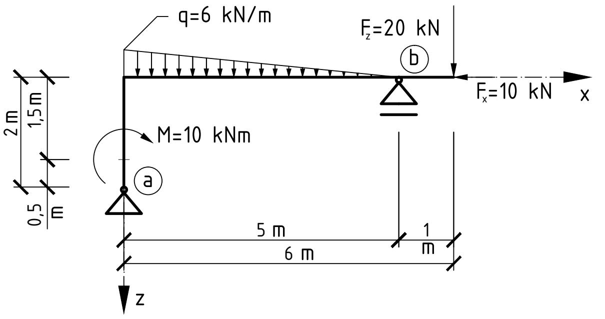
Vzorový příklad č. 9

Rovinný lomený nosník zatížený 3 typy zatížení

Zadání

Pro daný rovinný lomený nosník a uvedené zatížení na obrázku 1 vypočítejte velikost reakcí vnějších vazeb R_{ax}, R_{az}, R_{bz} a stanovte průběhy vnitřních sil N, V, M.



Obrázek 1: Zadání

Řešení

Řešení reakcí

Pro vyřešení reakcí na zadaném rovinném lomeném nosníku je třeba nejprve provést uvolnění nosníku z vnějších vazeb a účinek těchto vnějších vazeb[1] nahradit složkami reakcí R_{ax}, R_{az}, R_{bz}. Smysl složek reakcí lze libovolně zvolit a při následujícím výpočtu se jejich orientace buď potvrdí (znaménko $\oplus$) nebo obrátí (znaménko $\ominus$). Uvolněním nosníku a nahrazením vazeb složkami reakcí vznikne soustava sil v rovině. Tato soustava má být v rovnováze a tak vyřešíme velikosti složek reakcí ze tří podmínek rovnováhy (2 momentové k bodům ⓐ a ⓑ a jedné silové ve směru osy *x*).

(a) $\sum F_{i,x} = 0 : [\rightarrow \oplus]$

$$R_{ax} - F_x = 0$$

$$R_{ax} = F_x = \underline{10,0}\,\mathrm{kN}\;[\rightarrow]\checkmark$$

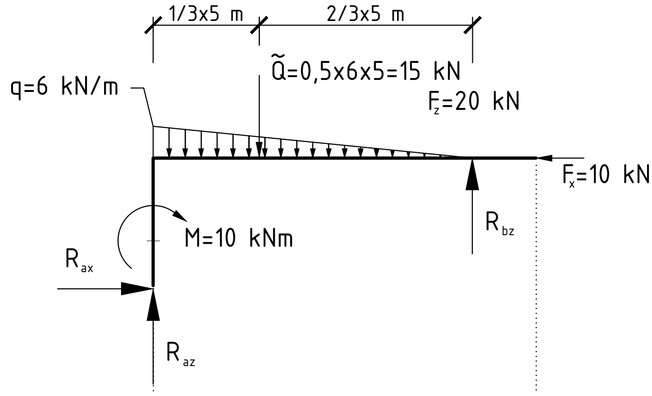
(b) $\sum M_{i,a} = 0 : [\circlearrowleft \oplus]$

$$R_{bz}\cdot 5 - F_z\cdot 6 + F_x\cdot 2 - \frac{1}{2}q\cdot 5\cdot\frac{1}{3}5 - M = 0$$

$$R_{bz} = \frac{F_z\cdot 6 - F_x\cdot 2 + \frac{1}{2}q\cdot 5\cdot\frac{1}{3}5 + M}{5}$$

$$R_{bz} = \frac{20\cdot 6 - 10\cdot 2 + \frac{1}{2}6\cdot 5\cdot\frac{1}{3}5 + 10}{5} = \underline{27,0}\,\mathrm{kN}\;[\uparrow]\checkmark$$

[1] *Vnější vazba* neboli *podpora* zamezuje pohybu (posunu či rotaci) konstrukce. Říkáme, že konstrukci odebírá stupně volnosti. Podle počtu odebraných stupňů volnosti rozlišujeme (v rovině) vazby jednonásobné, dvojnásobné a trojnásobné.



Obrázek 2: Nosník uvolněný z vazeb, reakce

(c) $\sum M_{i,b} = 0 : [\circlearrowright \oplus]$

$$R_{az}\cdot 5 - R_{ax}\cdot 2 + F_z\cdot 1 - \frac{1}{2}q\cdot 5\cdot\frac{2}{3}5 + M = 0$$

$$R_{az} = \frac{R_{ax}\cdot 2 - F_z\cdot 1 + \frac{1}{2}q\cdot 5\cdot\frac{2}{3}5 - M}{5}$$

$$R_{az} = \frac{10\cdot 2 - 20\cdot 1 + \frac{1}{2}6\cdot 5\cdot\frac{2}{3}5 - 10}{5} = \underline{8,0}\,\mathrm{kN}\;[\uparrow]\checkmark$$

Kontrola

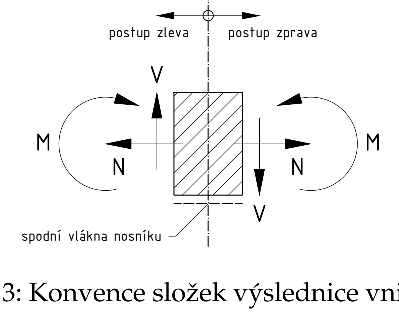
Pro kontrolu lze využít zbývající silové podmínky do svislé osy z.

$\sum F_{i,z} = 0 : [\uparrow \oplus]$

$$R_{az} - \frac{1}{2}q\cdot 5 R_{bz} - F_z = 8 - 0,5\cdot 6\cdot 5 + 27 - 20 = 0\,\mathrm{kN}\;\checkmark$$

Řešení průběhů vnitřních sil N, V, M

Při řešení průběhů vnitřních sil se uplatňuje následující konvence pro složky výslednice vnitřních sil: **Kladné** normálové síly N vyvozují v uvažovaném řezu **tah**, **kladné** posouvající síly V se snaží otočit řezem **ve směru chodu hodinových ručiček** [$\circlearrowright$] a **kladný** moment M **natahuje spodní vlákna** nosníku. Uvedenou konvenci dokumentuje níže uvedený obrázek 3.



Obrázek 3: Konvence složek výslednice vnitřních sil

Normálové síly N

Vykreslení průběhu normálové síly N při postupu zleva (na svislém prutu – „sloupu") se začne v podpoře ⓐ, kde působí reakce $R_{az} = 8,0$ kN se směrem [→] (je třeba natočit si pohled). Reakce vyvozuje tlak, je tedy záporná.[2] Až po konec svislého prutu nepůsobí žádná další normálová síla a tak je průběh konstantní.

Při vykreslování normálové síly na vodorovném prutu („příčli") a při postupu zleva se musí nasčítat všechny síly, které působí na nosník ve smyslu normálové síly pro vodorovný prut. V uvedeném případě působí nalevo pouze vodorovná síla $R_{ax} = 10,0$ kN se směrem [→]. Na kraji vodorovného nosníku má tedy normálová síla velikost 10,0 kN a způsobuje tlak, je tedy záporná. Dále až po konec nosníku nepůsobí další vodorovné zatížení a tak je průběh konstantní o velikosti -10,0 kN. Na konci působí osamělá síla $F_x = 10,0$ kN se směrem [←], která ruší normálovou sílu.

Posouvající síly V

Vykreslení posouvajících sil při postupu zleva (na svislém prutu – „sloupu") se začne v podpoře ⓐ, kde působí reakce $R_{ax} = 10,0$ kN se směrem [↓] (je třeba natočit si pohled). Tato síla je dle dříve uvedené konvence záporná, protože otáčí myšleným řezem protisměru chodu hodinových ručiček.[3] Na svislém prutu dále nepůsobí žádné příčné zatížení a tak je průběh posouvající síly až po zlom konstantní a má velikost -10,0 kN.

Při vykreslování průběhu posouvající síly na vodorovném prutu při postupu zleva je opět zapotřebí nasčítat všechny síly působící ve smyslu posouvající síly pro vodorovný prut. V daném případě se jedná pouze o jednu sílu, kterou je svislá reakce $R_{az} = 8,0$ kN se směrem [↑]. Dále působí na nosník spojité trojúhelníkové zatížení o celkové velikosti:

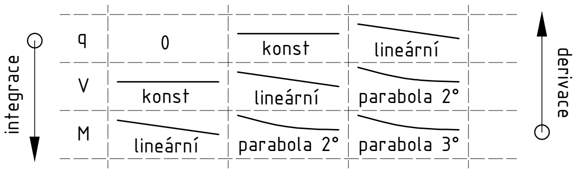
$$\widetilde{Q} = \frac{1}{2}q \cdot 5 = 0,5 \cdot 6 \cdot 5 = 15\ \mathrm{kN}[\downarrow]$$

Hodnota posouvající síly v podpoře ⓑ těsně zleva má velikost:

$$V_b^L = R_{az} - \widetilde{Q} = 8,0 - 15,0 = -7,0\ \mathrm{kN}$$

Průběh posouvající síly v tomto úseku lze jednoduše určit na základě diferenciálních podmínek rovnováhy a z nich plynoucího *derivačně-integračního schématu* na obrázku 4.

Vzhledem k tomu, že spojité zatížení q je lineární pak po myšlené integraci je průběh posouvající síly parabolou 2. stupně. Na vodorovný nosník působí dále reakce $R_{bz} = 27,0$ kN se směrem [↑]. Hodnota



Obrázek 4: Derivačně-integrační schéma

posouvající síly v podpoře ⓑ těsně zprava má tedy velikost:

$$V_b^P = R_{az} - \widetilde{Q} + R_{bz} = 8,0 - 15,0 + 27,0 = 20,0\ \mathrm{kN}$$

Na nosník až po sílu F_z nepůsobí další svislé zatížení a tak je hodnota posouvající síly konstantní a má velikost 20,0 kN. V místě působiště síly $F_z = 20,0$ se směrem [↓] se ruší hodnota posouvající síly.

Ohybové momenty M

Ohybové momenty se vždy určují jako součet statických momentů všech sil, osamělých momentů i reakcí k danému řezu. Vykreslení ohybových momentů se řídí následující konvencí: **hodnota momentu se vynáší na stranu tažených vláken, kladné pod základní čáru, záporné nad základní čáru!** Jednotlivé hodnoty momentů pro zadaný příklad lze při postupu zleva určit následujícím způsobem: [↻ ⊕]

(A) svislý prut („sloup" – index s)

$$M_{a,s} = \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M^L_{0,5m,s} = -R_{ax} \cdot 0,5 = -10 \cdot 0,5 = \underline{-5,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M^P_{0,5m,s} = -R_{ax} \cdot 0,5 + M = -10 \cdot 0,5 + 10 = \underline{5,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{2m,s} = -R_{ax} \cdot 2 + M = -10 \cdot 2 + 10 = \underline{-10,0}\ \mathrm{kNm}$$

(B) vodorovný prut („příčel" – index p)

$$M_{0m,p} = M_{2m,s} = \underline{-10,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{b,p} = R_{az} \cdot 5 - R_{ax} \cdot 2 + M - \frac{1}{2}q \cdot 5\frac{2}{3}5 =$$

$$8,0 \cdot 5 - 10,0 \cdot 2 + 10 - \frac{1}{2}6 \cdot 5\frac{2}{3}5 = \underline{-20,0}\ \mathrm{kNm}$$

$$M_{6m,p} = \underline{0,0}\ \mathrm{kNm}$$

Podoba momentové křivky lze odvodit z *derivačně-integračního schématu* na obrázku 4. Konstantní posouvající síly způsobují lineární průběh momentů a posouvající síly s průběhem v podobě paraboly 2. stupně vedou na momenty ve tvaru paraboly 3. stupně.

Kontrola

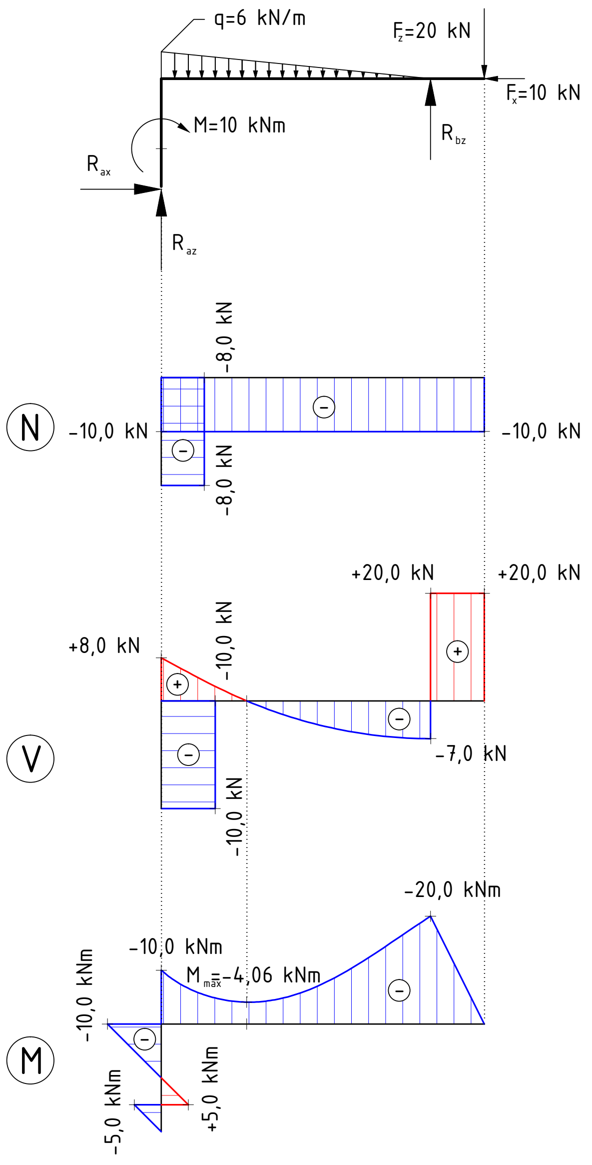
Kontrolu lze provést výpočtem zprava. [↻ ⊕] Např.:

$$M_{b,p} = -Fz \cdot 1 = -20,0 \cdot 1 = -20,0\ \mathrm{kNm}\ \checkmark$$

[2]**Kladné** hodnoty normálové síly N vynášíme **nad** základní čáru, **záporné** hodnoty N vynášíme **pod** základní čáru.

[3]**Kladné** hodnoty posouvající síly V vynášíme **nad** základní čáru, **záporné** hodnoty V vynášíme **pod** základní čáru.

Průběhy vnitřních sil, jejichž stanovení bylo popsáno výše dokumentuje následující obrázek 5.



Obrázek 5: Průběhy vnitřních sil

Stanovení velikosti M_{max}

Pro stanovení velikosti maximálního ohybového momentu se musí nejprve určit poloha tzv. *přechodového průřezu*. Tímto průřezem se myslí místo, v němž je hodnota posouvající síly rovna **nule**. V zadaném případě se poloha přechodového průřezu určí z následující rovnice:

$$V_b^L + \frac{1}{2}q' \cdot x = 0$$

kde

$$\frac{q\prime}{q} = \frac{x}{l} \Rightarrow q' = \frac{qx}{l}$$

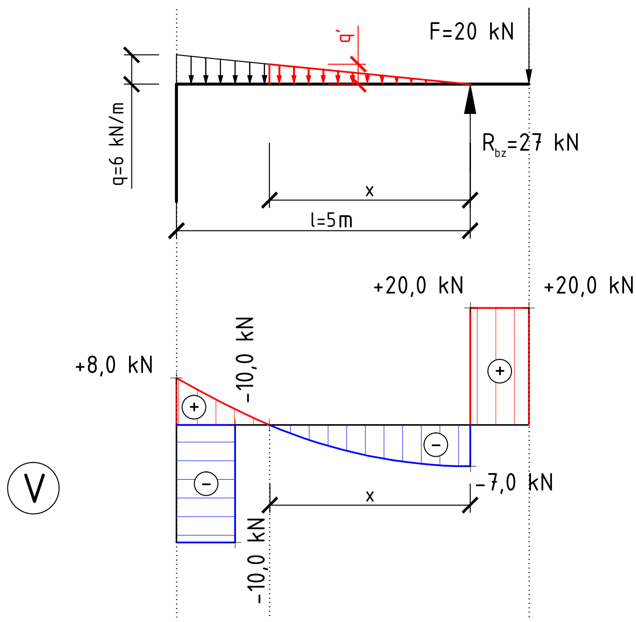
Pro vzdálenost přechodového průřezu od podpory nosníku ⓑ je tedy platí vztah:

$$x = \frac{-2 \cdot V_b^L}{q'} = \frac{-2 \cdot V_b^L}{\frac{qx}{l}} \Rightarrow x^2 = \frac{-2 \cdot V_b^L \cdot l}{q}$$

$$x = +\sqrt{\frac{2 \cdot V_b^L \cdot l}{q}} = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-7,0) \cdot 5}{6,0}} =$$

$$x = 3,41565 \text{ m}$$

Uvedený výpočet polohy přechodového průřezu dokumentuje následující obrázek 6.



Obrázek 6: Přechodový průřez

Hodnotu maximálního momentu M_{max} lze pak určit postupem zprava takto:

$$M_{max} = -F_z(1 + x) + R_{bz} \cdot x - \frac{1}{2}q'x\frac{1}{3}x =$$

$$= -20(1 + x) + 27 \cdot x - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}\frac{1}{3}x =$$

$$= -20 \cdot 4,41565 + 27 \cdot 3,41565 - \frac{1}{2}\frac{6 \cdot 3,41565^3}{5}\frac{1}{3} =$$

$$= \underline{-4,06} \text{ kNm}$$