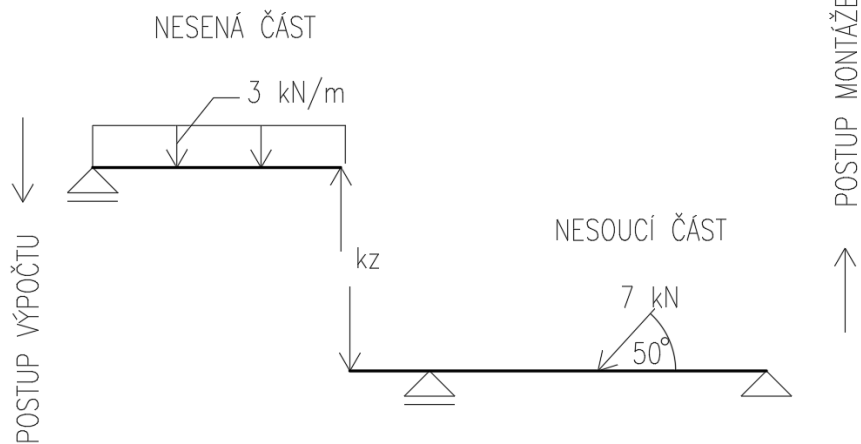
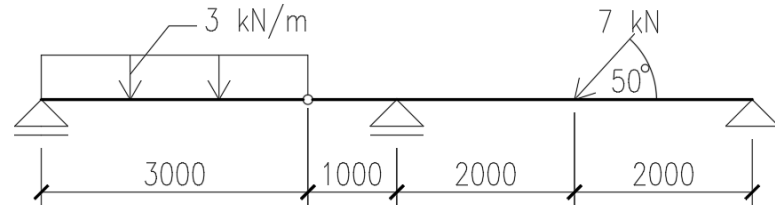


# Cvičení 14

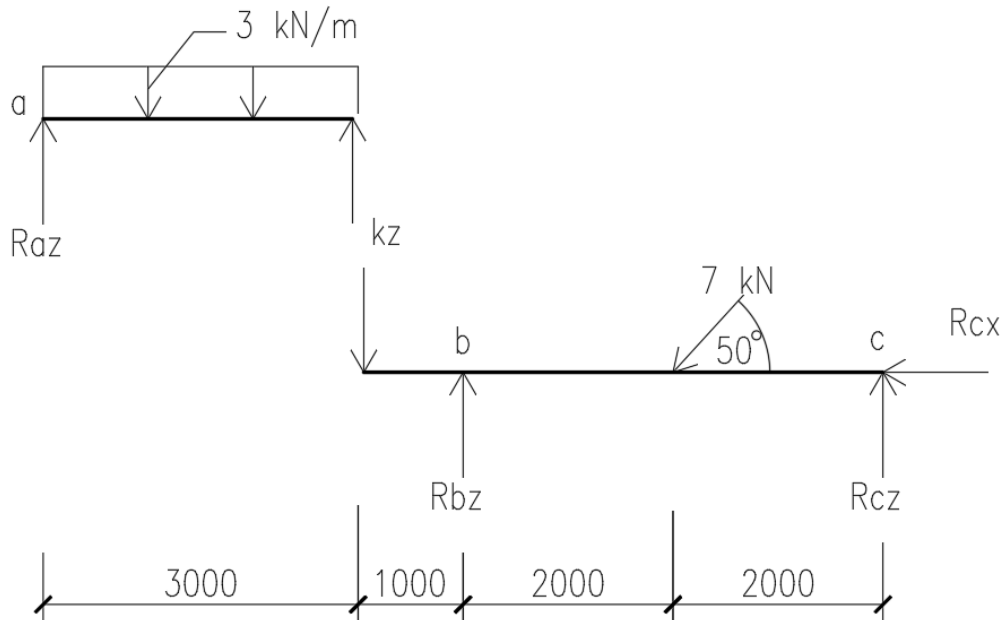
Gerberův nosník. Výpočet reakcí a diagramy vnitřních sil a momentů

## Příklad 1

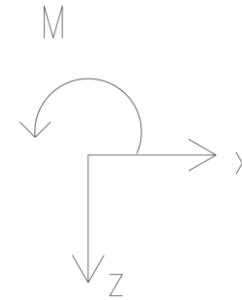
[mm]



- Konstrukci rozdělíme v místě kloubu na části
- Do kloubu zavedeme **předpoklady** směru sil  $k_z$ , síly **musí** být v rovnováze tzn. pokud na jedné části má síla směr kladný, na druhé musí být směr opačný
- Konstrukci tak rozdělíme na část **nesenou** a část **nesoucí**
- Nesoucí část – část, kterou při montáži vybudujeme před připojením nesené části
- Nesená část – část, která se při montáži připojuje na nesoucí část
- Výpočet pak provádíme od nesené části po nesoucí část



- Nejprve nosník uvolníme z vazeb a ty nahradíme **předpoklady** průběhu reakcí, používáme přitom dohodnutou osovou konvenci – kladný směr je ve směru šipek



- Libovolnou kombinací silových a momentových podmínek tyto neznámé složky reakcí vypočteme

$$\sum M_{ik} = 0 \rightarrow -R_{az} \cdot 3 + 9 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow R_{az} = 4,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow k_z \cdot 3 - 9 \cdot 1,5 = 0 \rightarrow k_z = 4,5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ic} = 0 \rightarrow 4,5 \cdot 5 - R_{bz} \cdot 4 + 7 \cdot \sin 50^\circ \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{bz} = 8,3062 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow 4,5 \cdot 1 + R_{cz} \cdot 4 - 7 \cdot \sin 50^\circ \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{cz} = 1,5562 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow -7 \cdot \cos 50^\circ - R_{cx} = 0 \rightarrow R_{cx} = -4,4995 \text{ kN} \rightarrow$$

- Normálové složky účinků sil:

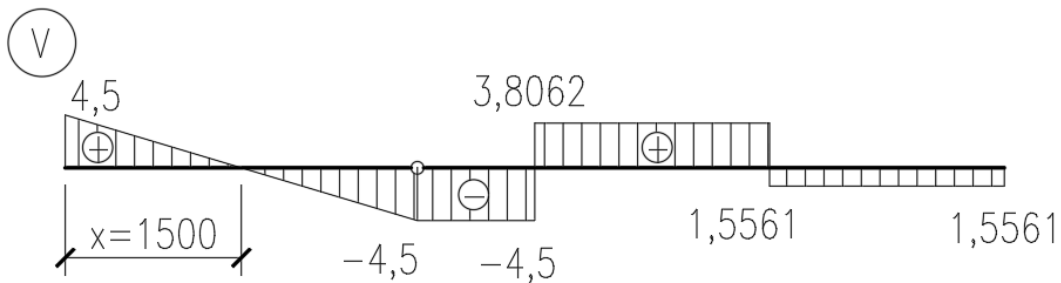
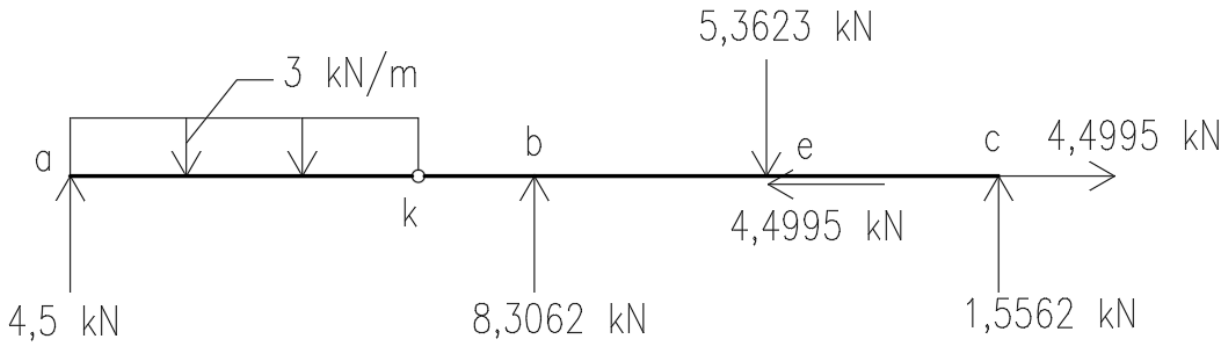
$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$N_k^I = 0 \text{ kN}; N_k^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$N_b^I = 0 \text{ kN}; N_b^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$N_e^I = 0 \text{ kN}; N_e^{II} = 4,4995 \text{ kN}$$

$$N_c^I = 4,4995 \text{ kN}; N_c^{II} = 4,4995 - 4,4995 = 0 \text{ kN}$$



$$\frac{x}{4,5} = \frac{3}{9} \rightarrow x = 1,5 \text{ m}$$

- Posouvající složky účinků sil:

$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = 4,5 \text{ kN}$$

$$V_k^I = 4,5 - 3 \cdot 3 = -4,5 \text{ kN}; V_k^{II} = 4,5 - 3 \cdot 3 = -4,5 \text{ kN}$$

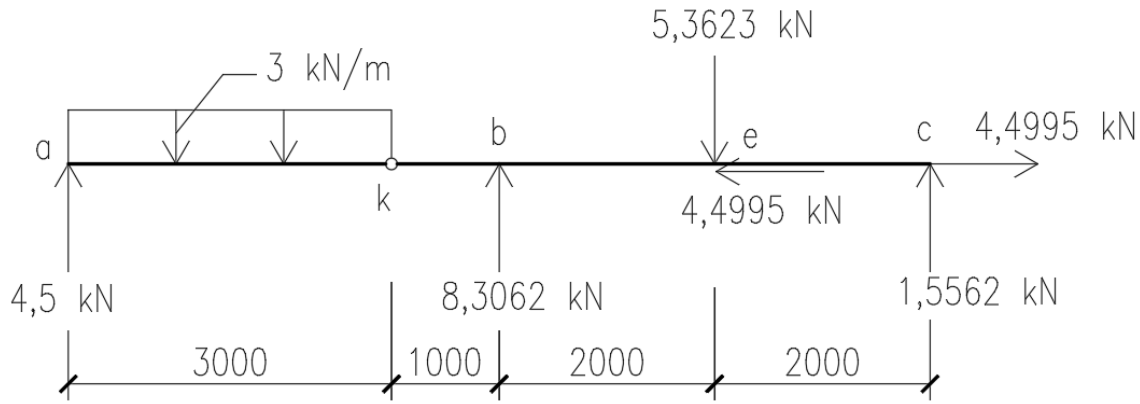
$$V_b^I = 4,5 - 3 \cdot 3 = -4,5 \text{ kN}; V_b^{II} = 4,5 - 3 \cdot 3 + 8,3062 = 3,8062 \text{ kN}$$

$$V_e^I = 4,5 - 3 \cdot 3 + 8,3062 = 3,8062 \text{ kN}$$

$$V_e^{II} = 4,5 - 3 \cdot 3 + 8,3062 - 5,3623 = -1,5561 \text{ kN}$$

$$V_c^I = 4,5 - 3 \cdot 3 + 8,3062 - 5,3623 = -1,5561 \text{ kN}$$

$$V_c^{II} = 4,5 - 3 \cdot 3 + 8,3062 - 5,3623 + 1,5562 = 0,0001 \text{ kN} \approx 0 \text{ kN}$$



• Momentové složky účinků sil:

$$M_a^I = 0 \text{ kNm}; M_a^{II} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_k^I = 4,5 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{3^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_k^{II} = 4,5 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{3^2}{2} = 0 \text{ kNm}$$

• Můžeme využít toho, že v bodě k jsou momentové účinky **nulové** a ostatní moment spočteme od nich (jako bychom počítali moment jen na jedné části)

$$M_b^I = -4,5 \cdot 1 = -4,5 \text{ kNm}$$

$$M_b^{II} = -4,5 \cdot 1 = -4,5 \text{ kNm}$$

$$M_e^I = -4,5 \cdot 3 + 8,3062 \cdot 2 = 3,1124 \text{ kNm}$$

$$M_e^{II} = -4,5 \cdot 3 + 8,3062 \cdot 2 = 3,1124 \text{ kNm}$$

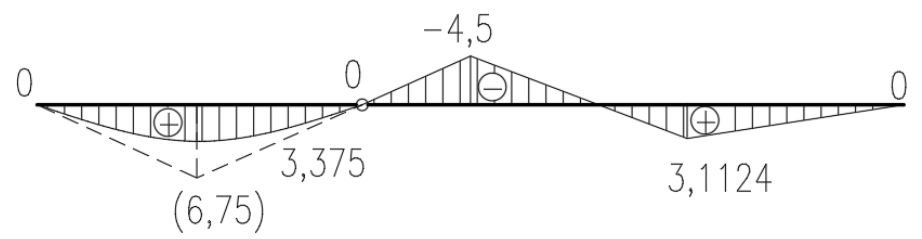
$$M_c^I = -4,5 \cdot 5 + 8,3062 \cdot 4 - 5,3623 \cdot 2 = 0,0002 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_c^{II} = -4,5 \cdot 5 + 8,3062 \cdot 4 - 5,3623 \cdot 2 = 0,0002 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = 4,5 \cdot 1,5 - 3 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 3,375 \text{ kNm}$$

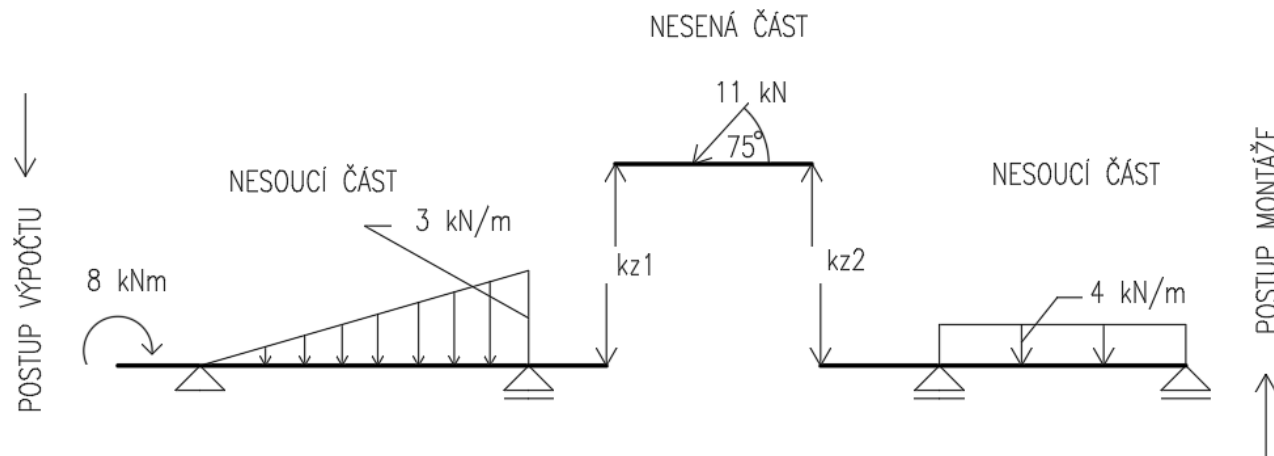
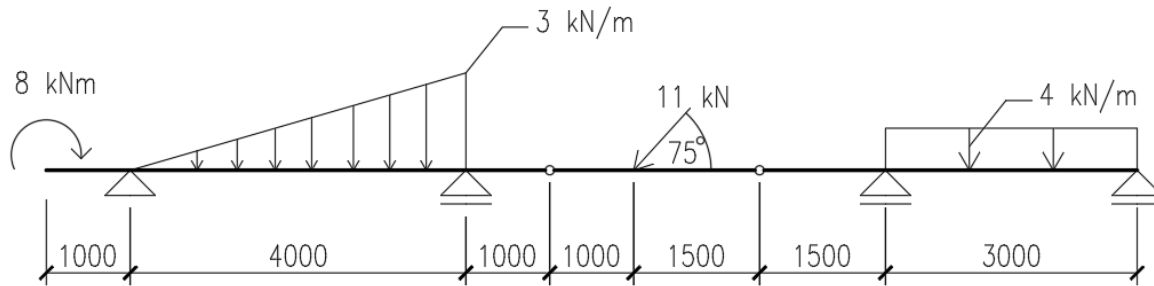
$$M_0 = 4,5 \cdot 1,5 = 6,75 \text{ kNm}$$

(M)



## Příklad 2

[mm]



- V tomto případě si můžeme vybrat, kterou část řešit jako následující, jestli levou nebo pravou nosoucí část

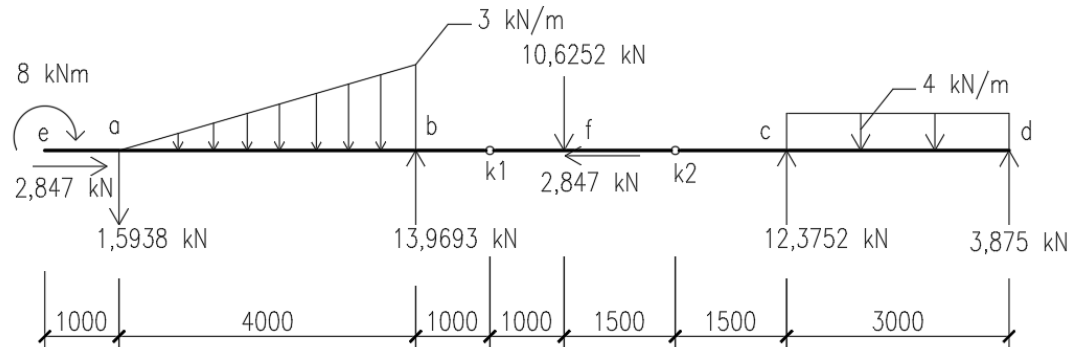
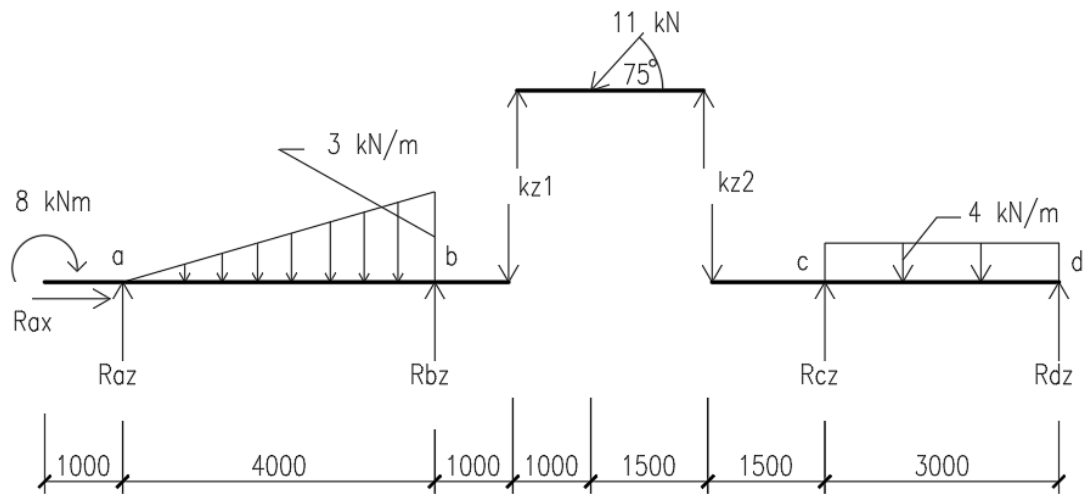
- Libovolnou kombinací silových a momentových podmínek tyto neznámé složky reakcí v kloubech vypočteme

$$\sum M_{ik2} = 0 \rightarrow -kz1 \cdot 2,5 + 11 \cdot \sin 75 \cdot 1,5 = 0$$

$$\rightarrow kz1 = 6,3751 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ik1} = 0 \rightarrow kz2 \cdot 2,5 - 11 \cdot \sin 75 \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow kz2 = 4,2501 \text{ kN} \uparrow$$



$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow -8 - Raz \cdot 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4}{3} - 6,3751 \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow Raz = -1,5938 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow -8 + Rbz \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{8}{3} - 6,3751 \cdot 5 = 0$$

$$\rightarrow Rbz = 13,9693 \text{ kN} \uparrow$$

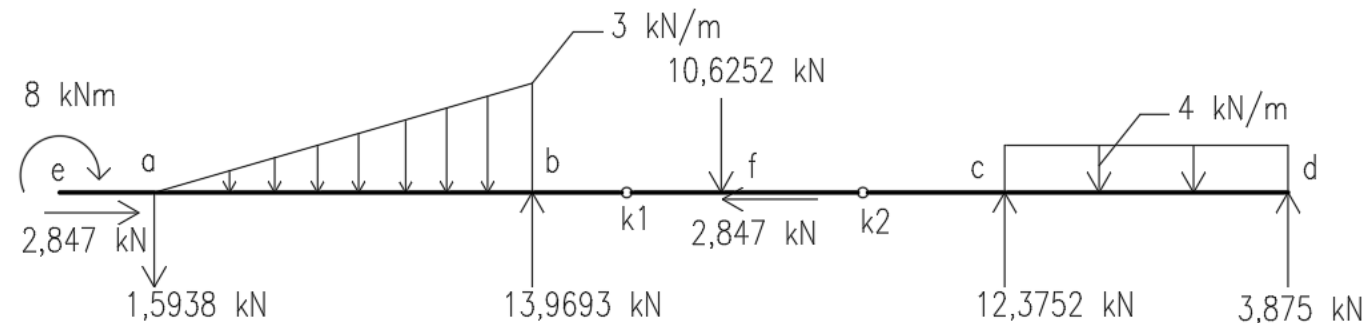
$$\sum M_{id} = 0 \rightarrow 4,2501 \cdot 4,5 - Rcz \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow Rcz = 12,3752 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ic} = 0 \rightarrow 4,2501 \cdot 1,5 + Rdz \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow Rdz = 3,875 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow Rax - 11 \cdot \cos 75 = 0 \rightarrow Rax = 2,847 \text{ kN} \rightarrow$$



- Normálové složky účinků sil:

$$N_e^I = 0 \text{ kN}; N_e^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = -2,847 \text{ kN}$$

$$N_b^I = -2,847 \text{ kN}; N_b^{II} = -2,847 \text{ kN}$$

$$N_{k1}^I = -2,847 \text{ kN}; N_{k1}^{II} = -2,847 \text{ kN}$$

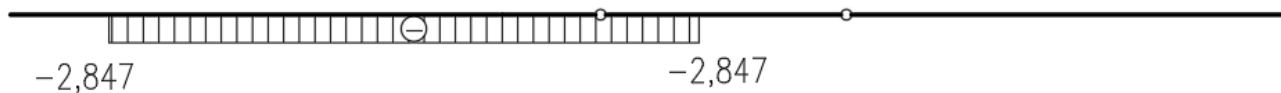
$$N_f^I = -2,847 \text{ kN}; N_f^{II} = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}$$

$$N_{k2}^I = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}; N_{k2}^{II} = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}$$

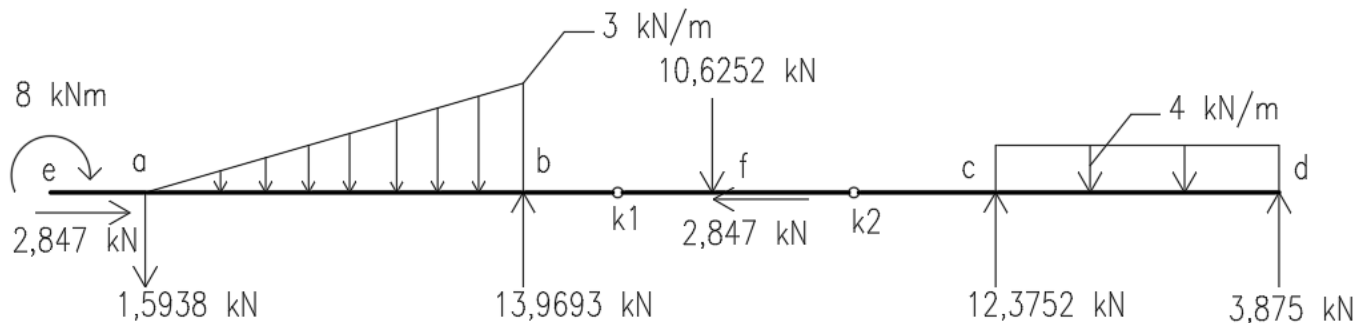
$$N_c^I = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}; N_c^{II} = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}$$

$$N_d^I = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}; N_d^{II} = -2,847 + 2,847 = 0 \text{ kN}$$

(N)







- Posouvající složky účinků sil:

$$V_e^I = 0 \text{ kN}; V_e^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = -1,5938 \text{ kN}$$

$$V_b^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} = -7,5938 \text{ kN}$$

$$V_b^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 = 6,3755 \text{ kN}$$

$$V_{k1}^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 = 6,3755 \text{ kN}$$

$$V_{k1}^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 = 6,3755 \text{ kN}$$

$$V_f^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 = 6,3755 \text{ kN}$$

$$V_f^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 = -4,2497 \text{ kN}$$

$$V_{k2}^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 = -4,2497 \text{ kN} \quad V_{k2}^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 = -4,2497 \text{ kN}$$

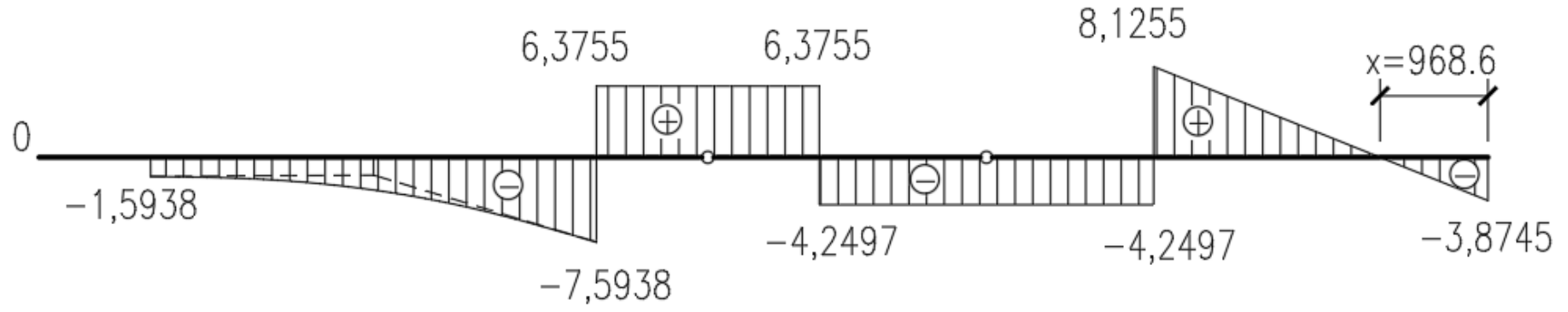
$$V_c^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 = -4,2497 \text{ kN}$$

$$V_c^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 + 12,3752 = 8,1255 \text{ kN}$$

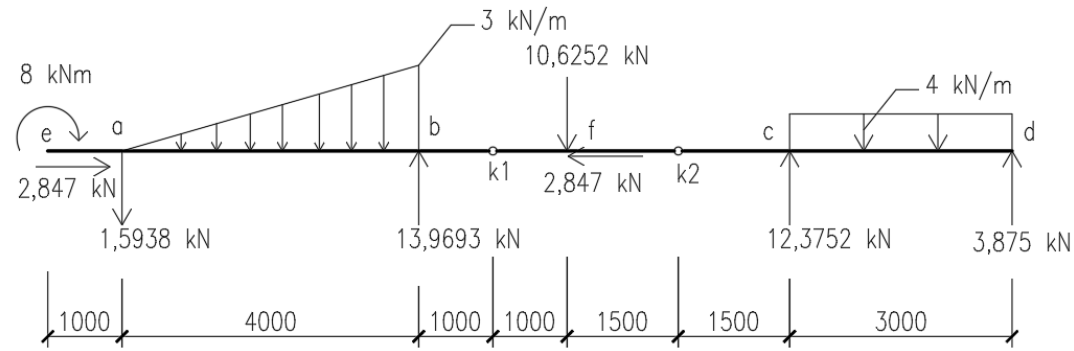
$$V_d^I = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 + 12,3752 - 4 \cdot 3 = -3,8745 \text{ kN}$$

$$V_d^{II} = -1,5938 - \frac{3 \cdot 4}{2} + 13,9693 - 10,6252 + 12,3752 - 4 \cdot 3 + 3,875 = 0,0005 \text{ kN} \approx 0 \text{ kN}$$

(V)



$$\frac{x}{3,8745} = \frac{3}{12} \rightarrow x = 0,9686 \text{ m}$$



- Momentové složky účinků sil:

$$M_e^I = 0 \text{ kNm}; M_e^{II} = 8 \text{ kNm}$$

$$M_a^I = 8 \text{ kNm}; M_a^{II} = 8 \text{ kNm}$$

$$M_b^I = 8 - 1,5938 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4}{3} = -6,3752 \text{ kNm}$$

$$M_b^{II} = 8 - 1,5938 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4}{3} = -6,3752 \text{ kNm}$$

$$M_{k1}^I = 8 - 1,5938 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + 1\right) + 13,9693 \cdot 1 = 0,0003 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_{k1}^{II} = 8 - 1,5938 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + 1\right) + 13,9693 \cdot 1 = 0,0003 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

- Můžeme využít toho, že v bodě **k1** jsou momentové účinky **nulové** a ostatní moment spočteme od nich (jako bychom počítali moment jen na jedné části)

$$M_f^I = +6,3751 \cdot 1 = +6,3751 \text{ kNm} \quad M_f^{II} = +6,3751 \cdot 1 = +6,3751 \text{ kNm}$$

$$M_{k2}^I = +6,3751 \cdot 2,5 - 10,6252 \cdot 1,5 = 0,00005 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_{k2}^{II} = +6,3751 \cdot 2,5 - 10,6252 \cdot 1,5 = 0,00005 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

- Můžeme využít toho, že v bodě **k2** jsou momentové účinky **nulové** a ostatní moment spočteme od nich (jako bychom počítali moment jen na jedné části)

$$M_c^I = -4,2501 \cdot 1,5 = -6,3751 \text{ kNm} \quad M_c^{II} = -4,2501 \cdot 1,5 = -6,3751 \text{ kNm}$$

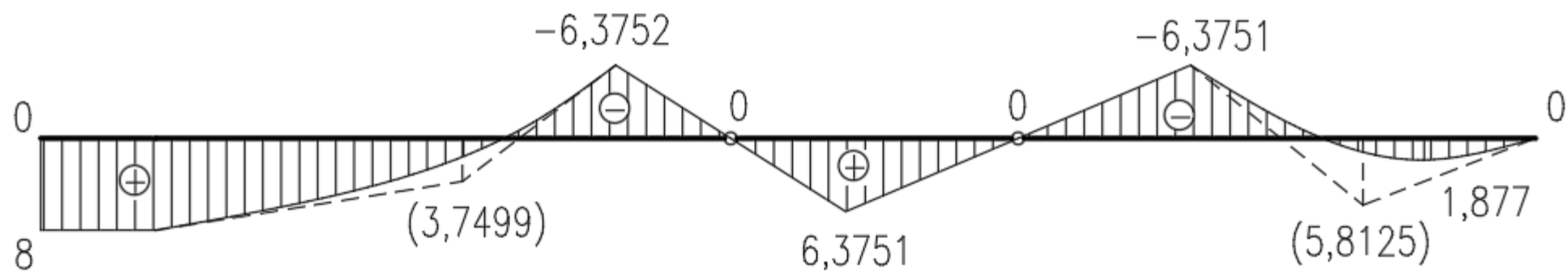
$$M_d^I = -4,2501 \cdot 4,5 + 12,3752 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{3^2}{2} = 0,00015 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_d^{II} = -4,2501 \cdot 4,5 + 12,3752 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{3^2}{2} = 0,00015 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_{max} = 3,875 \cdot 0,9686 - 4 \cdot \frac{0,9686^2}{2} = 1,877 \text{ kNm}$$

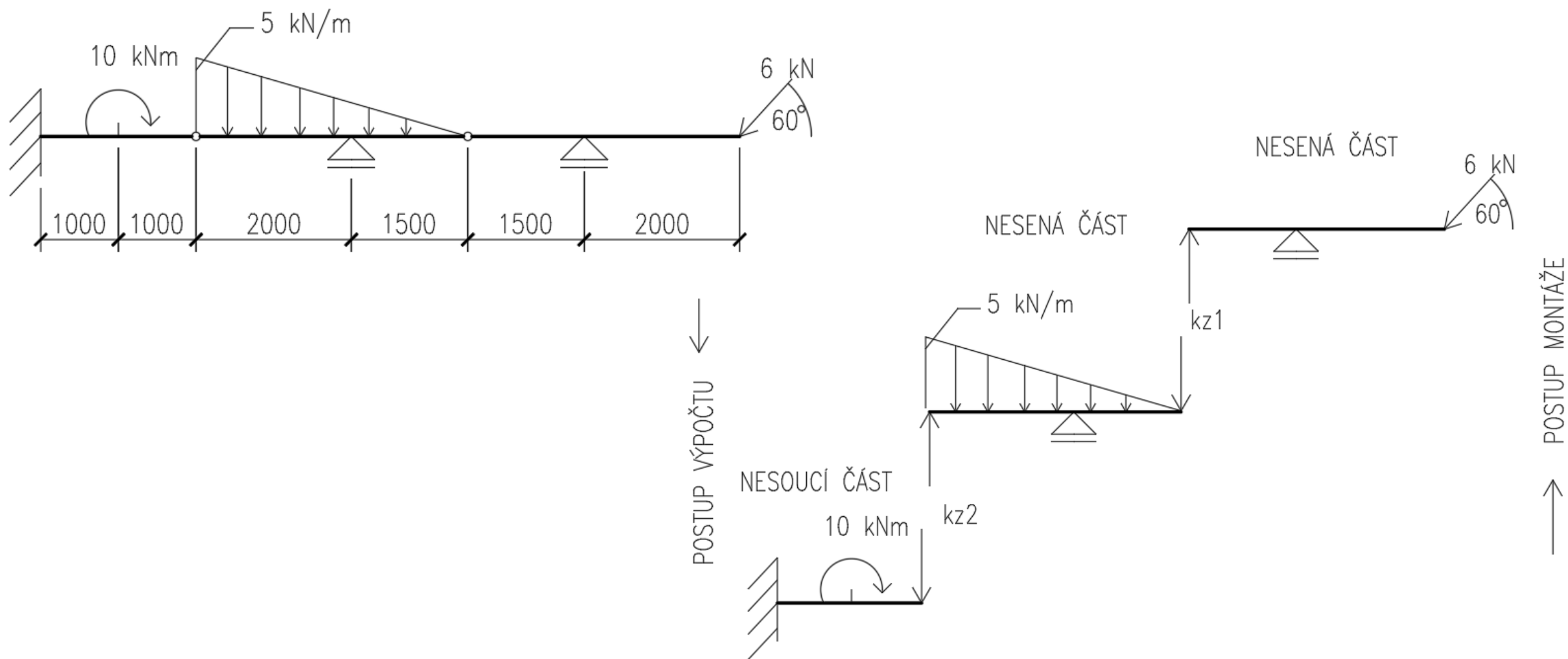
$$M_0 = 8 - 1,5938 \cdot \frac{8}{3} = 3,7499 \text{ kNm} \quad M_1 = 3,875 \cdot \frac{3}{2} = 5,8125 \text{ kNm}$$

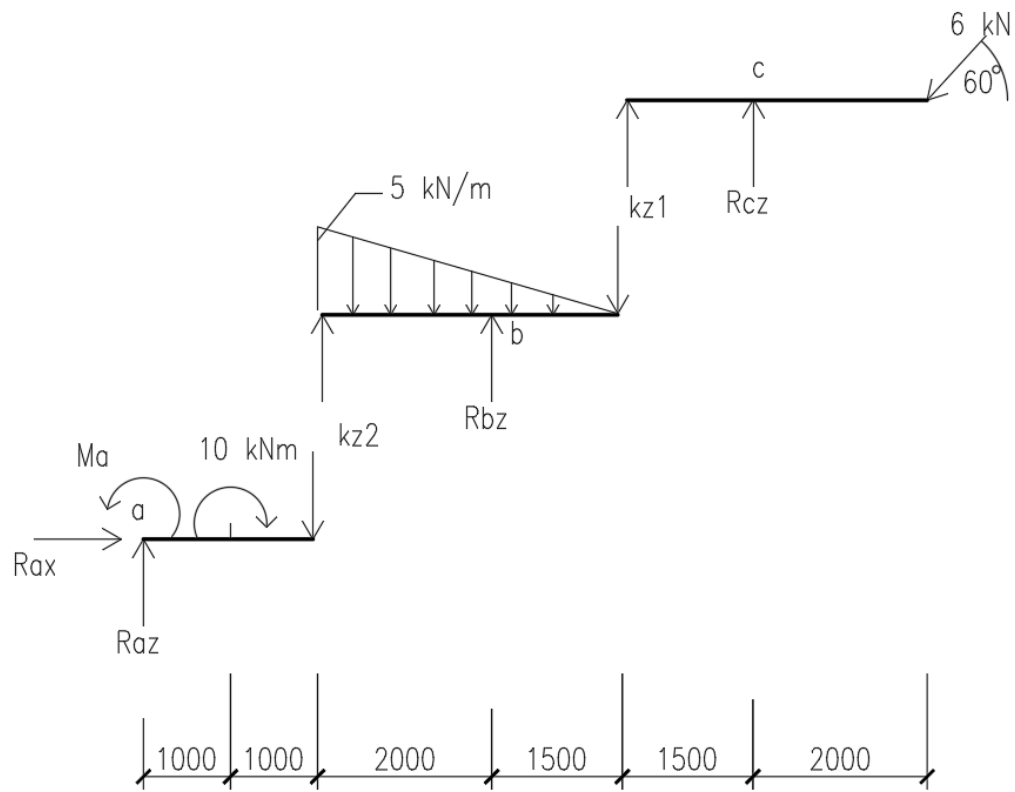
M



### Příklad 3

[mm]





$$\sum M_{ik1} = 0 \rightarrow -6 \cdot \sin 60 \cdot 3,5 + R_{cz} \cdot 1,5 = 0$$

$$\rightarrow R_{cz} = 12,1244 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ic} = 0 \rightarrow -6 \cdot \sin 60 \cdot 2 - k_{z1} \cdot 1,5 = 0$$

$$\rightarrow k_{z1} = -6,9282 \text{ kN} \downarrow$$

- Protože **předpoklad** směru reakce  $k_{z1}$  vyšel špatný – **opačný**, musí být opačná i jeho **interakce** na navazujícím prutu

$$\sum M_{ik2} = 0 \rightarrow 6,9282 \cdot 3,5 + R_{bz} \cdot 2 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} \cdot \frac{3,5}{3} = 0$$

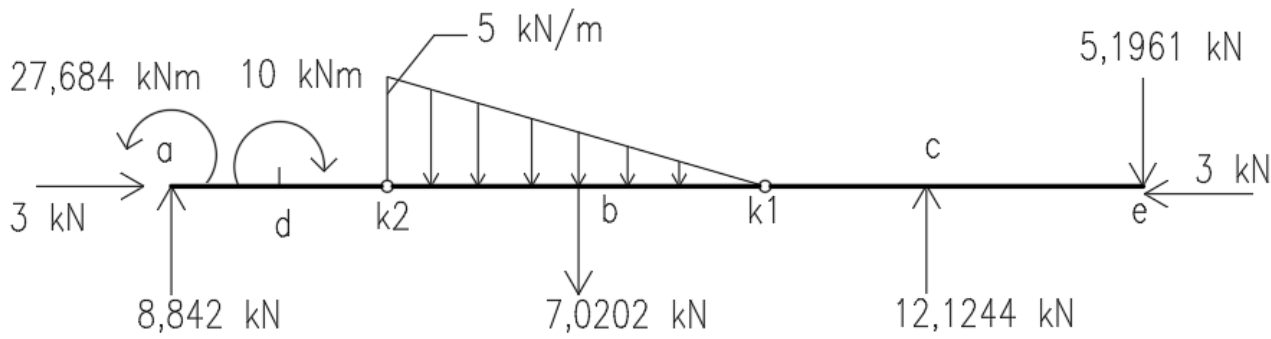
$$\rightarrow R_{bz} = -7,0202 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow 6,9282 \cdot 1,5 - k_{z2} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 3,5}{2} \cdot \left(\frac{7}{3} - 1,5\right) = 0 \rightarrow k_{z2} = 8,842 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow -8,842 \cdot 2 - 10 + M_a = 0 \rightarrow M_a = 27,684, \text{ kNm}$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow -6 \cdot \cos 60 + R_{ax} = 0 \rightarrow R_{ax} = 3 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_{iz} = 0 \rightarrow 8,842 - R_{az} = 0 \rightarrow R_{az} = 8,842 \text{ kN} \uparrow$$



- Normálové složky účinků sil:

$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = -3 \text{ kN}$$

$$N_d^I = -3 \text{ kN}; N_d^{II} = -3 \text{ kN}$$

$$N_{k2}^I = -3 \text{ kN}; N_{k2}^{II} = -3 \text{ kN}$$

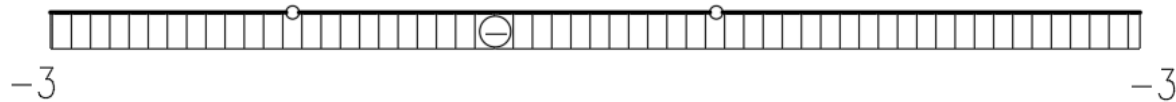
$$N_b^I = -3 \text{ kN}; N_b^{II} = -3 \text{ kN}$$

$$N_{k1}^I = -3 \text{ kN}; N_{k1}^{II} = -3 \text{ kN}$$

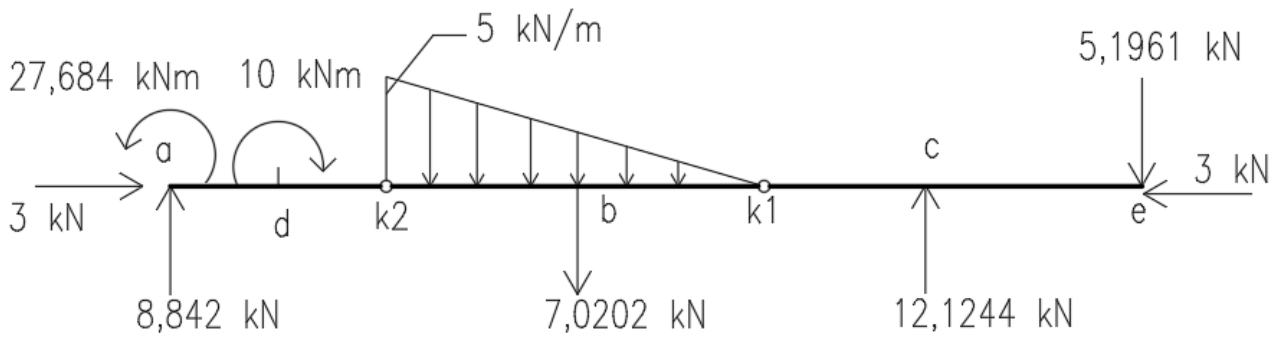
$$N_c^I = -3 \text{ kN}; N_c^{II} = -3 \text{ kN}$$

$$N_e^I = -3 \text{ kN}; N_e^{II} = -3 + 3 = 0 \text{ kN}$$

(N)







- Posouvající složky účinků sil:

$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = 8,842 \text{ kN}$$

$$V_d^I = 8,842 \text{ kN}; V_d^{II} = 8,842 \text{ kN}$$

$$V_{k2}^I = 8,842 \text{ kN}; V_{k2}^{II} = 8,842 \text{ kN}$$

$$\frac{q'}{1,5} = \frac{5}{3,5} \rightarrow q' = 2,1429 \text{ kN/m}$$

$$V_b^I = 8,842 - \frac{(5 + 2,1429) \cdot 2}{2} = 1,6991 \text{ kN}$$

$$V_b^{II} = 8,842 - \frac{(5 + 2,1429) \cdot 2}{2} - 7,0202 = -5,3211 \text{ kN}$$

- Pozn.: než pracně zjišťovat stranu a vzpomínat si na obsah lichoběžníkového obrazce, je zde daleko lepší postupovat z pravé strany od kloubu k1

$$V_{k1}^I = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 = -6,9282 \text{ kN}$$

$$V_{k1}^{II} = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 = -6,9282 \text{ kN}$$

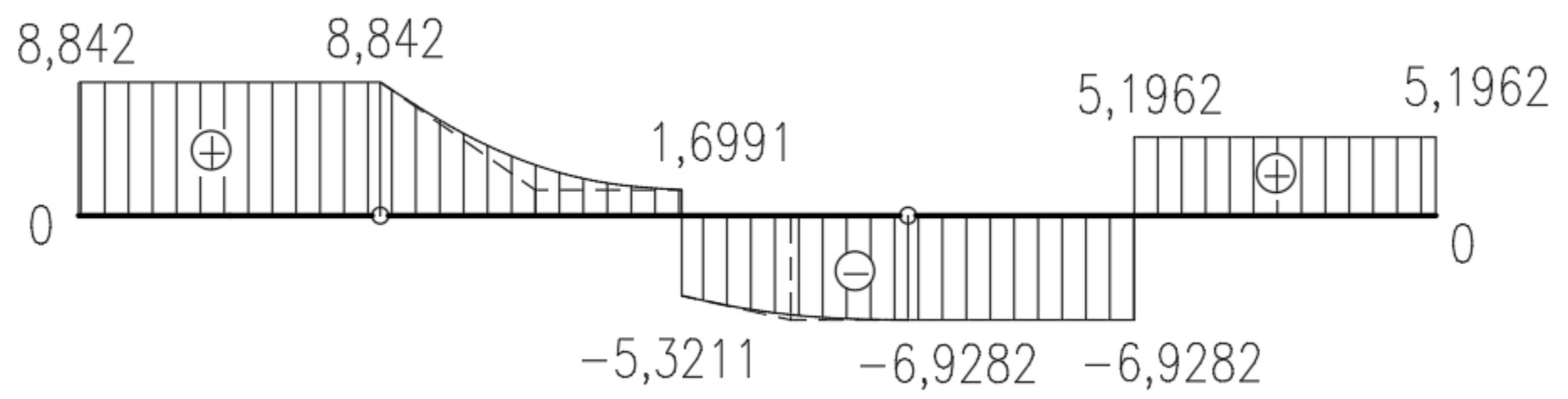
$$V_c^I = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 = -6,9282 \text{ kN}$$

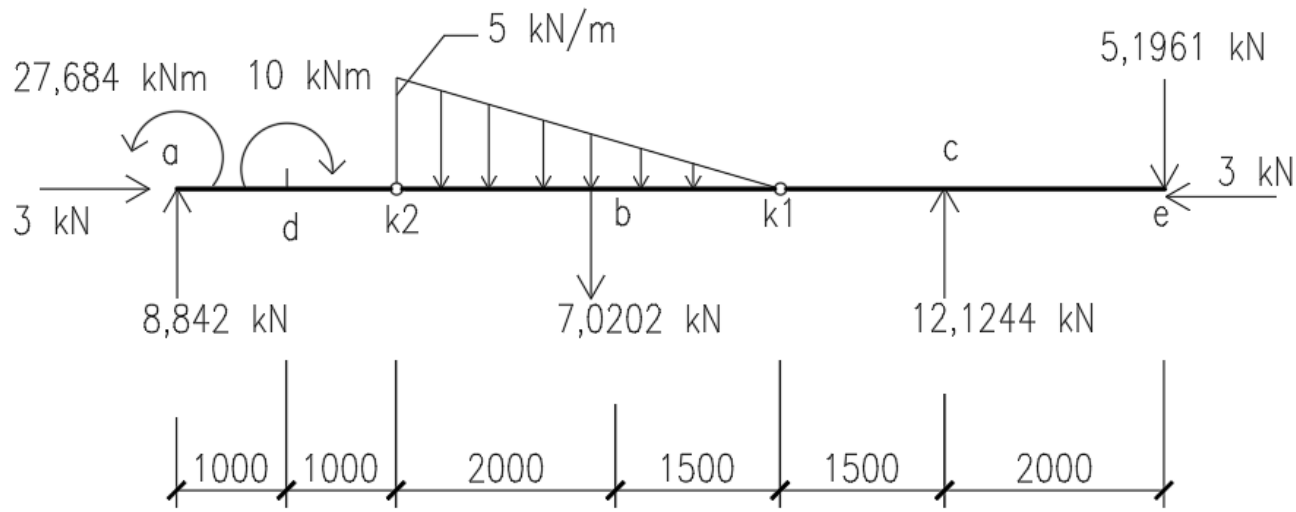
$$V_c^{II} = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 + 12,1244 = 5,1962 \text{ kN}$$

$$V_d^I = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 + 12,1244 = 5,1962 \text{ kN}$$

$$V_d^{II} = 8,842 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} - 7,0202 + 12,1244 - 5,1961 = 0,0001 \text{ kN} \approx 0 \text{ kN}$$

(V)





- Momentové složky účinků sil:

$$M_a^I = 0 \text{ kNm}; M_a^{II} = -27,684 \text{ kNm}$$

$$M_d^I = -27,684 + 8,842 \cdot 1 = -18,842 \text{ kNm}$$

$$M_d^{II} = -27,684 + 8,842 \cdot 1 + 10 = -8,842 \text{ kNm}$$

$$M_{k2}^I = -27,684 + 8,842 \cdot 2 - 10 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{k2}^{II} = -27,684 + 8,842 \cdot 2 - 10 = 0 \text{ kNm}$$

- Pro výpočet momentů z levé strany by bylo nutné buďto spočítat obsah lichoběžníkového obrazce a určit jeho polohu těžiště nebo si tento obrazec rozdělit na obdélník a trojúhelník, spočítat jejich obsah a najít jejich těžiště. Proto je zde jednodušší volbou postupovat z pravé strany a levou si ponechat pro případnou kontrolu.

$$M_b^{II} = 6,9282 \cdot 1,5 - \frac{2,1429 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1,5}{3} = 9,5887 \text{ kNm} \quad M_b^I = 6,9282 \cdot 1,5 - \frac{2,1429 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{1,5}{3} = 9,5887 \text{ kNm}$$

$$M_{k1}^I = 8,842 \cdot 3,5 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} \cdot \frac{7}{3} - 7,0202 \cdot 1,5 = 0,00003 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_{k1}^{II} = 8,842 \cdot 3,5 - \frac{5 \cdot 3,5}{2} \cdot \frac{7}{3} - 7,0202 \cdot 1,5 = 0,00003 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_c^I = -6,9282 \cdot 1,5 = -10,3923 \text{ kNm}$$

$$M_c^{II} = -6,9282 \cdot 1,5 = -10,3923 \text{ kNm}$$

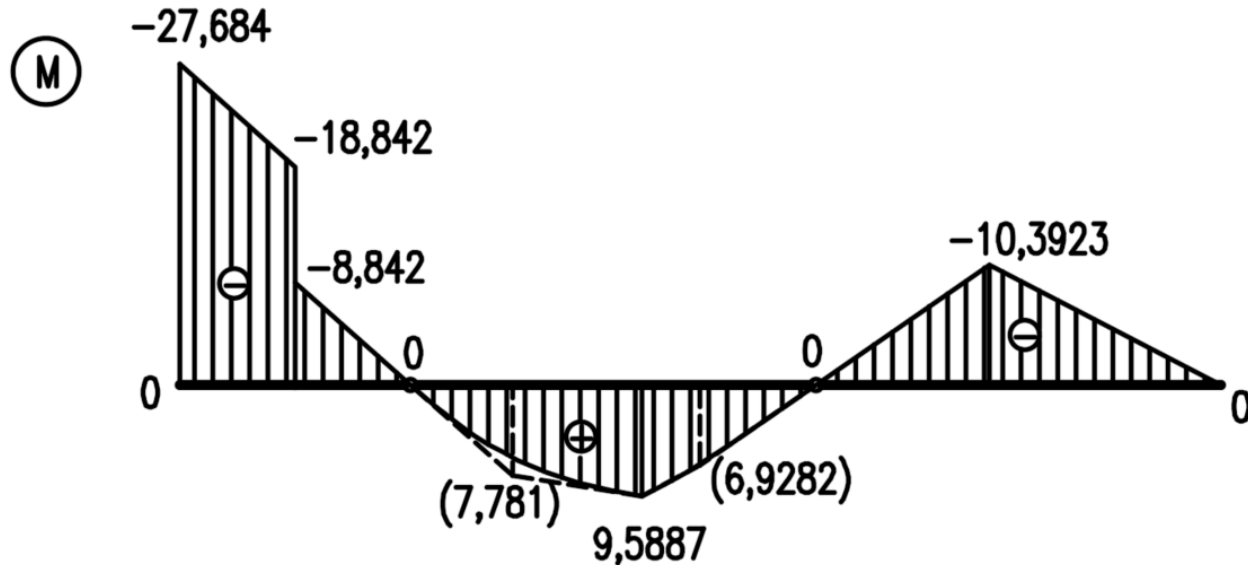
$$M_e^I = -6,9282 \cdot 3,5 + 12,1244 \cdot 2 = 0,0001 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm} \quad M_e^{II} = -6,9282 \cdot 3,5 + 12,1244 \cdot 2 = 0,0001 \text{ kNm} \approx 0 \text{ kNm}$$

$$M_0 = 6,9282 \cdot \frac{3}{3} = 6,9282 \text{ kNm}$$

- Vztah pro výpočet polohy těžiště lichoběžníkového obrazce:

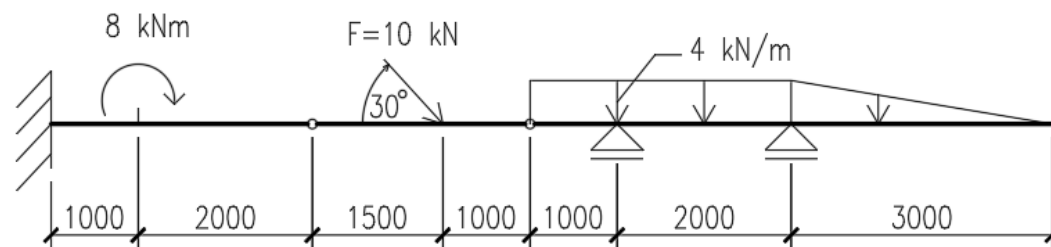
$$x = \frac{q + 2q'}{q + q'} \cdot \frac{L}{3} = \frac{5 + 2 \cdot 2,1429}{5 + 2,1429} \cdot \frac{2}{3} = 0,88 \text{ m}$$

$$M_1 = 8,842 \cdot 0,88 = 7,781 \text{ kNm}$$



Následující příklady na procvičení jsou bez výsledků. Zkuste příklady vyřešit sami a případnou kontrolu proveďte porovnáním s ostatními kolegy.

P48



P49

