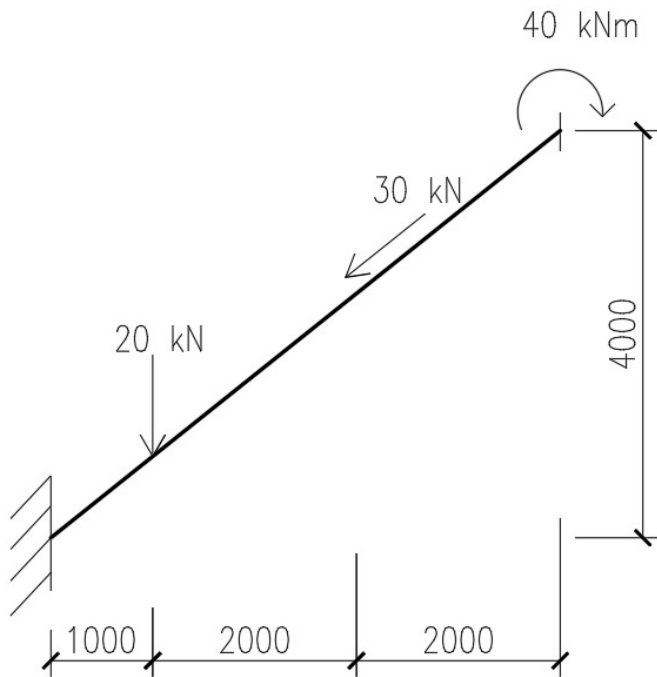


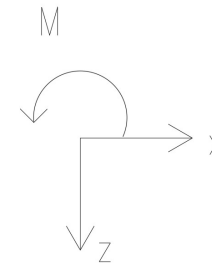
# Cvičení 11

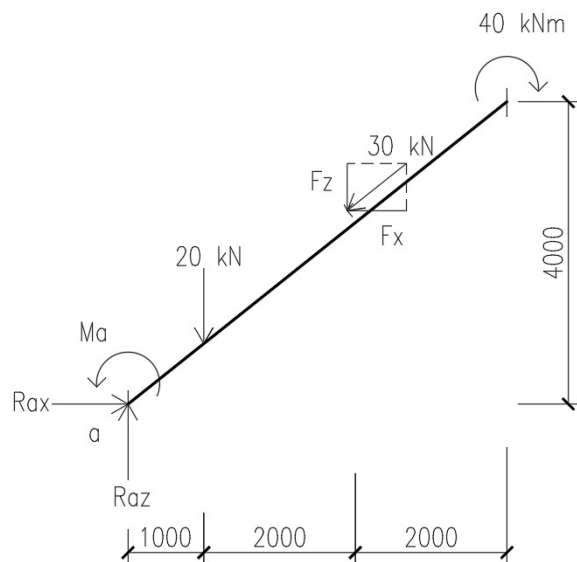
Rovinný šikmý nosník s převislým koncem, se spojitým zatížením, silami a momenty, reakce a diagramy vnitřních sil a momentů.

## Příklad 1



- Nejprve nosník uvolníme z vazeb a ty nahradíme **předpoklady** průběhu reakcí, používáme přitom dohodnutou osovou konvenci – kladný směr je ve směru šipek





- V bodě **a** se nachází **pevné vetknutí**, proto ho nahradíme třemi složkami reakcí  $R_{az}$ ,  $R_{ax}$  a  $M_a$
- Sílu 30 kN rozložíme do směrů os  $x$  a  $z$

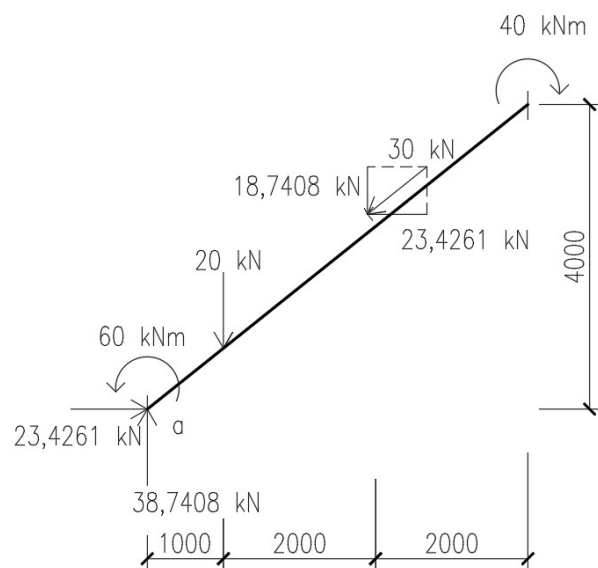
$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$L = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \text{ m}$$

$$F_x = 30 \cdot \cos \alpha = 23,4261 \text{ kN}$$

$$F_z = 30 \cdot \sin \alpha = 18,7409 \text{ kN}$$



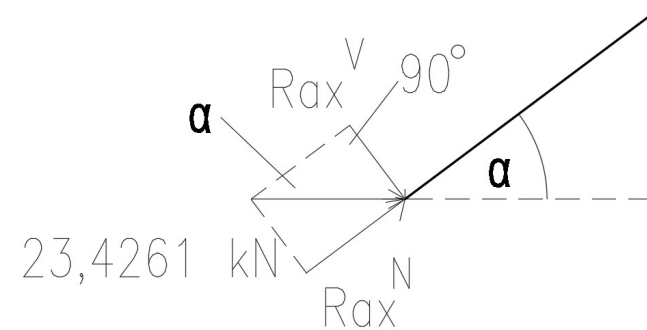
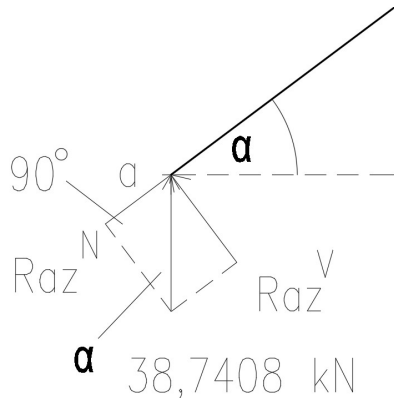
- Libovolnou kombinací silových a momentových podmínek tyto neznámé složky reakcí vypočteme

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{ax} - 23,4261 = 0 \rightarrow R_{ax} = 23,4261 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0 \rightarrow -R_{az} + 20 + 18,7409 = 0 \rightarrow R_{az} = 38,7409 \text{ kN}$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow M_a - 20 \cdot 1 - 40 = 0 \rightarrow M_a = 60 \text{ kNm}$$

- V bodě a nám tentokrát působí dvě složky sil ( $R_{ax}$  a  $R_{az}$ ), rozložíme tedy obě a sečteme je ve správném směru
- Dáváme si pozor na směr jednotlivých vektorů (souhlasný sčítáme, opačný odčítáme)



$$R_{az}^N = 38,7408 \cdot \sin \alpha = 38,7408 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 24,2012 \text{ kN}$$

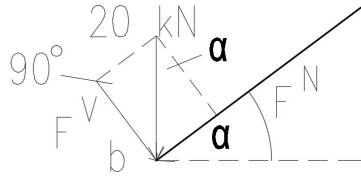
$$R_{ax}^N = 23,4261 \cdot \cos \alpha = 23,4261 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 18,2927 \text{ kN}$$

$$R_{az}^V = 38,7408 \cdot \cos \alpha = 38,7408 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 30,2515 \text{ kN}$$

$$R_{ax}^V = 23,4261 \cdot \sin \alpha = 23,4261 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 14,6342 \text{ kN}$$

- Pro směr normálových sil bude:  $N_a = R_{az}^N + R_{ax}^N = 24,2021 + 18,2927 = 42,4939 \text{ kN}$
- Pro směr posouvajících sil bude:  $V_a = R_{az}^V - R_{ax}^V = 30,2515 - 14,6342 = 15,6173 \text{ kN}$

- Rozklad sil v bodě b – místo se silou 20 kN



$$F^N = 20 \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 12,4939 \text{ kN}$$

$$F^V = 20 \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 15,6174 \text{ kN}$$

- Normálové složky účinků sil:

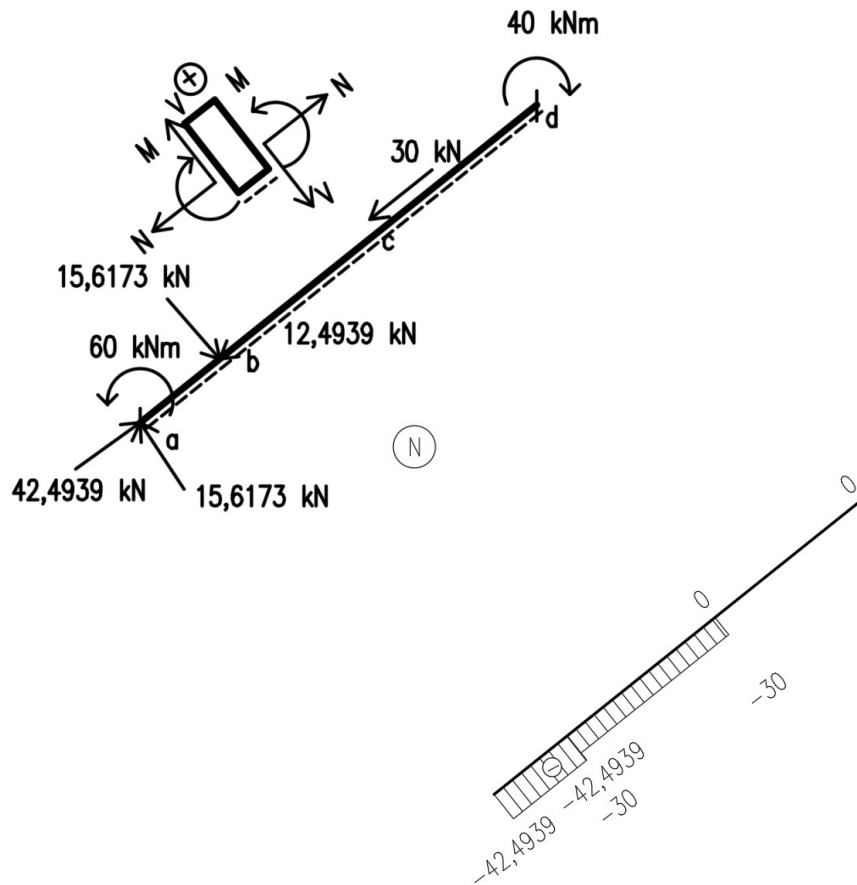
$$N_a^I = 0 \text{ kN}; N_a^{II} = -42,4939 \text{ kN}$$

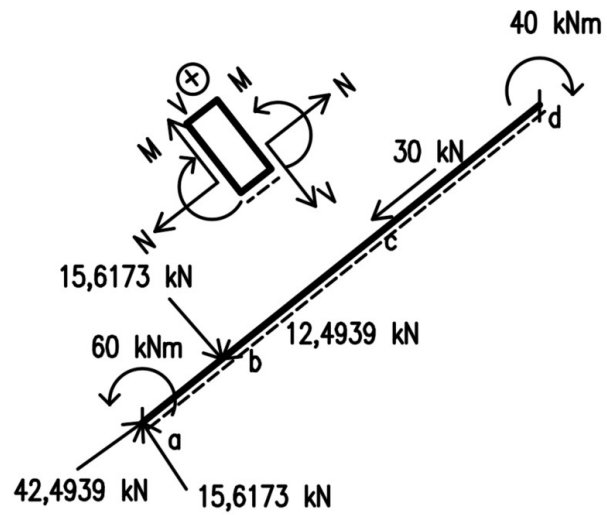
$$N_b^I = -42,4939 \text{ kN}; N_b^{II} = -42,4939 + 12,4939 = -30 \text{ kN}$$

$$N_c^I = -42,4939 + 12,4939 = -30 \text{ kN}$$

$$N_c^{II} = -42,4939 + 12,4939 + 30 = 0 \text{ kN}$$

$$N_d^I = -42,4939 + 12,4939 + 30 = 0 \text{ kN}; N_d^{II} = 0 \text{ kN}$$





- Posouvající složky účinků sil:

$$V_a^I = 0 \text{ kN}; V_a^{II} = 15,6173 \text{ kN}$$

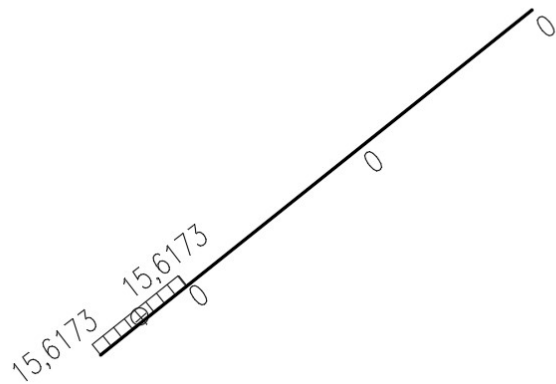
$$V_b^I = 15,6173 \text{ kN}; V_b^{II} = 15,6173 - 15,6173 = 0 \text{ kN}$$

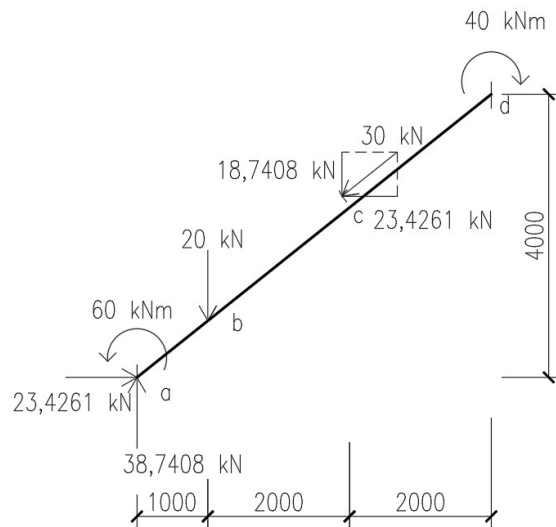
$$V_c^I = 15,6173 - 15,6173 = 0 \text{ kN}$$

$$V_c^{II} = 15,6173 - 15,6173 = 0 \text{ kN}$$

$$V_d^I = 15,6173 - 15,6173 = 0 \text{ kN}; V_d^{II} = 0 \text{ kN}$$

(V)





- Momentové složky účinků sil:
- Ukážeme si, že lze použít i „obrácený“ postup výpočtu (konstrukci řešíme zprava doleva):

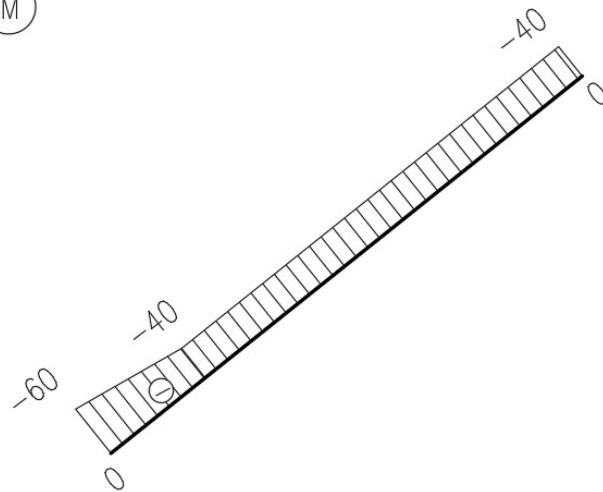
$$M_d^{II} = 0 \text{ kNm}; M_d^I = -40 \text{ kNm}$$

$$M_c^{II} = -40 = -40 \text{ kNm}; M_c^I = -40 = -40 \text{ kNm}$$

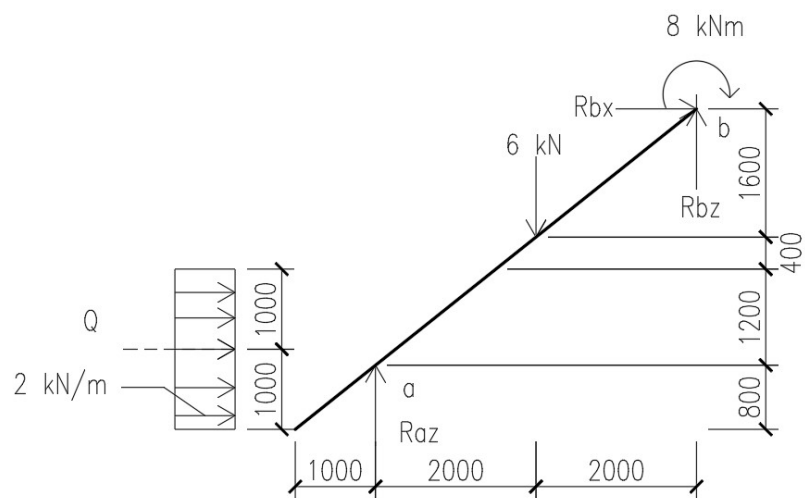
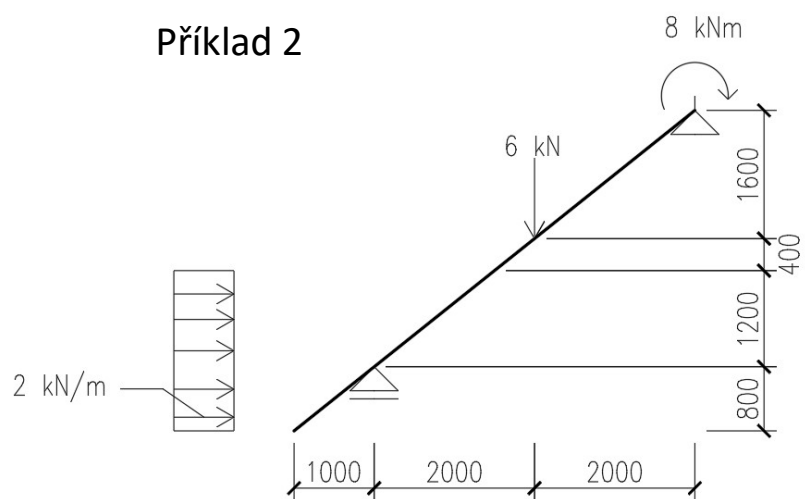
$$M_b^{II} = -40 = -40 \text{ kNm}; M_b^I = -40 = -40 \text{ kNm}$$

$$M_a^{II} = -40 - 20 \cdot 1 = -60 \text{ kNm}; M_a^I = -40 - 20 + 60 = 0 \text{ kNm}$$

(M)



## Příklad 2



- Uvolníme nosník z **vazeb** a určíme hodnotu a polohu **náhradního břemene Q**

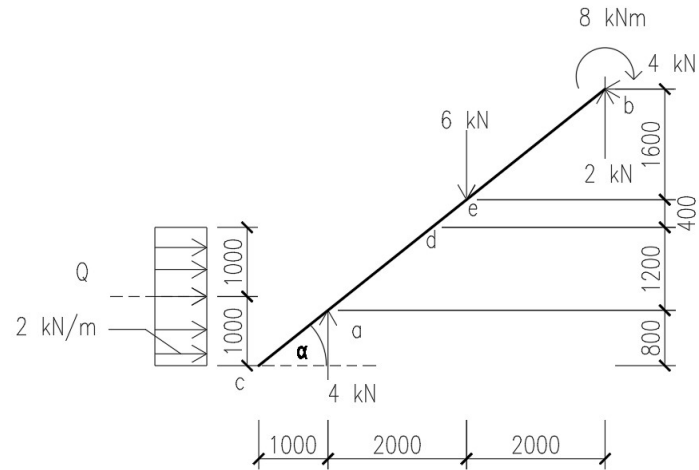
$$Q = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{ib} = 0 \rightarrow -R_{az} \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 8 = 0 \rightarrow R_{az} = 4 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow 4 + R_{bx} = 0 \rightarrow R_{bx} = -4 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum M_{ia} = 0 \rightarrow R_{bz} \cdot 4 + 4 \cdot 3,2 - 8 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 0,2 = 0 \rightarrow R_{bz} = 2 \text{ kN} \uparrow$$





- Provedeme rozklad sil a spojitého zatížení

$$L = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

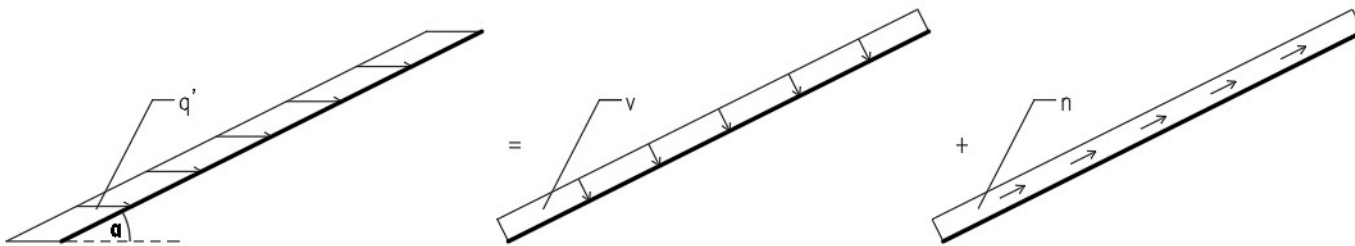
- Rozklad spojitého zatížení
- Např. z podobnosti trojúhelníků určíme délku na kterou spojité zatížení působí

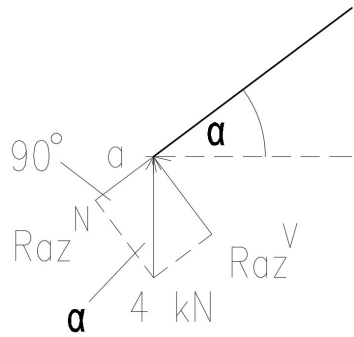
$$\frac{L'}{2} = \frac{\sqrt{41}}{4} \rightarrow L' = \frac{2 \cdot \sqrt{41}}{4} \rightarrow L' = \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ m}$$

$$Q = Q' \rightarrow 2 \cdot 2 = q' \cdot \frac{\sqrt{41}}{2} \rightarrow q' = \frac{8}{\sqrt{41}} \text{ kN/m}$$

$$v = q' \cdot \sin \alpha = 0,7805 \text{ kN/m}$$

$$n = q' \cdot \cos \alpha = 0,9756 \text{ kN/m}$$

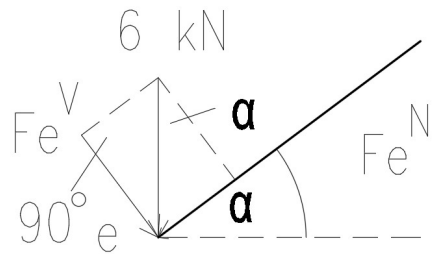




- Rozklad sil v bodě a

$$R_{az}^N = 4 \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 2,4988 \text{ kN}$$

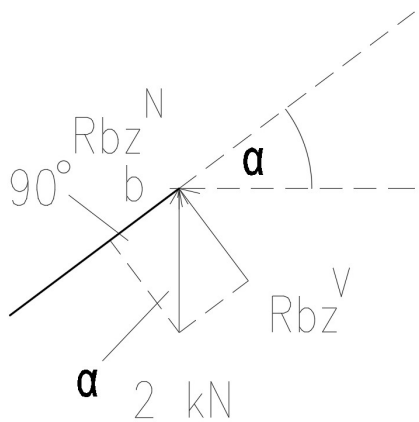
$$R_{az}^V = 4 \cdot \cos \alpha = 4 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 3,1235 \text{ kN}$$



- Rozklad sil v bodě e

$$F_e^N = 6 \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 3,7482 \text{ kN}$$

$$F_e^V = 6 \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 4,6852 \text{ kN}$$



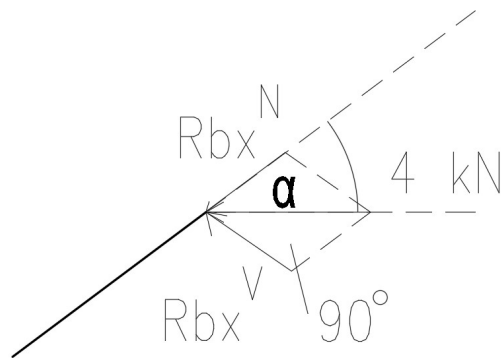
- Rozklad sil v bodě b

$$R_{bz}^N = 2 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 1,2494 \text{ kN}$$

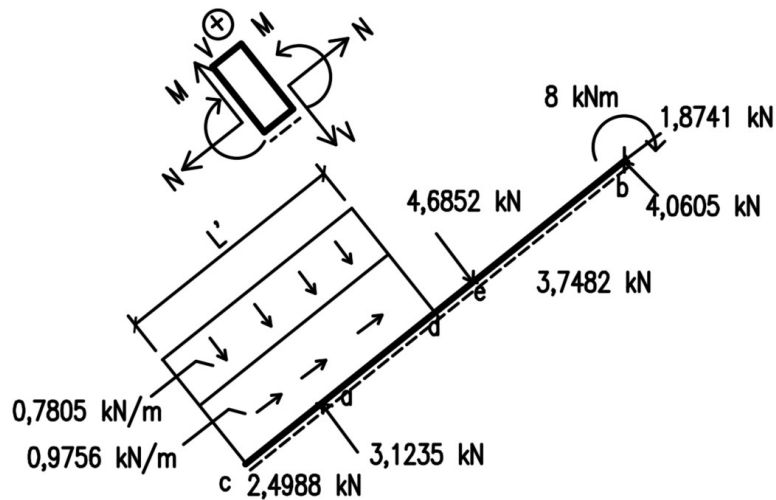
$$R_{bz}^V = 2 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 1,5617 \text{ kN}$$

$$R_{bx}^N = 4 \cdot \cos \alpha = 4 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 3,1235 \text{ kN}$$

$$R_{bx}^V = 4 \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 2,4988 \text{ kN}$$



- Pro směr normálových sil bude:  $N_b = Rbz^N - Rbx^N = 1,2494 - 3,1235 = -1,8741 \text{ kN}$
- Pro směr posouvajících sil bude:  $V_b = Rbz^V + Rbx^V = 1,5617 + 2,4988 = 4,0605 \text{ kN}$



- Normálové složky účinků sil:

$$N_c^I = 0 \text{ kN}; N_c^{II} = 0 \text{ kN}$$

- Např. z podobnosti trojúhelníků určíme délku na kterou část spojitého zatížení působí

$$\frac{L^{ca}}{0,8} = \frac{\sqrt{41}}{4} \rightarrow L^{ca} = \frac{0,8 \cdot \sqrt{41}}{4} \rightarrow L^{ca} = 0,2\sqrt{41} \text{ m}$$

$$N_a^I = -0,9756 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{41} = -1,2494 \text{ kN}$$

$$N_a^{II} = -0,9756 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 = -3,7482 \text{ kN}$$

$$N_d^I = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 = -5,6222 \text{ kN}$$

$$N_d^{II} = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 = -5,6222 \text{ kN}$$

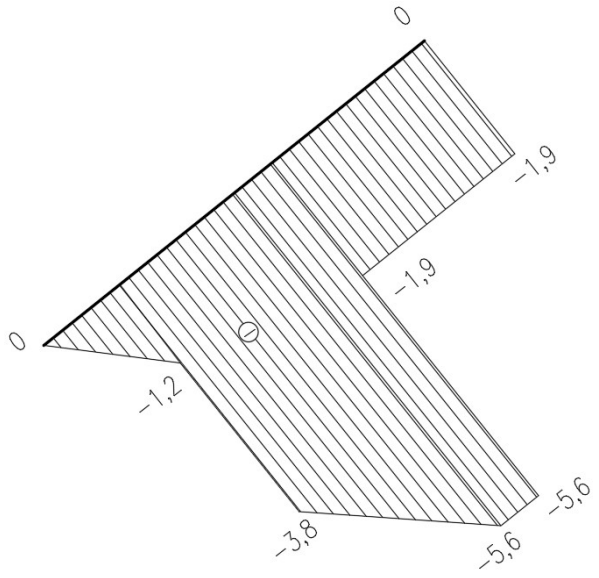
$$N_e^I = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 = -5,6222 \text{ kN}$$

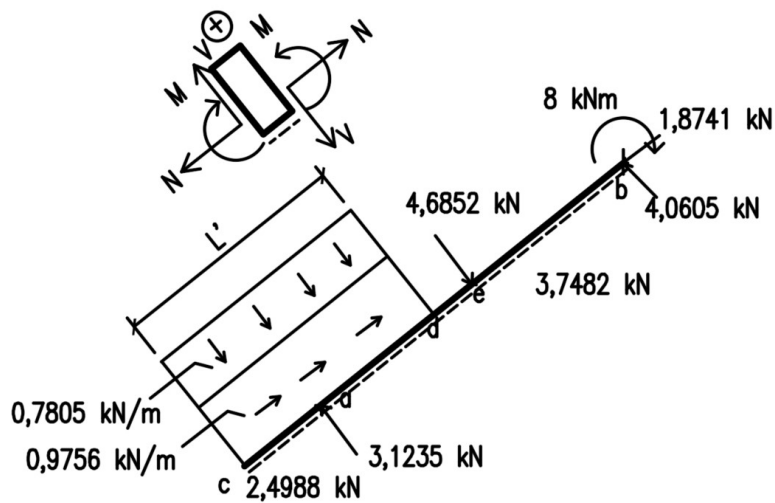
$$N_e^{II} = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 + 3,7482 = -1,8740 \text{ kN}$$

$$N_b^I = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 + 3,7482 = -1,8740 \text{ kN}$$

$$N_b^{II} = -0,9756 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} - 2,4988 + 3,7482 + 1,8741 = -0,0001 \text{ kN} \rightarrow \text{z důvodu úhlového zaokrouhlení} = 0 \text{ kN}$$

N





- Posouvající složky účinků sil:

$$V_c^I = 0 \text{ kN}; V_c^{II} = 0 \text{ kN}$$

$$V_a^I = -0,7805 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{41} = -0,9995 \text{ kN}$$

$$V_a^{II} = -0,7805 \cdot 0,2 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 = 2,124 \text{ kN}$$

$$V_d^I = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 = 0,6247 \text{ kN}$$

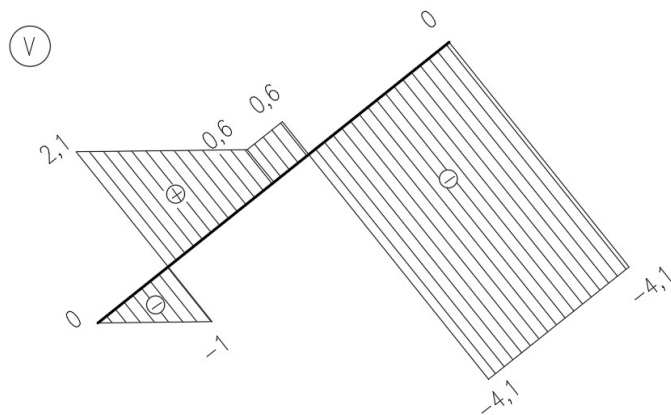
$$V_d^{II} = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 = 0,6247 \text{ kN}$$

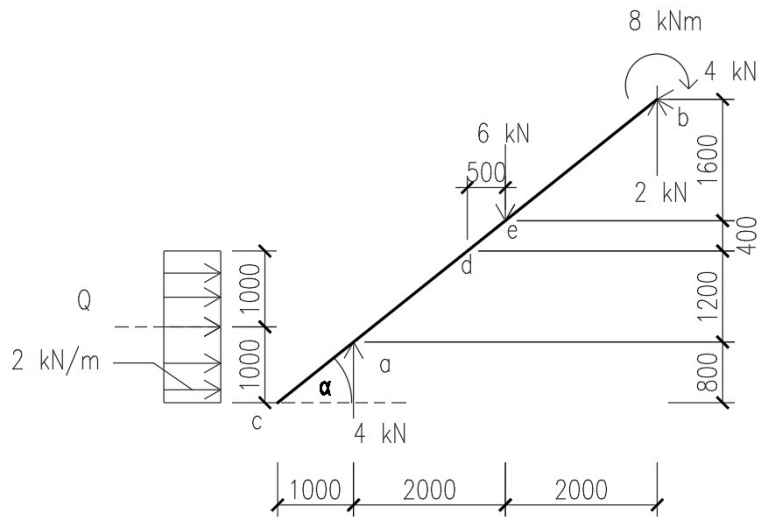
$$V_e^I = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 = 0,6247 \text{ kN}$$

$$V_e^{II} = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 - 4,6852 = -4,0605 \text{ kN}$$

$$V_b^I = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 - 4,6852 = -4,0605 \text{ kN}$$

$$V_b^{II} = -0,7805 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{41} + 3,1235 - 4,6852 + 4,0605 = 0 \text{ kN}$$





- Momentové složky účinků sil:

$$M_c^I = 0 \text{ kNm}; M_c^{II} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_a^I = -2 \cdot \frac{0,8^2}{2} = -0,64 \text{ kNm} \quad M_a^{II} = -2 \cdot \frac{0,8^2}{2} = -0,64 \text{ kNm}$$

$$M_d^I = -2 \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 1,5 = 2 \text{ kNm} \quad M_d^{II} = -2 \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 1,5 = 2 \text{ kNm}$$

$$M_e^I = -2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 0,4 \right) + 4 \cdot 2 = 2,4 \text{ kNm}$$

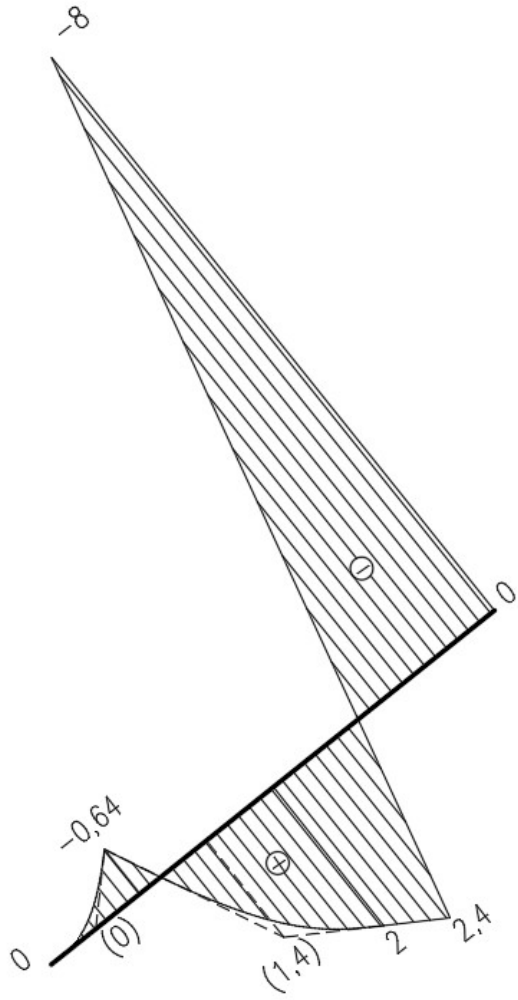
$$M_e^{II} = -2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 0,4 \right) + 4 \cdot 2 = 2,4 \text{ kNm}$$

$$M_b^I = -2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 2 \right) + 4 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = -8 \text{ kNm}$$

$$M_b^{II} = -2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{2} + 2 \right) + 4 \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 8 = 0 \text{ kNm}$$

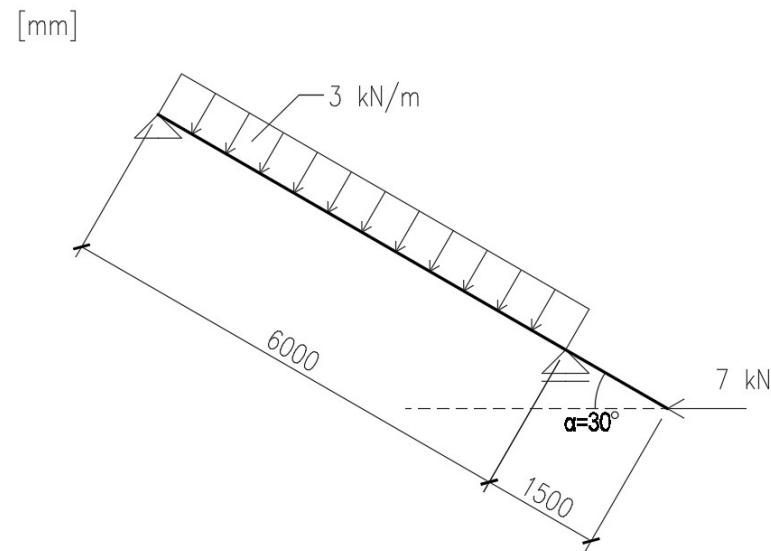
$$M_x^I = -0,7805 \cdot 0,2\sqrt{41} \cdot \left( \frac{0,2\sqrt{41}}{2} + \frac{0,5\sqrt{41} - 0,2\sqrt{41}}{2} \right) + 3,1235 \cdot \left( \frac{0,5\sqrt{41} - 0,2\sqrt{41}}{2} \right) = 1,4 \text{ kNm}$$

(M)

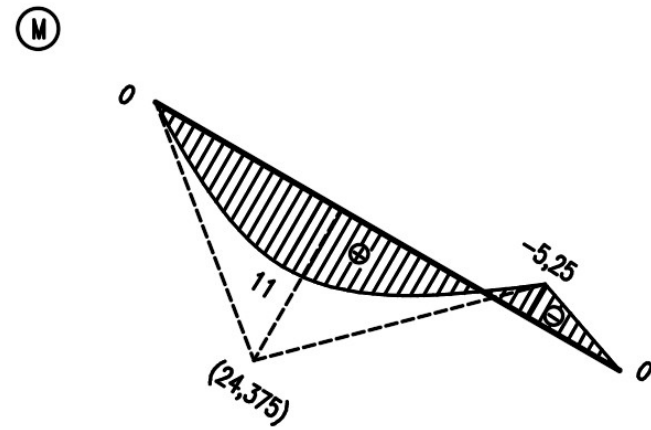
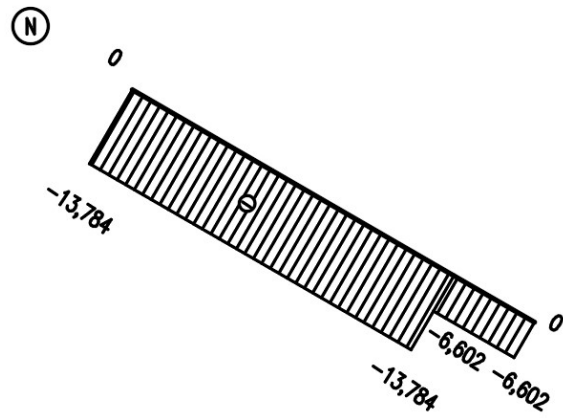
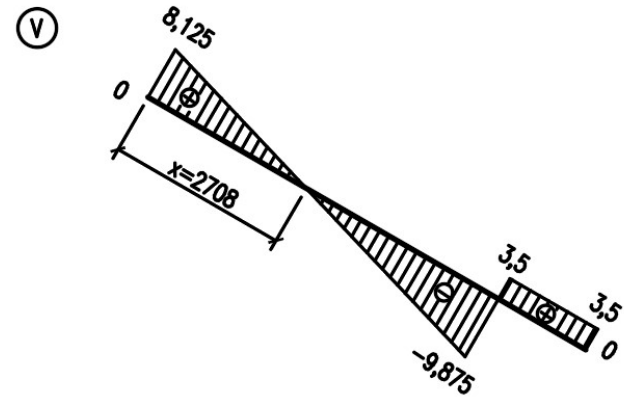
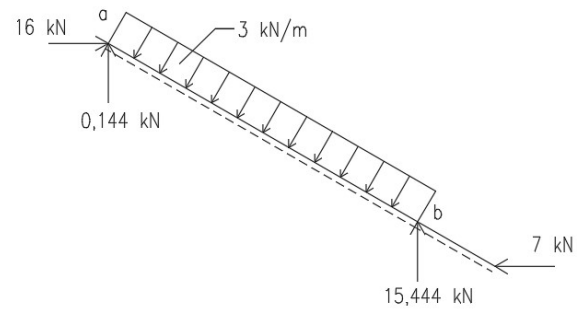


### Příklad 3

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znova pečlivě projděte předchozí dva příklady, než budete pokračovat dále







#### Příklad 4

- Následující příklad bude bez postupu řešení. Objeví se jen výsledky, které slouží ke kontrole řešení
- V zájmu vlastní snahy o pochopení problematiky doporučuji se dívat na výsledky jen po vlastním vypracování zadání
- Pokud si nejste při vypracování v určité části jisti s výsledkem, nahlédněte spíše do předchozího cvičení, nebo si znovu pečlivě projděte předchozí dva příklady, než budete pokračovat dále

