Distribuční funkce pevnosti svazku křehkých vláken

Václav Sadílek

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky

11. prosince 2013

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora tvorby excelentních výzkumných týmů mezioborového výzkumu na VUT, CZ.1.07/2.3.00/30.0005

Osnova

1. Motivace
2. Distribuční funkce pevnosti
3. Implementace
4. Databáze
5. Aproximace
6. Závěr

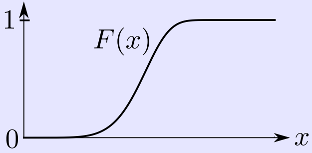
Motivace

- využití známého vztahu pro výpočet distribuční funkce pevnosti svazku z křehkých vláken [Daniels, 45]
- navržení aproximace, která by umožnila získat hodnoty distribuční funkce bez nutnosti vyčíslovat složitý vzorec obsahující rekurzi

Svazek ze 3 křehkých vláken

- po porušení jednoho vlákna se zatížení rovnoměrně rozdělí na zbývající vlákna

—— $F(x)$



$G_3(\sigma) =$

$$F(\sigma)^3 +$$

$$3F(\sigma)^2\left[F(3\sigma) - F(\sigma)\right] +$$

$$3F(\sigma)\left[F(\tfrac{3}{2}\sigma) - F(\sigma)\right]^2 +$$

$$6F(\sigma)\left[F(\tfrac{3}{2}\sigma) - F(\sigma)\right]\left[F(3\sigma) - F(\tfrac{3}{2}\sigma)\right]$$

zatížení / vlákno

Pevnost svazku křehkých vláken

- distribuční funkce pevnosti jednoho vlákna má Weibullovo rozdělení

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{s}\right)^m\right]$$

- distribuční funkce pevnosti svazku křehkých vláken (rekurzivní vztah)

$$G_n(x) = \mathrm{P}(Q_n^* \leq x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} [F(x)]^k \, G_{n-k}\left(\tfrac{n\,x}{n-k}\right),$$

$$\text{kde } G_1(x) \equiv F(x),\ G_0(x) \equiv 1 \text{ a } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- aproximace pomocí normálního rozdělení $N(\mu_{est}, \sigma_{est})$ pro $n \to \infty$

$$\mu_{est} = m^{\frac{-1}{m}} s \cdot c + n^{\frac{-2}{3}} s \cdot m^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{3}\right)} e^{\frac{-1}{3m}} 0.996$$

$$\sigma_{est} = m^{\frac{-1}{m}} s \sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}, \quad c = e^{\frac{-1}{m}}$$

Pevnost svazku vláken

- levý chvost distribuční funkce jednoho vlákna může být aproximován jako

$$G_1(x) = F(x) \approx \left(\frac{x}{s}\right)^m, \text{pro } x \to 0$$

- asymptota levého chvostu distribuční funkce G_n je potom $F_\mathrm{l} = \left(\frac{x}{s_n^*}\right)^{mn}$, kde

$$s_n^* = \frac{s}{\left(d_n^*\right)^{\frac{1}{n\,m}}}, \quad d_n^* = (-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{m(n-k)} d_{n-k}^*$$

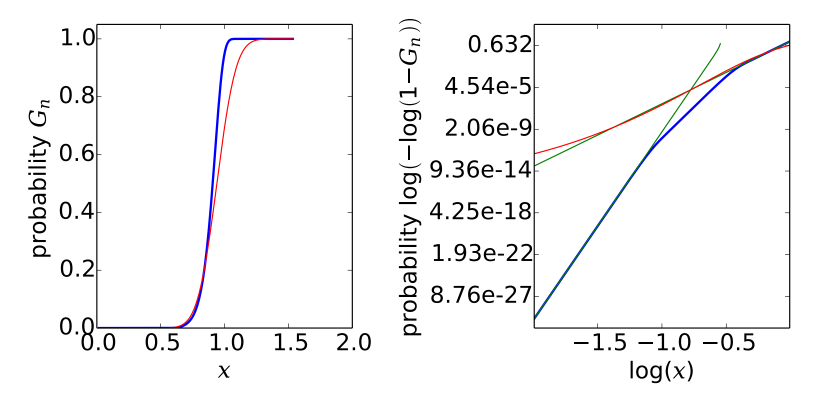
- asymptota pravého chvostu distribuční funkce G_n

$$F_\mathrm{r}(x) = 1 - \exp\left[-n\left(\frac{x}{s}\right)^m\right]$$

Weibullův pravděpodobnostní graf

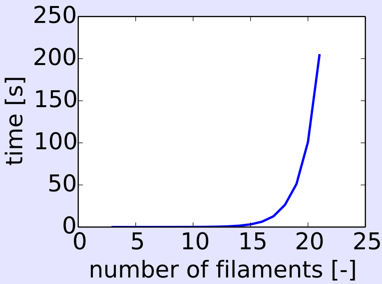
- transformace nelineární funkce na lineární

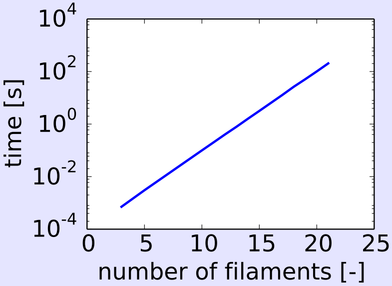
$$\ln(-\ln(1 - G(x))) = m\ln(x) - m\ln(s)$$



Implementace (I)

- první implementace prochází všechny úrovně rekurze
- počet vyčíslení rekurze je $2^n - 1$ (10^{301} pro $n = 1000$)





Zrychlení implementace (II)

$$G_n(x) = \mathrm{P}(Q_n^* \leq x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} [F(x)]^k \, G_{n-k}\left(\frac{n\,x}{n-k}\right)$$

- analýzou vztahu bylo zjištěno, že hodnoty x a G_n se opakují v závislosti na parametrech n a k
- hodnoty x lze předpočítat $x_i = \dfrac{nx}{n-i}$ pro $i = 1 \dots n$
- předřešení binomických součinitelů včetně znaménka $(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$
- uložení výsledků jednotlivých úrovní rekurze G_n, kterých je $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (500500 pro $n = 1000$)

\+ významné zrychlení výpočtu rekurze

– limitní počet vláken cca 30 z důvodu přesnosti počítače (double precision)

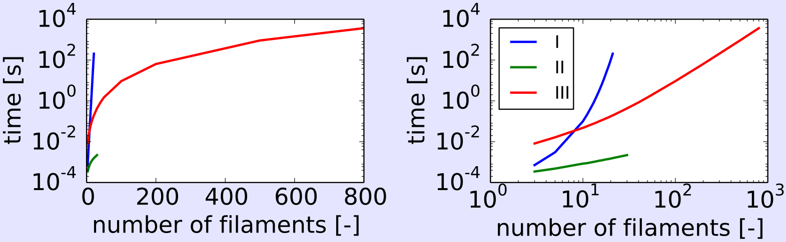
Zvýšení přesnosti (III)

- balíček pro výpočty s libovolnou přesností `mpmath` (library for multiprecision floating-point arithmetic)
- byla zvolena přesnost 1000 platných číslic, která je optimální z hlediska časové efektivity výpočtu

\+ možnost výpočtu pevnosti pro velké počty vláken ve svazku

− zpomalení v závislosti na zadané přesnosti výpočtu

Porovnání rychlostí

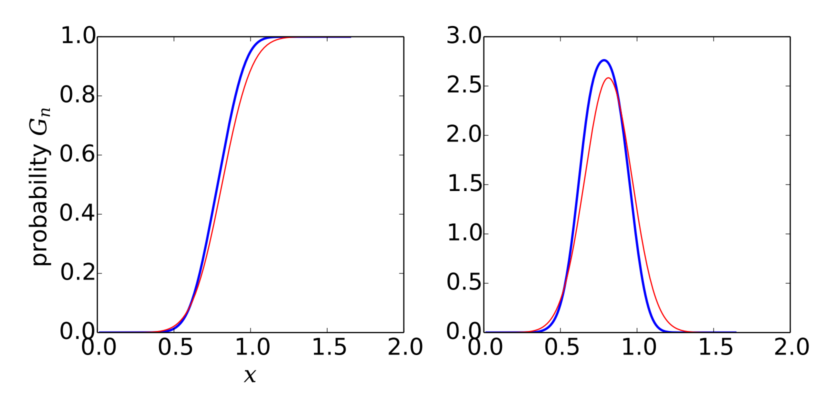


n_f	I	II	III
50	3910 let	0.00355 s	1.5 s
1000	10^{291} let	0.07 s	1.96 h
1500	—	0.1 s	6.52 h

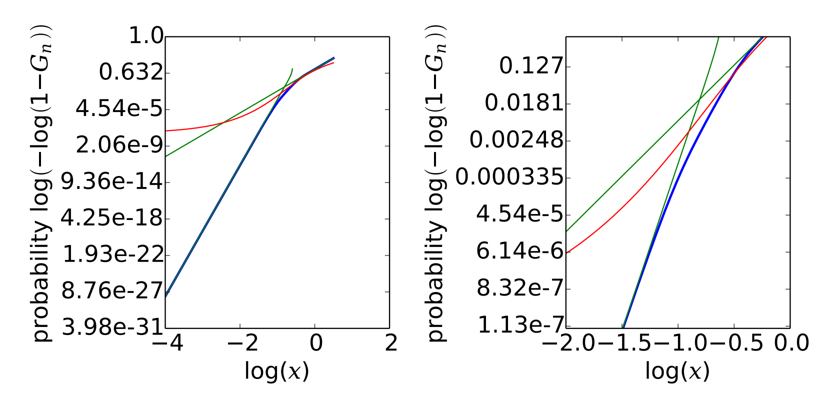
Databáze

- balíček `multiprocessing` pro automatizaci výpočtu a maximální využití počítače – výpočet ve více procesech
- databáze distribučních funkcí pevnosti pro parametr měřítka $s = 1$ a různé:
  - parametry tvaru $m =$ 3–15, 20, 24, 40, 50, 100 a
  - počty vláken $n =$ 3–50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, (1000)

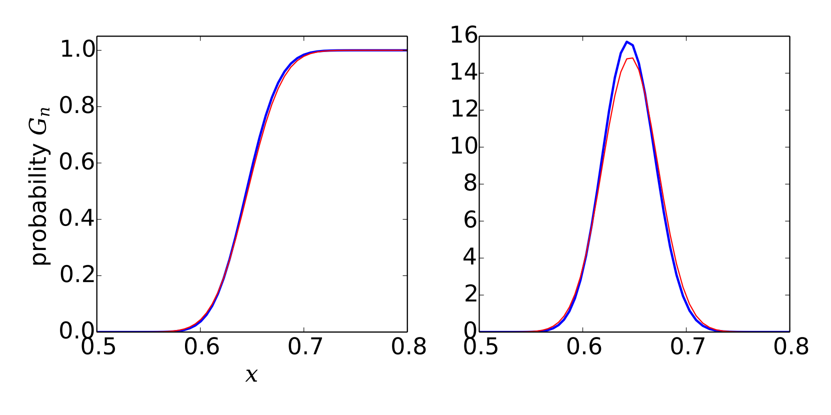
Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti – $m = 6$, $n = 3$



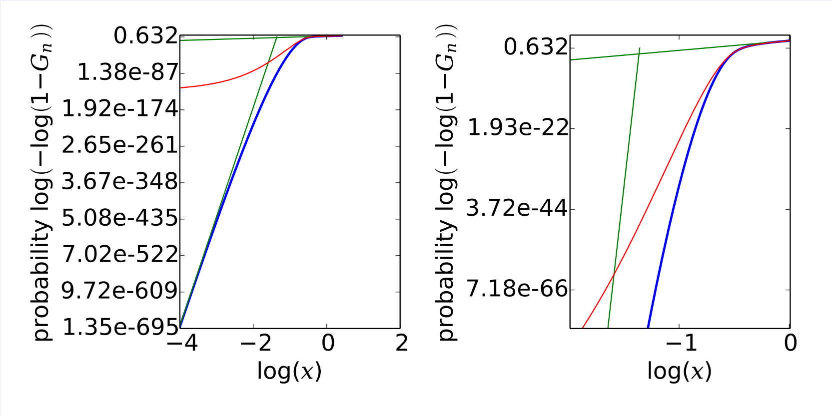
Weibullův graf – $m = 6,\ n = 3$



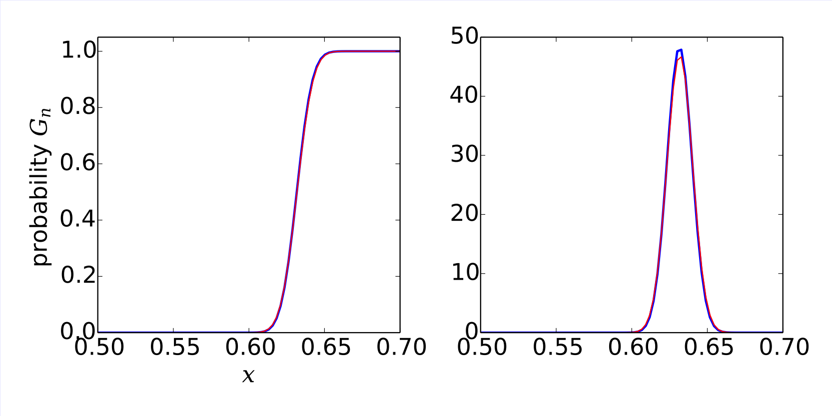
Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti – $m = 6$, $n = 100$



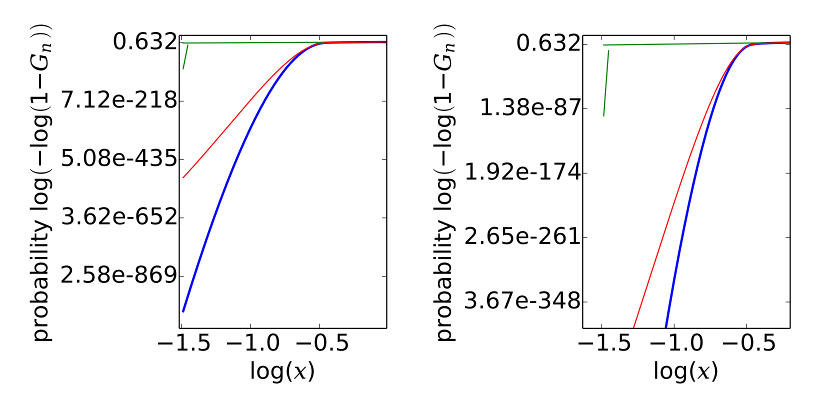
Weibullův graf – $m = 6$, $n = 100$



Distribuční funkce a hustota pravděpodobnosti – $m = 6$, $n = 1000$



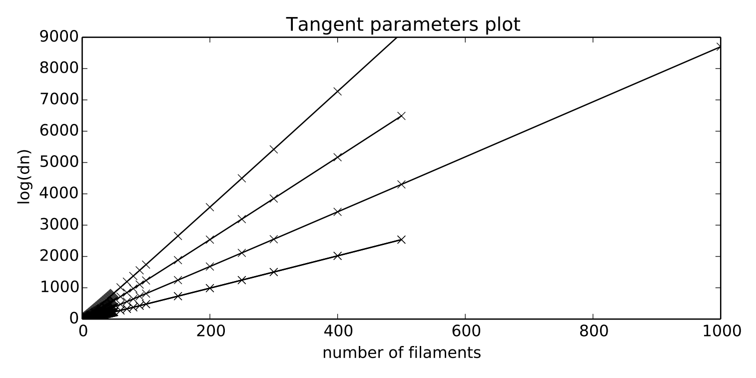
weibullův graf – $m = 6$, $n = 1000$



Aproximace distribuční funkce pevnosti svazku vláken

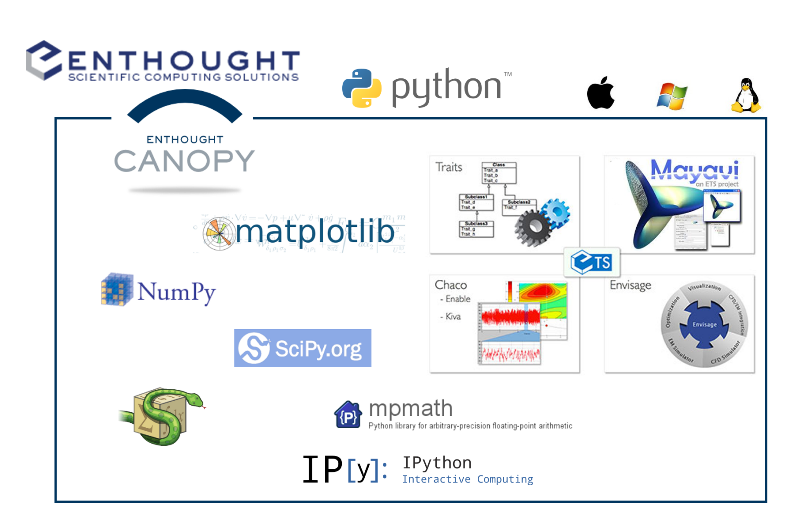
- asymptota levého chvostu distribuční funkce $F_1 = \left(\frac{x}{s_n^*}\right)^{mn}$, kde

$$s_n^* = \frac{s}{(d_n^*)^{\frac{1}{n\,m}}}, \quad d_n^* = (-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{m(n-k)} d_{n-k}^*$$



Závěr

- analýzou rekurzivního vztahu distribuční funkce bylo možné vytvořit její implementaci v jazyce Python
- na základě této implementace bylo možné vytvořit databázi distribučních funkcí pro různé parametry Weibullova rozdělení
- tato data slouží pro odvození aproximační funkce, která by měla vracet hodnoty distribuční funkce bez nutnosti výpočtu rekurze


ENTHOUGHT
SCIENTIFIC COMPUTING SOLUTIONS
python™
ENTHOUGHT
CANOPY
matplotlib
NumPy
SciPy.org
mpmath
Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic
IP[y]: IPython
Interactive Computing
Traits
Mayavi
an ETS project
ETS
Chaco
- Enable
- Kiva
Envisage

Děkuji za pozornost.

Distribuční funkce pevnosti svazku křehkých vláken

Václav Sadílek

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky

11. prosince 2013