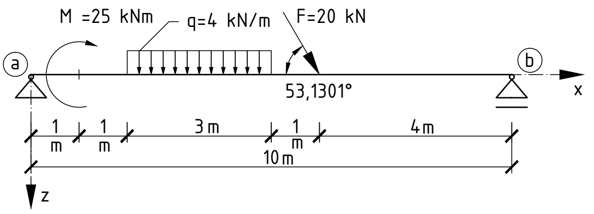
Vzorový příklad č. 4

Prostý nosník zatížený 3 typy zatížení

Zadání

Pro daný nosník a uvedené zatížení na obrázku 1 vypočítejte velikost reakcí vnějších vazeb R_{ax}, R_{az}, R_{bz} a stanovte průběhy vnitřních sil N, V, M.

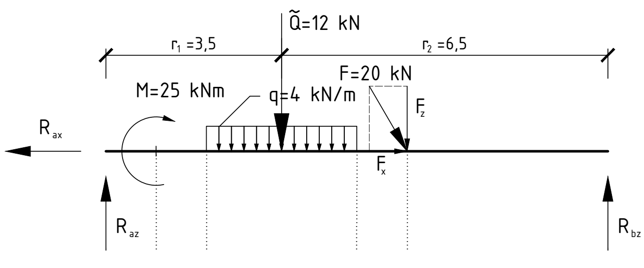


Obrázek 1: Zadání

Řešení

Řešení reakcí

Pro vyřešení reakcí na zadaném prostém nosníku je třeba nejprve provést uvolnění nosníku z vnějších vazeb a účinek těchto vnějších vazeb[1] nahradit složkami reakcí R_{ax}, R_{az}, R_{bz}. Smysl složek reakcí lze libovolně zvolit a při následujícím výpočtu se jejich orientace buď potvrdí (znaménko $\oplus$) nebo obrátí (znaménko $\ominus$). Uvolněním nosníku a nahrazením vazeb složkami reakcí vznikne soustava sil v rovině. Tato soustava má být v rovnováze a tak vyřešíme velikosti složek reakcí ze tří podmínek rovnováhy (2 momentové k bodům ⓐ a ⓑ a jedné silové do osy nosníku *x*).



Obrázek 2: Nosník uvolněný z vazeb, reakce

(a) $\sum F_{i,x} = 0$: $[\rightarrow \oplus]$

$$-R_{ax} + F_x = -R_{ax} + F \cdot \cos 53,1301 = 0$$

$$R_{ax} = F \cdot \cos 53,1301 = 20 \cdot 0,6 = \underline{12,0} \text{ kN } [\leftarrow] \checkmark$$

(b) $\sum M_{i,a} = 0$: $[\circlearrowleft \oplus]$

$$R_{bz} \cdot 10 - F_z \cdot 6 - \widetilde{Q} \cdot (2 + \frac{1}{2}3) - M = 0$$

$$R_{bz} \cdot 10 - F \cdot 6 \cdot \sin 53,1301 - q \cdot 3 \cdot (2 + \frac{1}{2}3) - M = 0$$

$$R_{bz} = \frac{F \cdot 6 \cdot \sin 53,1301 + q \cdot 3 \cdot (2 + \frac{1}{2}3) + M}{10}$$

$$R_{bz} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 0,8 + 4 \cdot 3 \cdot 3,5 + 25}{10} = \underline{16,3} \text{ kN } [\uparrow] \checkmark$$

(c) $\sum M_{i,b} = 0$: $[\circlearrowright \oplus]$

$$R_{az} \cdot 10 - F_z \cdot 4 - \widetilde{Q} \cdot (5 + \frac{1}{2}3) + M = 0$$

$$R_{az} \cdot 10 - F \cdot 4 \cdot \sin 53,1301 - q \cdot 3 \cdot (5 + \frac{1}{2}3) + M = 0$$

$$R_{az} = \frac{F \cdot 4 \cdot \sin 53,1301 + q \cdot 3 \cdot (5 + \frac{1}{2}3) - M}{10}$$

$$R_{az} = \frac{20 \cdot 4 \cdot 0,8 + 4 \cdot 3 \cdot 6,5 - 25}{10} = \underline{11,7} \text{ kN } [\uparrow] \checkmark$$

Kontrola

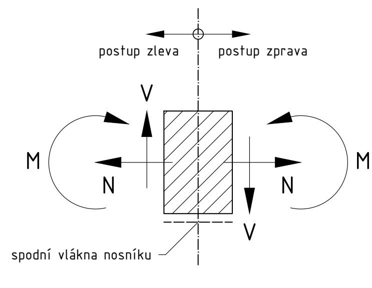
Pro kontrolu lze využít zbývající silové podmínky do svislé osy z.

$\sum F_{i,z} = 0$: $[\uparrow \oplus]$

$$R_{az} - \widetilde{Q} - F_z + R_{bz} = 11,7 - 12,0 - 16 + 16,3 = 0 \text{ kN} \checkmark$$

Řešení průběhů vnitřních sil N, V, M

Při řešení průběhů vnitřních sil se uplatňuje následující konvence pro složky výslednice vnitřních sil: **Kladné** normálové síly N vyvozují v uvažovaném řezu **tah**, **kladné** posouvající síly V se snaží otočit řezem **ve směru chodu hodinových ručiček** $[\circlearrowright]$ a **kladný** moment M **natahuje spodní vlákna** nosníku. Uvedenou konvenci dokumentuje níže uvedený obrázek 3.



Obrázek 3: Konvence složek výslednice vnitřních sil

[1] *Vnější vazba* neboli *podpora* zamezuje pohybu (posunu či rotaci) konstrukce. Říkáme, že konstrukci odebírá stupně volnosti. Podle počtu odebraných stupňů volnosti rozlišujeme (v rovině) vazby jednonásobné, dvojnásobné a trojnásobné.

Normálové síly N

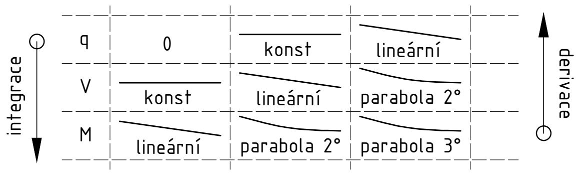
Vykreslení průběhu normálové síly N při postupu zleva se začne v podpoře ⓐ, kde působí reakce $R_{ax} = 12,0$ kN se směrem [←]. Reakce vyvozuje tah, je tedy kladná.[2] V místě působiště síly F působí její složka $F_x = 12,0$ kN se směrem [→]. Uvedená složka způsobuje tlak a ruší hodnotu vodorovné reakce. Dále jsou na nosníku N nulové.

Posouvající síly V

Vykreslení posouvajících sil při postupu zleva se začne v podpoře ⓐ, kde působí reakce $R_{az} = 11,7$ kN se směrem [↑]. Tato síla je dle dříve uvedené konvence kladná.[3] Až po začátek rovnoměrného spojitého zatížení q nepůsobí na nosník žádná svislá síla a tak je průběh posouvající síly v tomto úseku konstantní. Dále působí na nosník rovnoměrné spojité zatížení $q = 4,0$ kN/m. Toto zatížení, které působí na délce 3,0 m lze v jeho těžišti nahradit silou $\widetilde{Q} = 3,0 \cdot 4,0 = 12,0$ kN. Hodnota posouvající síly na konci spojitého zatížení je tedy:

$$V_{5m} = R_{az} - \widetilde{Q} = 11,7 - 12,0 = \underline{-0,3}\,\text{kN}$$

Průběh posouvající síly v tomto úseku lze jednoduše určit na základě diferenciálních podmínek rovnováhy a z nich plynoucího *derivačně-integračního schématu* na obrázku 4.



Obrázek 4: Derivačně-integrační schéma

Na nosník až po sílu F nepůsobí další svislé zatížení a tak je hodnota posouvající síly konstantní a má velikost -0,3 kN. V místě působiště síly F působí svislá složka této síly o velikosti $F_z = 16,0$ kN se směrem [↓]. Vzhledem k tomuto směru je při postupu zleva dle zavedené konvence záporná a hodnota posouvající síly se v tomto místě mění skokem na hodnotu:

$$V_{6m} = -0,3 - 16,0 = \underline{-16,3}\,\text{kN}$$

Na nosník pak působí jen reakce $R_{bz} = 16,3$ kN se směrem [↑] a to v místě podpory ⓑ.

Ohybové momenty M

Ohybové momenty se vždy určují jako součet statických momentů všech sil, osamělých momentů i reakcí k danému řezu. Vykreslení ohybových momentů se řídí následující konvencí: **hodnota momentu se vynáší na stranu tažených vláken, kladné pod základní čáru, záporné nad základní čáru!** Jednotlivé hodnoty momentů pro zadaný příklad lze při postupu zleva určit následujícím způsobem: [↻ ⊕]

$$M_{1m}^{L} = R_{az} \cdot 1 = 11,7 \cdot 1 = \underline{11,7}\,\text{kNm}$$

$$M_{1m}^{P} = M_1 + M = 11,7 + 25 = \underline{36,7}\,\text{kNm}$$

$$M_{2m} = R_{az} \cdot 2 + M = 11,7 \cdot 2 + 25 = \underline{48,4}\,\text{kNm}$$

$$M_{5m} = R_{az} \cdot 5 + M - q \cdot \frac{1}{2} 3^2 =$$

$$= 11,7 \cdot 5 + 25 - 4 \cdot 0,5 \cdot 9 = \underline{65,5}\,\text{kNm}$$

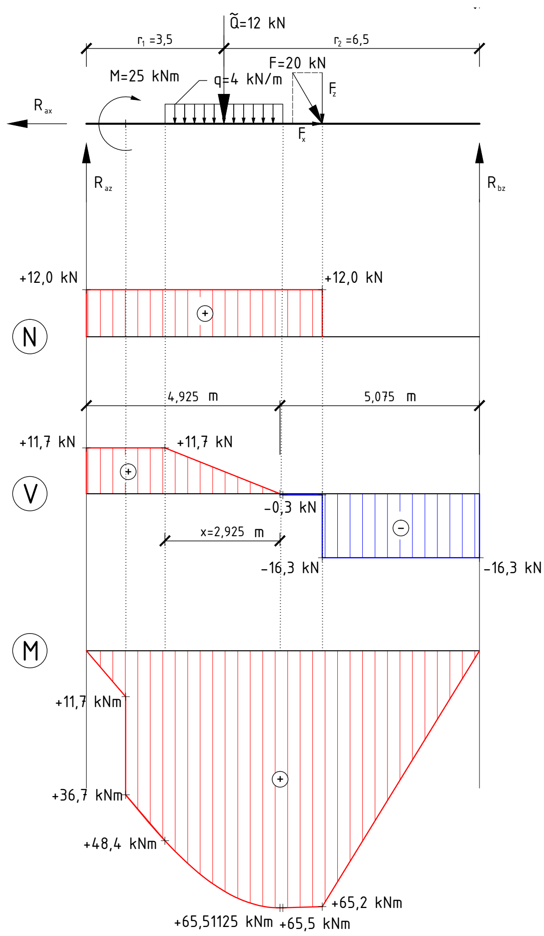
$$M_{6m} = R_{az} \cdot 6 + M - q \cdot 3(\frac{1}{2} 3 + 1) =$$

$$= 11,7 \cdot 6 + 25 - 4,0 \cdot 3(1,5 + 1) = \underline{65,2}\,\text{kNm}$$

Kontrola

Kontrolu lze provést výpočtem zprava. [↺ ⊕] Např.:

$$M_{6m} = R_{bz} \cdot 4 = 16,3 \cdot 4 = 65,2\,\text{kNm} \checkmark$$



Obrázek 5: Průběhy vnitřních sil

[2] **Kladné** hodnoty normálové síly N vynášíme **nad** základní čáru, **záporné** hodnoty N vynášíme **pod** základní čáru.

[3] **Kladné** hodnoty posouvající síly V vynášíme **nad** základní čáru, **záporné** hodnoty V vynášíme **pod** základní čáru.

Stanovení velikosti M_{max}

Pro stanovení velikosti maximálního ohybového momentu se musí nejprve určit poloha tzv. *přechodového průřezu*. Tímto průřezem se myslí místo, v němž je hodnota posouvající síly rovna **nule**. V zadaném případě se poloha přechodového průřezu určí z následující rovnice:

$$R_{az} - 4 \cdot x = 0$$

$$x = \frac{R_a z}{4} = \frac{11,7}{4} = 2,925 \text{ m}$$

Vzdálenost přechodového průřezu od konce nosníku *a* je tedy $2 + x = 2 + 2,925 = 4,925$ m.

Hodnotu maximálního momentu M_{max} lze pak určit postupem zleva takto:

$$M_{max} = R_{az} \cdot 4,925 + 25 - q \cdot \frac{1}{2} 2,925^2 =$$

$$= 11,7 \cdot 4,925 + 25 - 4,0 \cdot 0,5 \cdot 2,925^2 = \underline{65,1125} \text{ kNm}$$