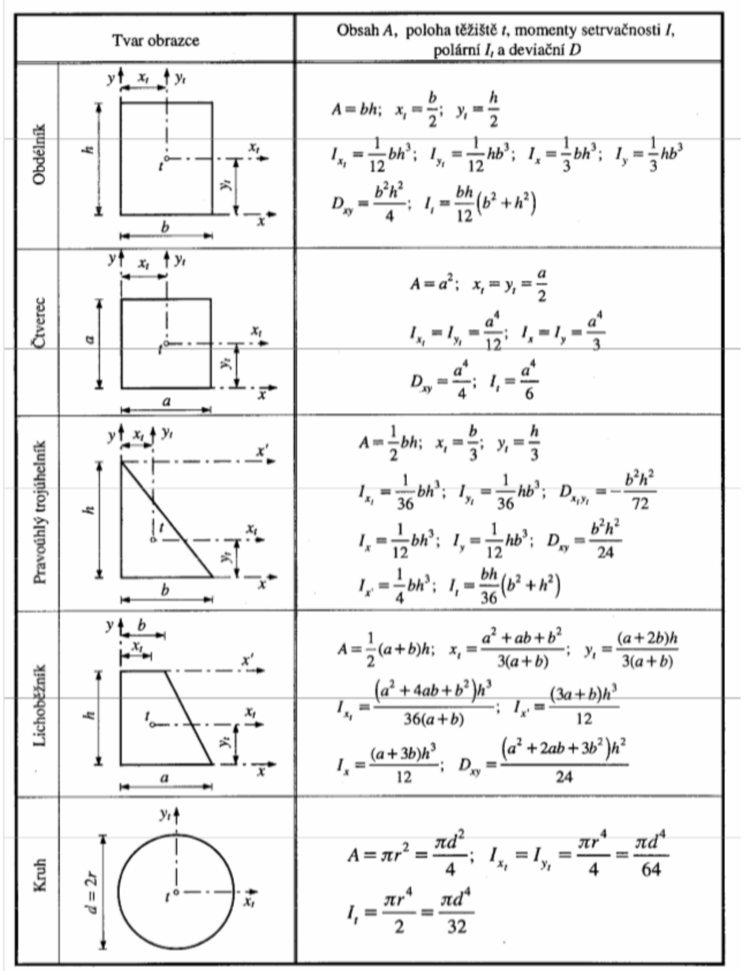
- Deviační moment D2xy

$$D2xy = deviační\ moment\ rovinného\ obrazce + Steinerova\ věta = 0 + A2 \cdot (x2 - xT) \cdot (y2 - yT)$$
$$= 0 + 2 \cdot 10^4 \cdot (200 - 110) \cdot (50 - 110) = -108 \cdot 10^6\ mm^4$$

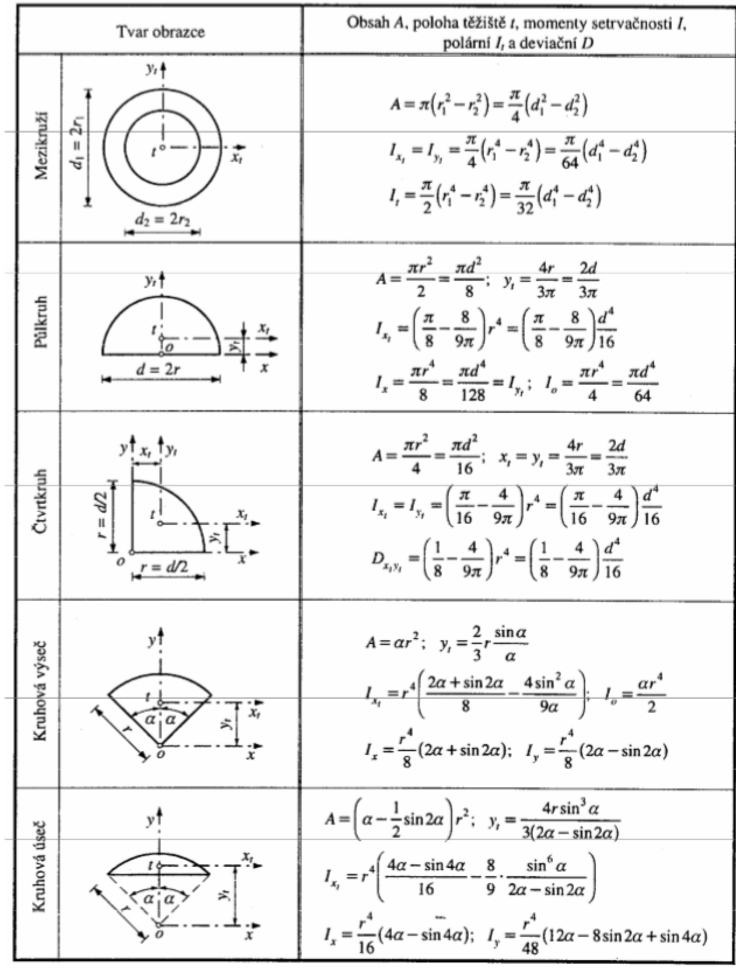
- Deviační moment celkového obrazce Dxy: $Dxy = D1xy + D2xy = -72 \cdot 10^6 - 108 \cdot 10^6 = -180 \cdot 10^6\ mm^4$

- **Polární moment setrvačnosti** I0 se vypočte jako součet kvadratických momentů rovinného obrazce od jednotlivých os

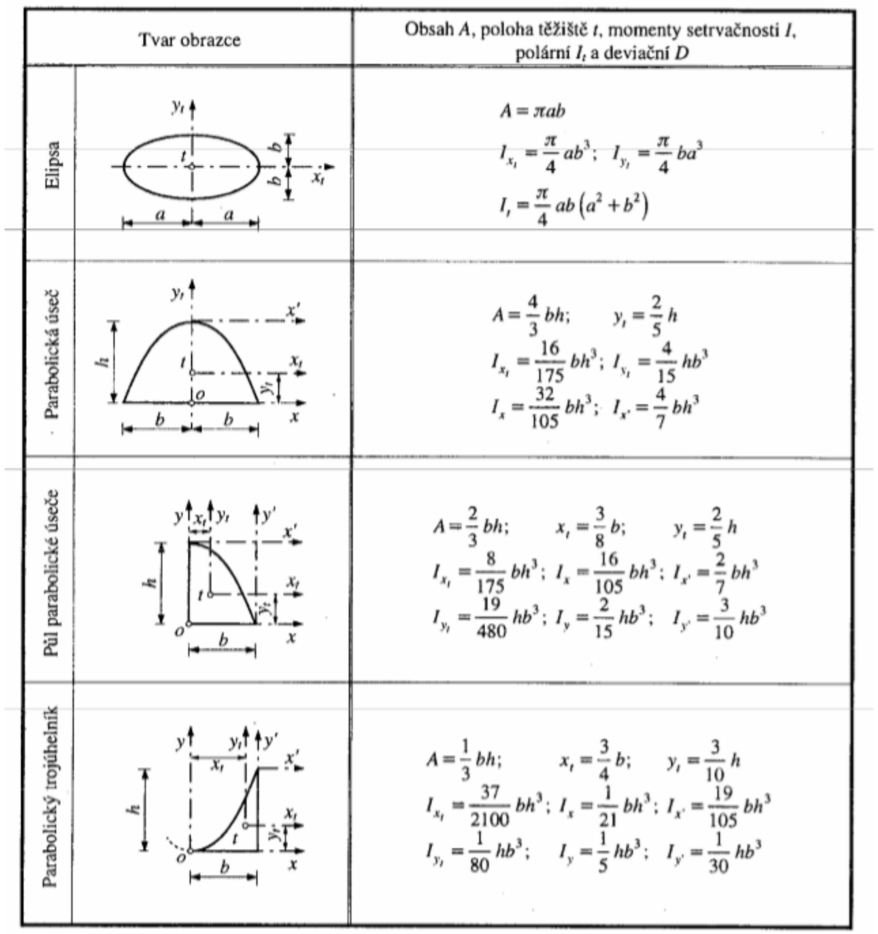
$$I0 = Ix + Iy = 361{,}67 \cdot 10^6 + 361{,}67 \cdot 10^6 = 723{,}34 \cdot 10^6\ mm^4$$



Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Obdélník	$A = bh;\ x_t = \frac{b}{2};\ y_t = \frac{h}{2}$ $I_{x_t} = \frac{1}{12}bh^3;\ I_{y_t} = \frac{1}{12}hb^3;\ I_x = \frac{1}{3}bh^3;\ I_y = \frac{1}{3}hb^3$ $D_{xy} = \frac{b^2h^2}{4};\ I_t = \frac{bh}{12}\left(b^2+h^2\right)$
Čtverec	$A = a^2;\ x_t = y_t = \frac{a}{2}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{a^4}{12};\ I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$ $D_{xy} = \frac{a^4}{4};\ I_t = \frac{a^4}{6}$
Pravoúhlý trojúhelník	$A = \frac{1}{2}bh;\ x_t = \frac{b}{3};\ y_t = \frac{h}{3}$ $I_{x_t} = \frac{1}{36}bh^3;\ I_{y_t} = \frac{1}{36}hb^3;\ D_{x_ty_t} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3;\ I_y = \frac{1}{12}hb^3;\ D_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$ $I_{x'} = \frac{1}{4}bh^3;\ I_t = \frac{bh}{36}\left(b^2+h^2\right)$
Lichoběžník	$A = \frac{1}{2}(a+b)h;\ x_t = \frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)};\ y_t = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$ $I_{x_t} = \frac{\left(a^2+4ab+b^2\right)h^3}{36(a+b)};\ I_{x'} = \frac{(3a+b)h^3}{12}$ $I_x = \frac{(a+3b)h^3}{12};\ D_{xy} = \frac{\left(a^2+2ab+3b^2\right)h^2}{24}$
Kruh	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4};\ I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$



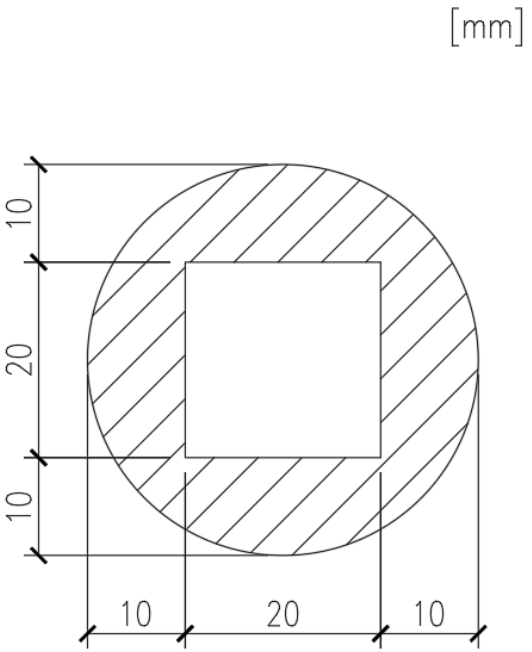
Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Mezikruží	$A = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right)$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \frac{\pi}{4}\left(r_1^4 - r_2^4\right) = \frac{\pi}{64}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$ $I_t = \frac{\pi}{2}\left(r_1^4 - r_2^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_1^4 - d_2^4\right)$
Půlkruh	$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8};\ y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} = I_{y_t};\ I_o = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$
Čtvrtkruh	$A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16};\ x_t = y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ $I_{x_t} = I_{y_t} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$ $D_{x_ty_t} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)\frac{d^4}{16}$
Kruhová výseč	$A = \alpha r^2;\ y_t = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $I_{x_t} = r^4\left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8} - \frac{4\sin^2\alpha}{9\alpha}\right);\ I_o = \frac{\alpha r^4}{2}$ $I_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha);\ I_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha)$
Kruhová úseč	$A = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)r^2;\ y_t = \frac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $I_{x_t} = r^4\left(\frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{16} - \frac{8}{9}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$ $I_x = \frac{r^4}{16}(4\alpha - \sin 4\alpha);\ I_y = \frac{r^4}{48}(12\alpha - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)$



Tvar obrazce	Obsah A, poloha těžiště t, momenty setrvačnosti I, polární I_t a deviační D
Elipsa	$A = \pi ab$ $I_{x_t} = \frac{\pi}{4}ab^3;\ I_{y_t} = \frac{\pi}{4}ba^3$ $I_t = \frac{\pi}{4}ab\left(a^2+b^2\right)$
Parabolická úseč	$A = \frac{4}{3}bh;\quad y_t = \frac{2}{5}h$ $I_{x_t} = \frac{16}{175}bh^3;\ I_{y_t} = \frac{4}{15}hb^3$ $I_x = \frac{32}{105}bh^3;\ I_{x'} = \frac{4}{7}bh^3$
Půl parabolické úseče	$A = \frac{2}{3}bh;\quad x_t = \frac{3}{8}b;\quad y_t = \frac{2}{5}h$ $I_{x_t} = \frac{8}{175}bh^3;\ I_x = \frac{16}{105}bh^3;\ I_{x'} = \frac{2}{7}bh^3$ $I_{y_t} = \frac{19}{480}hb^3;\ I_y = \frac{2}{15}hb^3;\ I_{y'} = \frac{3}{10}hb^3$
Parabolický trojúhelník	$A = \frac{1}{3}bh;\quad x_t = \frac{3}{4}b;\quad y_t = \frac{3}{10}h$ $I_{x_t} = \frac{37}{2100}bh^3;\ I_x = \frac{1}{21}bh^3;\ I_{x'} = \frac{19}{105}bh^3$ $I_{y_t} = \frac{1}{80}hb^3;\ I_y = \frac{1}{5}hb^3;\ I_{y'} = \frac{1}{30}hb^3$

Geometrické charakteristiky rovinných obrazců, zdroj: *BD01-Zaklady stavebni mechaniky M02-Prurezove charakteristiky*, doc. Ing. Jiří Kytýr, CSc., prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Ing. Rostislav Zídek, Ph.D., Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.

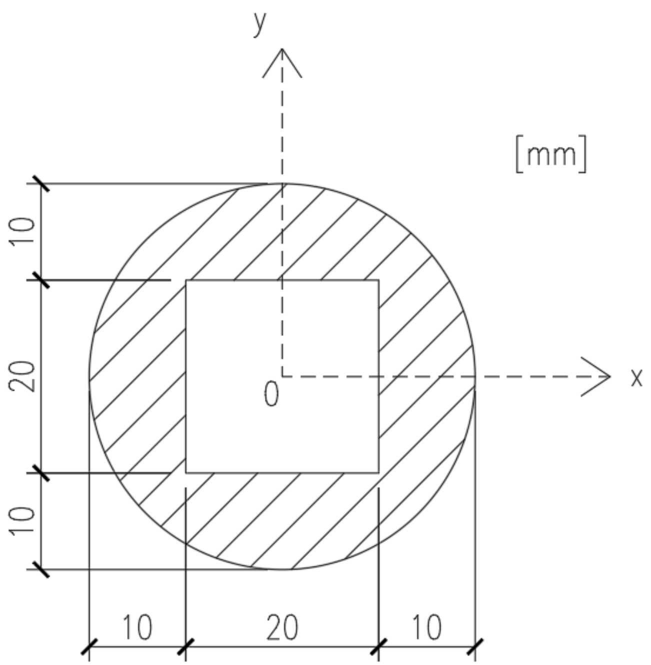
Příklad 2

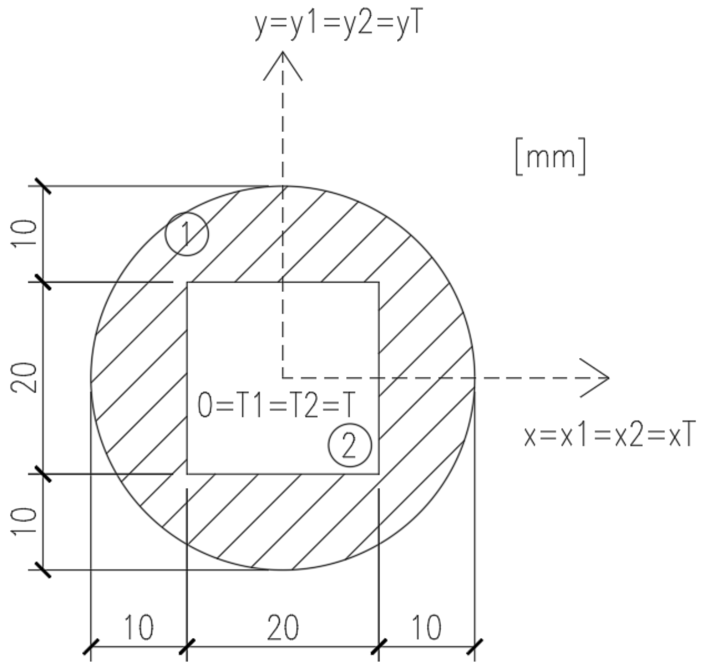


- Pokud na rovinném obrazci nejsou určeny osy, **zvolíme** si jejich **polohu**, **orientaci**, **natočení**

- V tomhle případě je výhodné si polohu os volit tak, abychom do výpočtu nemuseli zahrnovat Steinerovu větu – úloha není tak náročná výpočet

- Polohu os volíme tedy tak, aby vznikla symetrie obrazce podle os
- Čím více bude obrazec symetričtější, tím méně budu potřeba do výpočtu zahrnovat Steinerovu větu





- Pro výpočet průřezových charakteristik použijeme tabulky z předchozího příkladu (u zkoušky bude potřeba umět si pamatovat průřezové charakteristiky základních rovinných obrazců jako je např. obdélník, kruh,…)

- Plocha A1 a poloha těžiště T1 vzhledem k počátku zvolených os x a y:

$$A1 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 20^2 = 1{,}26 \cdot 10^3\ mm^2$$

$$y1 = 0\ mm$$

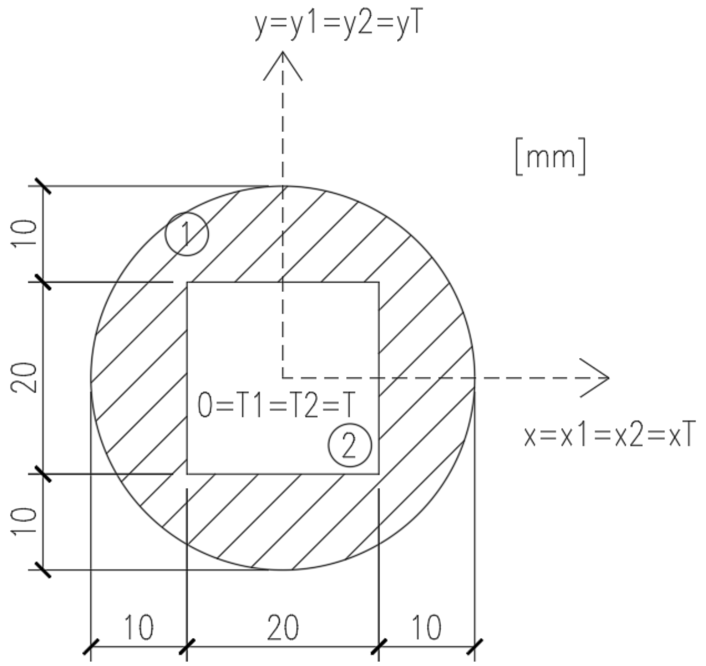
$$x1 = 0\ mm$$

- Plocha A2 a poloha těžiště T2 vzhledem k počátku zvolených os x a y:

$$A2 = 20 \cdot 20 = 4 \cdot 10^3\ mm^2$$

$$y2 = 0\ mm$$

$$x2 = 0\ mm$$



- Celková plocha A a poloha těžiště T celého obrazce vzhledem k počátku zvolených os x a y:
- Protože plocha A2 je v obrazci **otvorem**, musíme ji z celkového obrazce **odečíst**

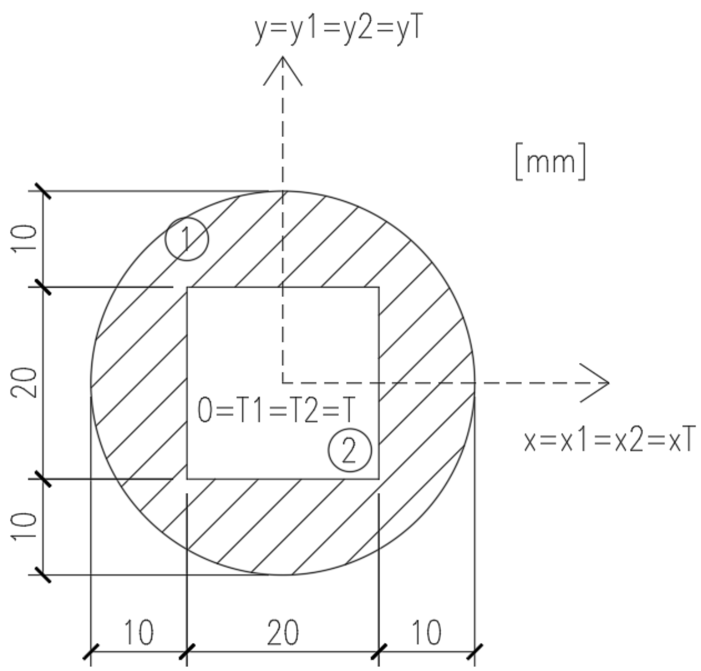
$$A = A1 - A2 = 1{,}26 \cdot 10^3 - 0{,}4 \cdot 10^3 = 0{,}86 \cdot 10^3 mm^2$$

$$yT = 0\ mm$$

$$xT = 0\ mm$$

- **Kvadratický moment** Ix nebo Iy rovinného obrazce spočítáme tak, že spočítáme kvadratické momenty jednotlivých částí a ty pak spolu sesumírujeme
- Kvadratické momenty Ix1 a Iy1
- Protože jsou obě části obrazce symetrické (obrazec je **dvouose symetrický**), budou shodné i jeho kvadratické momenty

$$Ix1 = Iy1 = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = 1{,}26 \cdot 10^5\ mm^4$$



- Kvadratické momenty Ix2 a Iy2

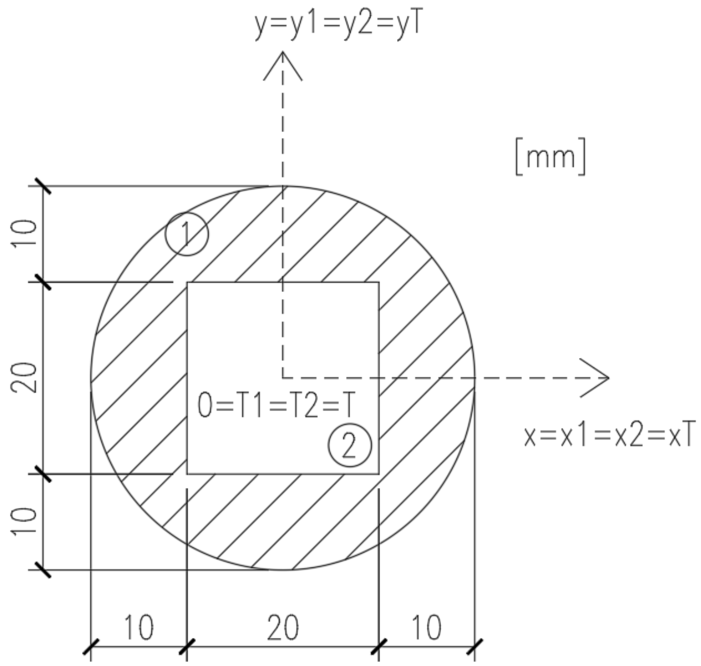
- Protože jsou obě části obrazce symetrické (obrazec je **dvouose symetrický**), budou shodné i jeho kvadratické momenty

$$Ix2 = Iy2 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{20^4}{12} = 0{,}13 \cdot 10^5\ mm^4$$

- Kvadratický moment celkového obrazce Ix a Iy

- Kvadratický moment Ix2 a Iy2 je v obrazci **otvorem**, musíme jej teda z celkového obrazce **odečíst**

$$Ix = Iy = 1{,}26 \cdot 10^5 - 0{,}13 \cdot 10^5 = 1{,}13 \cdot 10^5\ mm^4$$



- **Deviační moment** Dxy rovinného obrazce spočítáme tak, že spočítáme deviační momenty jednotlivých částí a ty pak spolu sesumírujeme

- Deviační moment D1xy

$$D1xy = 0\, mm^4$$

- Deviační moment D2xy

$$D2xy = 0\, mm^4$$

- Deviační moment celkového obrazce Dxy:

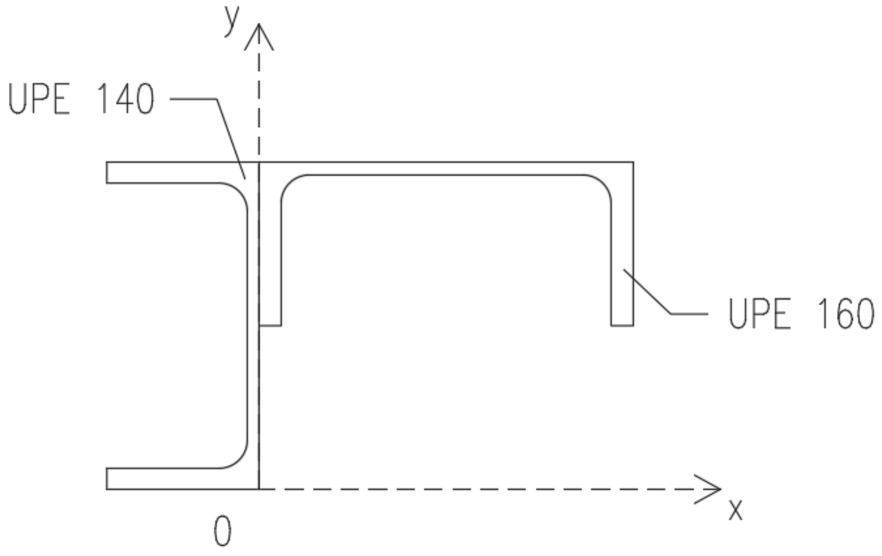
$$Dxy = 0\, mm^4$$

- **Polární moment setrvačnosti** I0 se vypočte jako součet kvadratických momentů rovinného obrazce od jednotlivých os

$$I0 = Ix + Iy = 2 \cdot 1{,}13 \cdot 10^5 = 2{,}26 \cdot 10^5\, mm^4$$

Příklad 3

- V tomto případě je určena poloha, orientace a natočení os



UPE 140
$T1=[-16.7;\ 70]$
$A1=1560\ mm^2$
$Ix1,T=491\cdot10^4\ mm^4$
$Iy1,T=45{,}4\cdot10^4\ mm^4$

UPE 160
$T2=[80;\ 122]$
$A2=1810\ mm^2$
$Ix2,T=63{,}3\cdot10^4\ mm^4$
$Iy2,T=747\cdot10^4\ mm^4$

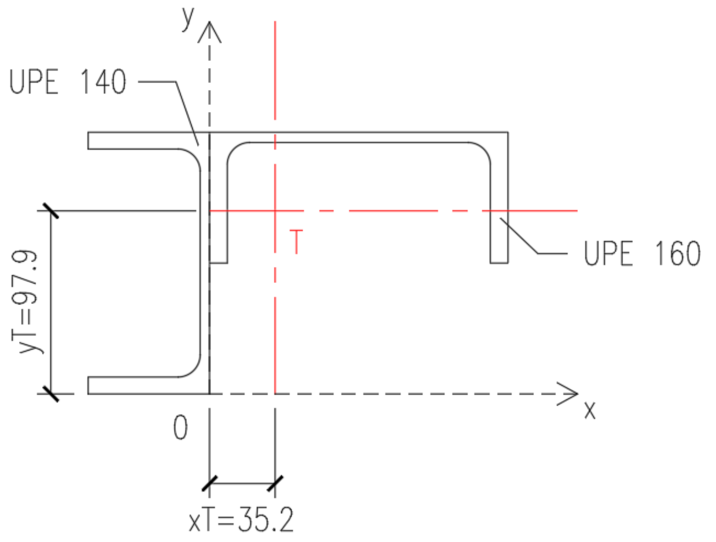
- Výpočet tedy vztahujeme k těmto osám

- Celková plocha A a poloha těžiště T celého obrazce vzhledem k osám x a y:

$$A = A1 + A2 = 1560 + 1810 = 3370\ mm^2$$

$$yT = \frac{1560 \cdot 70 + 1810 \cdot 122}{3370} = 97{,}9\ mm$$

$$xT = \frac{1560 \cdot (-16{,}7) + 1810 \cdot 80}{3370} = 35{,}2\ mm$$



UPE 140
T1=[−16.7; 70]
A1=1560 mm²
Ix1,T=491·10⁴ mm⁴
Iy1,T=45,4·10⁴ mm⁴

UPE 160
T2=[80; 122]
A2=1810 mm²
Ix2,T=63,3·10⁴ mm⁴
Iy2,T=747·10⁴ mm⁴

- Kvadratické momenty Ix1 a Iy1

$$Ix1 = Ix1,T + A1 \cdot (y1 - yT)^2$$
$$= 491 \cdot 10^4 + 1560 \cdot (70 - 97{,}9)^2 = 6{,}12 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$Iy1 = Iy1,T + A1 \cdot (x1 - xT)^2$$
$$= 45{,}4 \cdot 10^4 + 1560 \cdot (-16{,}7 - 35{,}2)^2$$
$$= 4{,}66 \cdot 10^6\ mm^4$$

- Kvadratické momenty Ix2 a Iy2

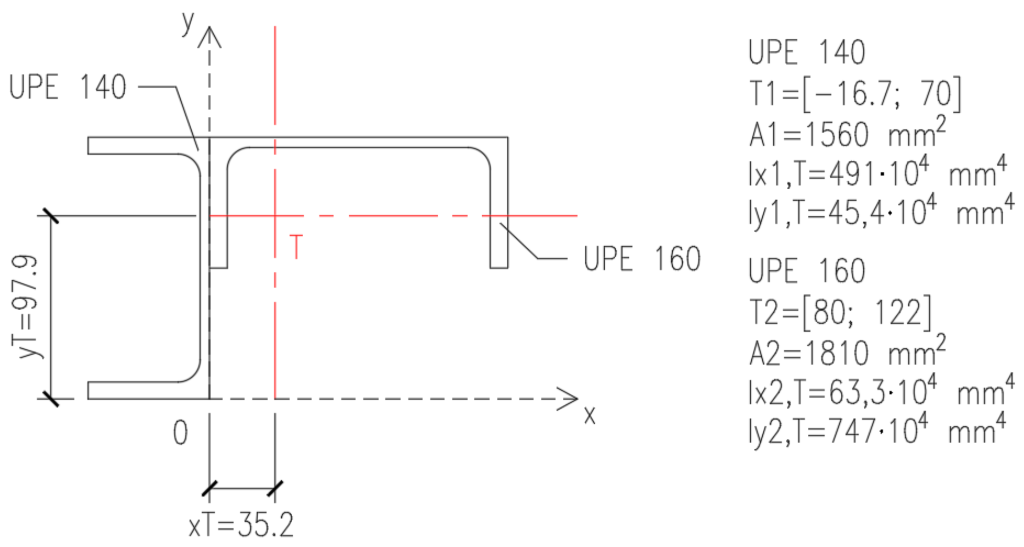
$$Ix2 = Ix2,T + A2 \cdot (y2 - yT)^2$$
$$= 63{,}3 \cdot 10^4 + 1810 \cdot (122 - 97{,}9)^2 = 1{,}68 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$Iy2 = Iy2,T + A2 \cdot (x2 - xT)^2$$
$$= 747 \cdot 10^4 + 1810 \cdot (80 - 35{,}2)^2 = 11{,}1 \cdot 10^6\ mm^4$$

- Kvadratický moment celkového obrazce Ix a Iy

$$Ix = Ix1 + Ix2 = 6{,}12 \cdot 10^6 + 1{,}68 \cdot 10^6 = 7{,}8 \cdot 10^6 mm^4$$

$$Iy = Iy1 + Iy2 = 4{,}66 \cdot 10^6 + 11{,}1 \cdot 10^6 = 15{,}76 \cdot 10^6 mm^4$$



- Deviační moment D1xy

$$D1xy = 0 + A1 \cdot (x1 - xT) \cdot (y1 - yT)$$
$$= 0 + 1560 \cdot (-16{,}7 - 35{,}2) \cdot (70 - 97{,}9)$$
$$= 2{,}26 \cdot 10^6\ mm^4$$

- Deviační moment D2xy

$$D2xy = 0 + A2 \cdot (x2 - xT) \cdot (y2 - yT)$$
$$= 0 + 1810 \cdot (80 - 35{,}2) \cdot (122 - 97{,}9)$$
$$= 1{,}95 \cdot 10^6\ mm^4$$

- Deviační moment celkového obrazce Dxy:

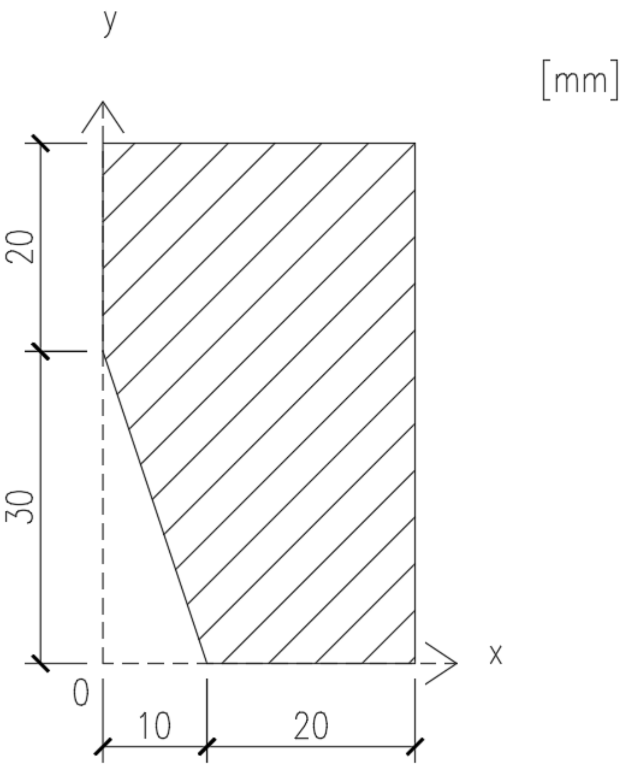
$$Dxy = D1xy + D2xy = 2{,}26 \cdot 10^6 + 1{,}95 \cdot 10^6 = 4{,}21 \cdot 10^6\ mm^4$$

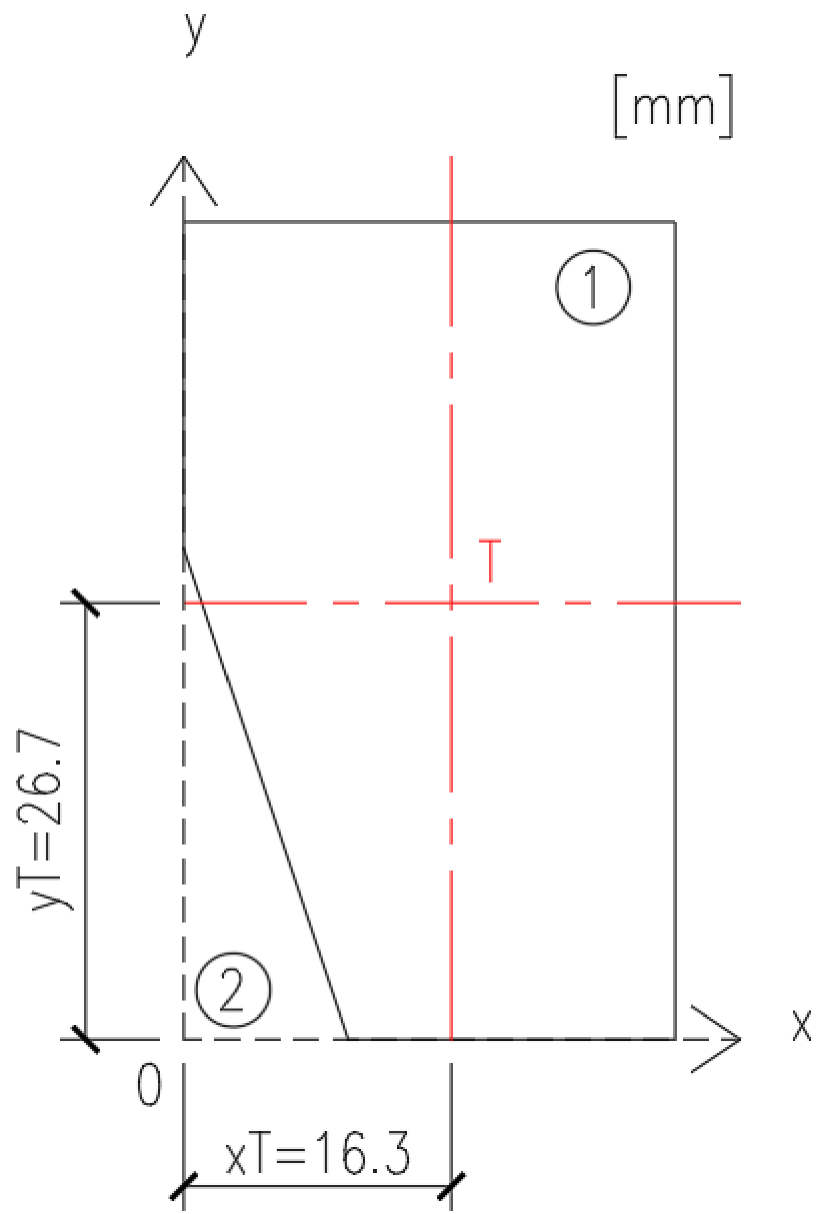
- Polární moment setrvačnosti I0

$$I0 = Ix + Iy = 7{,}8 \cdot 10^6 + 15{,}76 \cdot 10^6 = 23{,}56 \cdot 10^6\ mm^4$$

Příklad 4

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znova pečlivě projděte předchozí dva příklady, než budete pokračovat dále
- Jako kontrolu můžete obrazec rozdělit na jiné části než původní a spočítat znova xT, yT, Ix, Iy, Dxy, I0
- protože se poloha, orientace ani natočení os nemění, budou stejné xT, yT, Ix, Iy, Dxy, I0





Rovinný obrazec 1

$T1=[15;\ 25]$

$A1=1500\ mm^2$

$Ix1,T=3{,}168\cdot10^5\ mm^4$

$Iy1,T=1{,}15\cdot10^5\ mm^4$

$Dxy1=3{,}315\cdot10^3\ mm^4$

Rovinný obrazec 2

$T2=[10/3;\ 10]$

$A2=150\ mm^2$

$Ix2,T=0{,}49\cdot10^5\ mm^4$

$Iy2,T=0{,}26\cdot10^5\ mm^4$

$Dxy2=0{,}312\cdot10^5\ mm^4$

Celkový obrazec

$T=[16{,}3;\ 26{,}7]$

$A=1350\ mm^2$

$Ix=2{,}678\cdot10^5\ mm^4$

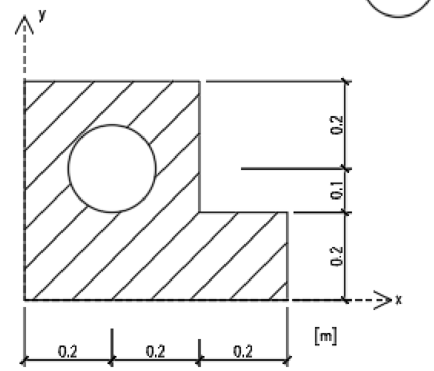
$Iy=0{,}89\cdot10^5\ mm^4$

$Dxy=-0{,}279\cdot10^5\ mm^4$

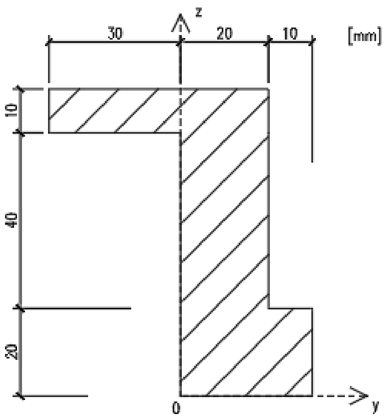
$I0=3{,}568\cdot10^5\ mm^4$

Následující příklady na procvičení jsou bez výsledků. Zkuste příklady vyřešit sami a případnou kontrolu proveďte porovnáním s ostatními kolegy.

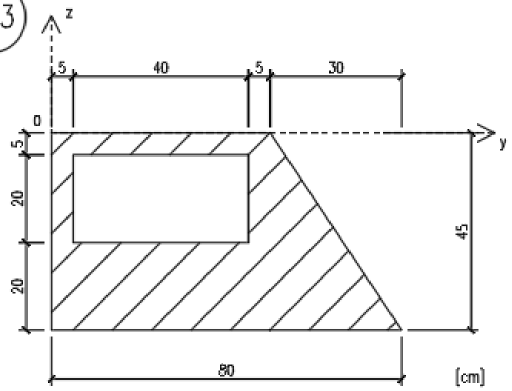
P51



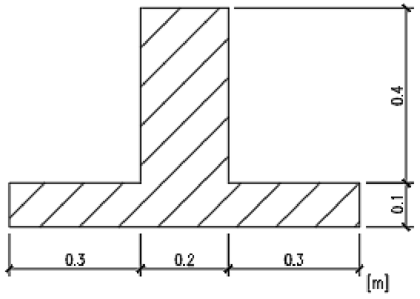
P52



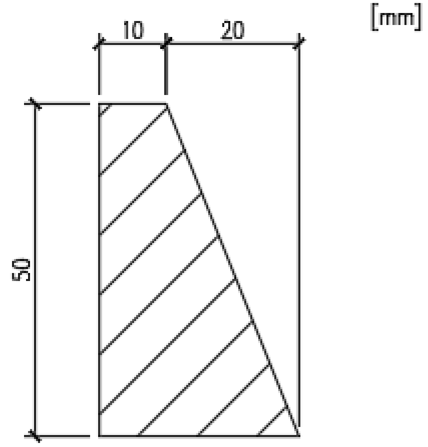
P53



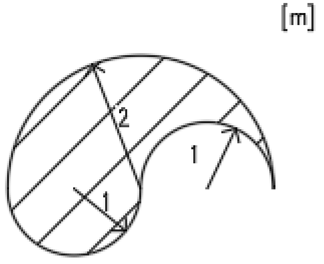
C3P4



C4P3



P53a



P167