

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

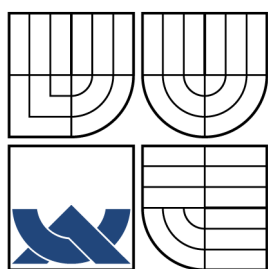
MODELOVÁNÍ STATISTICKO-ENERGETICKÉHO VLIVU
VELIKOSTI BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ POMOCÍ
VÝPOČTOVÉ MECHANIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

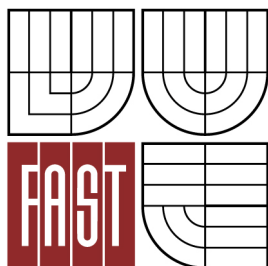
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

VÁCLAV SADÍLEK

BRNO 2008



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

MODELOVÁNÍ STATISTICKO-ENERGETICKÉHO VLIVU VELIKOSTI BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ POMOCÍ VÝPOČTOVÉ MECHANIKY

MODELING STATISTICAL-ENERGETIC SIZE EFFECT ON STRENGTH OF
CONCRETE STRUCTURES USING COMPUTATIONAL MECHANICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
DIPLOMA THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

VÁCLAV SADÍLEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

DOC. ING. MIROSLAV VOŘECHOVSKÝ, PH.D.

BRNO 2008

ZDE VLOŽIT LIST ZADÁNÍ

Z důvodu správného číslování stránek

ZDE VLOŽIT PRVNÍ LIST LICENČNÍ
SMOUVY

Z důvodu správného číslování stránek

ZDE VLOŽIT DRUHÝ LIST LICENČNÍ
SMOUVY

Z důvodu správného číslování stránek

ABSTRAKT

Práce se zabývá použitím pokročilých metod výpočtové stochastické nelineární lomové mechaniky pro predikci pevnosti betonových konstrukcí různých velikostí. Výsledky výpočtů jsou porovnány s experimentálními daty ze zkoušek na reálných betonových vzorcích. Pozornost je věnována především podchycení statisticko-energetického vlivu velikosti na pevnost konstrukce za použití autokorelovaných náhodných polí lokální materiálové pevnosti a využití pokročilé lomové mechaniky modelovat deterministické vlivy. Predikce pevností velmi velkých konstrukcí je provedena pomocí Weibullova integrálu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Vliv velikosti na pevnost, vzorek tvaru kosti, náhodné pole, lom, trhлина, materiálový model Nonlinear Cementitious, tvorba trhlín, materiálový model Microplane, stochastická (pravděpodobnostní) analýza, program ATENA, Weibullův integrál, nehomogenita materiálu, beton.

ABSTRACT

The subject of the thesis is the application of advanced methods of computational stochastic nonlinear fracture mechanics for strength prediction of concrete structures with various sizes. Computational results are compared to experimental results of tests on real concrete specimens. The main target is to capture the complex statistical-energetic size effect on strength by using autocorrelated random fields representing the local material strength and by exploiting advanced theory of fracture-mechanics to reflect deterministic effects. The extension of computational prediction for large sizes is performed through Weibull integral solutions.

KEYWORDS

Size effect on strength, dog-bone specimens, random field, fracture, crack, Nonlinear Cementitious model, crack initiation, Microplane model, stochastic analysis, ATENA software, Weibull integral, material inhomogeneity, concrete.

SADÍLEK, Václav. *Modelování statisticko-energetického vlivu velikosti betonových konstrukcí pomocí výpočtové mechaniky: diplomová práce*. Brno, 2008. Počet stran 84. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta stavební. Ústav stavební mechaniky. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne

.....
podpis diplomanta

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu diplomové práce panu doc. Ing. Miroslavu Vořechovskému, Ph.D. za odborné konzultace, ochotu a trpělivost při vedení mé diplomové práce. Také děkuji své rodině za jejich podporu během studia.

Práce vznikla v rámci projektů:

GA ČR 103/06/P086

MŠMT 0021630519

Typeset by $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ

OBSAH

Úvod	23
1 Vliv velikosti	25
1.1 Deterministický vliv velikosti	25
1.2 Statistický vliv velikosti a klasická Weibullova teorie	26
1.3 Weibullův integrál pro konstrukce s nerovnoměrným namáháním . . .	28
1.4 Nelokální Weibullova teorie	30
1.5 Vliv závislostí lokálních pevností	31
2 Nelineární výpočtová lomová mechanika	33
2.1 Vztah mezi napětím a poměrným přetvořením v betonu	33
2.1.1 Jednoosé ekvivalentní poměrné přetvoření	33
2.1.2 Tah před vznikem trhliny	34
2.1.3 Tah po vzniku trhliny	34
2.1.4 Tlak před dosažením maximálního napětí	35
2.1.5 Tlak po dosažení maximálního napětí	35
2.2 Lokalizace přetvoření a její omezovače	36
2.2.1 Zdůvodnění zavedení Crack band modelu	36
2.2.2 Crack band model	38
2.3 Modely rozetřených (rozmazaných) trhlin	40
2.4 Vznik trhliny	41
2.5 Dvouosá napjatost – kritéria porušení	41
2.5.1 Tahové porušení	41
2.5.2 Tlakové porušení	42
2.6 3D Nonlinear Cementitious 2	43
2.7 Materiálový model Microplane	43
2.8 Výpočtová iterační metoda Newton-Raphson	44
3 Použité programy	45
3.1 ATENA	45
3.2 FReET a SARA	45
4 Modelování vzorků tvaru kosti	47
4.1 Úvod	47
4.2 Základní údaje z experimentů	48
4.3 Nominální napětí, pevnost a poměrné přetvoření	49
4.4 Deterministický model	50
4.4.1 2D modelování	50

4.4.2	Škálování pomocí šířky lokalizační zóny a lomové energie . . .	50
4.4.3	3D modely	54
4.5	Vliv oslabení okrajové vrstvy	58
4.6	Stochastický model	59
4.6.1	Náhodná pole lokální pevnosti	59
4.6.2	Použití Weibullova integrálu	69
4.7	Výsledky	73
5	Nosník namáhaný na čtyřbodový ohyb - Koide, Akita	77
5.1	Úvod	77
5.2	Použití Weibullova integrálu	79
6	Závěr	85
	Literatura	87
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	93

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Porovnání odezvy geometricky podobných vzorků různých velikostí namáhaných trojbodovým ohybem. Úplně vpravo je křivka vlivu velikosti (závislost nominální pevnosti konstrukce na velikosti).	26
1.2	Vlevo: Řetěz s N články a jednorozměrná tyč rozdělená na N referenčních objemů V_r . Vpravo: Spolehlivost této konstrukce o délce D podle rovnice 1.4 (při použití bilogaritmického měřítka je grafem přímka).	27
1.3	Znázornění náhodné pevnosti pomocí svazku vláken a referenčního prvku objemu. Referenční velikost a s -krát zvětšená konstrukce Vlevo: nesprávné škálování použitím svazku vláken. Vpravo: použití referenčních prvků objemu v řešení využívajícím Weibullův integrál.	29
2.1	Graf ekvivalentního jednoosého napětí a poměrného přetvoření rozdělený na čtyři materiálové stavy.	34
2.2	σ - ε diagram betonu při tlakovém namáhání.	35
2.3	(a) Dva články spojené do série, (b) σ - ε křivka materiálu prvního článku, (c) σ - ε křivka druhého článku a (d) výsledná σ - ε křivka.	36
2.4	(a) N stejných článků spojených do série, (b) σ - ε křivka pro různý počet prvků $N = 1, 2, 4, 8$ a (c) křivka pro $N = 1000$ (pozn. osa ε není v měřítku).	37
2.5	(a) Homogenní prut, (b) σ - ε křivka materiálu, (c) prut rozdělený na N stejných částí a (d) výsledná σ - ε křivka.	38
2.6	(a) Prut rozdělený na konečné prvky o velikosti c_b (crack band), (b) prut rozdělený na prvky $h \neq c_b$, (c) σ - ε křivka prutu (a), (d) σ - ε křivka prutu (b) a (e) velmi velký prvek (snapback).	38
2.7	Úprava σ - ε diagramu pro různé velikosti prvků (podle Vořechovský [34]).	39
2.8	Exponenciální funkce pro otevření trhliny (w = šířka trhliny).	40
2.9	Fixované (vpravo) a rotované (vlevo) trhliny.	40
2.10	Aproximace napětí při otevírání trhliny. Platí při lineárním rozdělení poměrných přetvoření (Vořechovský [34]).	41
2.11	Funkce poruchy betony při dvouosém namáhání.	42
2.12	Postup výpočtu poměrných přetvoření, napětí a sil při použití různých materiálových modelů (a) klasický materiálový model, (b) materiálový model Microplane.	43
2.13	Grafické znázornění principu klasické Newton-Raphsonovy metody.	44
3.1	Vzájemná interakce programů Sara, Atena a FReET.	45

4.1	Vzorky tvaru psí kosti testované van Vliet a van Mier [28]: velikost A až F, modelováno 2D v programu ATENA	48
4.2	Porovnání grafů napětí vs. poměrné přetvoření získaných deterministickým výpočtem pro materiálový model Microplane a NLCM pro různé velikosti konstrukce. Vpravo dole: nominální pevnost v závislosti na velikosti konstrukce pro oba materiálové modely, porovnání se středními hodnotami pevnosti získanými z experimentu.	52
4.3	Graf změny velikosti konstrukce pomocí G_F v bilogaritmickém měřítku.	53
4.4	Porovnání σ - ε grafů 2D a 3D modelů.	55
4.5	Levý: Rozdělení poměrného přetvoření po hraně průřezu v místě zúžení. Porovnání výsledků z ATENY s analýzou, kterou provedli van Vliet a van Mier [29]. Vpravo: Model se třemi homogenními vrstvami v programu ATENA 3D.	57
4.6	Porovnání křivek vlivu velikosti „deterministické“ a „oslabené vrstvy“ provedené s Microplane modelem.	58
4.7	Nahoře-vlevo: Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti znáhodněného parametru K_1 (Eq. 4.8). Dole-vlevo: Autokorelační funkce (Eq. 4.9). Vpravo: Realizace Weibullova náhodného pole K_1 v porovnání se vzorky velikosti A – E. Čárkované linie znázorňují střední hodnotu a střední hodnotu $\pm$ směrodatná odchylka odchylka parametru K_1	60
4.8	Pole pevnosti/napětí odpovídající maximálnímu zatížení pro danou realizaci a velikost vzorku. Výsledky jsou vypočteny s náhodným polem a materiálovým modelem NLCM. Pole shora: náhodné pole pevnosti, hlavní napětí pro křehký materiál pro maximální vrcholové zatížení (nominální pevnost), skutečné hlavní napětí, dolní rovina přetvoření od vzniku trhlin. Viz také vybrané realizace na obr. 4.12.	63
4.9	σ - ε grafy (64 realizací) získané znáhodněným NLCM materiálovým modelem.	64
4.10	Grafická závislost výsledného napětí na parametru K_1	65
4.11	Diagramy σ - ε vzorků velikosti C – F modelovaných materiálovým modelem Microplane.	66
4.12	Vypočtené realizace náhodných polí a odpovídající tvary trhlin na deformovaném modelu za použití materiálového modelu NLCM.	67
4.13	Vybrané vzory trhlin ze série s materiálovým modelem Microplane pro porovnání s obr. 4.12.	67
4.14	Nahoře: vypočtené rozdělení nominální pevnosti vzorků s náhodným Weibullovým polem s parametrem K_1 . Weibullovo rozdělení (Eq. 4.8), které nejlépe aproximuje výsledky. Dole: vypočtené pole hlavních napětí v pružném stavu.	71

4.15	Grafické porovnání výsledků křivek vlivu velikosti. Nahoře: Výsledky získané použitím Microplane modelu. Dole: Výsledky s použitím materiálového modelu NLCEM.	74
5.1	Schéma uspořádání zatěžovací zkoušky na čtyřbodový ohyb. Stejně okrajové podmínky byly předepsány v numerickém modelu.	78
5.2	Křivka vlivu velikosti (deterministického i statistického) ve 3D zobrazení.	78
5.3	Škálování nosníků v podélném směru (D zůstává u všech nosníků série stejné).	79
5.4	(a) Průběh tahových napětí podle teorie pružnosti na nosníku za ohybu. (b) Pole kladných hlavních napětí na nosníku včetně svislých řezů určené nelineárním výpočtem v programu ATENA.	80
5.5	Elastická pole napětí (vlevo) a neelastická napětí (vpravo): zmenšování oblasti příspěvků do Weibullova integrálu v závislosti na parametru m	80
5.6	Vlevo: umocnění napětí S mocnitelem m . Vpravo: pole elastického a neelastického napětí (poměr výšky a délky není v měřítku).	80
5.7	Pole hlavních napětí při maximálním zatížení (neelastická) z programu ATENA.	81
5.8	Grafické porovnání křivek vlivu velikosti.	82
5.9	Srovnání oblastí příspěvku do Weibullova integrálu nosníků série C s parametrem $m = 7$	83

SEZNAM TABULEK

4.1	Data získaná z experimentu. Velikost vzorku D , nominální pevnost σ_N , variační koeficient COV a jemu odpovídající parametr tvaru Weibullova rozdělení m a počet realizací.	49
4.2	Materiálové charakteristiky NLCEM modelu použité pro numerickou analýzu	51
4.3	Materiálové charakteristiky Microplane modelu použité pro analýzu .	64
5.1	Rozměry testovaných vzorků série A, B a C	77
5.2	Hodnoty výsledných nominálních napětí s použitím elastického pole hlavních napětí do Weibullova integrálu σ_N^{el} a neelastického pole hlavních napětí σ_N^{nl} v závislosti na velikosti ohybového rozpětí D	82

ÚVOD

Práce se zabývá studiem deterministického-energetického a statistického vlivu velikosti na nominální pevnost konstrukce a možnostmi modelování jejich zdrojů.

Vliv velikosti je velmi starý problém, starší než mechanika materiálů a konstrukcí. Otázkou vlivu velikosti se zabýval už Leonardo da Vinci (1500), který uvedl „Nejdelší ze stejně silných provazů má nejmenší pevnost“. Také uvedl, že provaz „je tolikrát pevnější, kolikrát je kratší“. To ukazuje inverzní poměr nominální pevnosti a délky provazu, což je, z dnešních znalostí, přehnané vzhledem ke skutečnému vlivu velikosti.

Další, kdo se tímto problémem zabýval byl Galileo (1638), který stojí za vznikem mechaniky materiálů. Argumentoval, že by přestřižením dlouhého provazu v různých místech neměla být únosnost v tahu zbývající části větší.

Významnější pokrok provedl Mariotte (1686). Provedl experimenty na provazech, papíru a cínu a pozoroval, že „dlouhý i krátký provaz unesou stejnou váhu, ledaže by na dlouhém provazu mohla být nějaká vada, která způsobí jeho přetržení dříve než u krátkého“. Zavedl tedy to, co je dnes označováno za statistickou teorii do vlivu velikosti.

Další významný pokrok byl učiněn Griffithem (1921). Nejenže položil základy lomové mechaniky, ale zavedl ji do zkoumání vlivu velikosti. Prováděl experimenty na skelných vláknech. Jeho práce představuje fyzikální podstatu Mariottého statistického konceptu.

Tento jev prvně teoreticky vysvětlil Weibull (1939). Ocas rozdělení hodnot extrémně malých pevností s extrémně malými pravděpodobnostmi nemůže být adekvátně popsáno žádným ze známých pravděpodobnostních rozdělení. Navrhl rozdělení extrémních hodnot pevnosti pomocí mocninného zákona, které však bylo dříve teoreticky odvozeno v práci Fisher a Tippett [13]. Toto pravděpodobnostní rozdělení je nyní známo jako Weibullovo rozdělení. Weibullova teorie je vhodná pro konstrukce, které (i) selhávají právě při vzniku makroskopické trhliny a (ii) mají pouze malou lomovou procesní zónu, způsobující zanedbatelné přerozdělení napětí.

Uvedený historický přehled byl čerpán z knihy Bažant a Planas [8], kde lze na str. 438 nalézt odkazy na názvy děl jednotlivých autorů.

1 VLIV VELIKOSTI

1.1 Deterministický vliv velikosti

Vlivem velikosti je obecně nazývána závislost zvolené porovnávací veličiny na rozměru geometricky podobných konstrukcí (obr. 1.1). U pevnosti konstrukcí je tento jev obvykle charakterizován pomocí nominální pevnosti σ_N , která je definována jako nominální napětí σ při maximálním zatížení $F_{\max}$. Nominální napětí může být definováno jako reálné výpočtové napětí v konstrukci nebo jednoduše

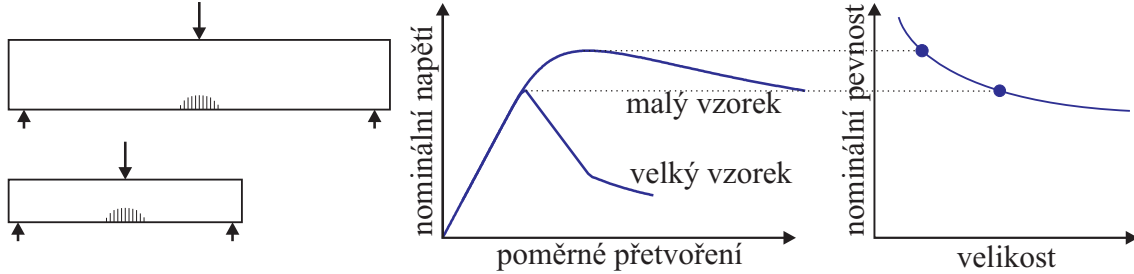
$$\sigma_N = c_N \frac{F}{bD} \quad (1.1)$$

kde b = tloušťka, D = charakteristický rozměr konstrukce (např. hloubka nosníku, rozpětí), c_N = konst. pro geometricky podobné konstrukce. Bažant a Planas [8] uvádí následující zdroje vlivu velikosti betonových konstrukcí:

1. *Efekt okrajové vrstvy* – způsobený zpravidla při výrobě, kdy okrajová vrstva přiléhající k bednění má relativně větší podíl cementu a menší obsah velkých zrn kameniva oproti vnitřní části konstrukce. U malých konstrukcí tato vrstva zabírá větší část objemu (např. průřezu) v porovnání s velkou konstrukcí.
2. *Difúzní jev* – např. přenos pórové vody, uvolňování hydratačního tepla nebo jiné chemické reakce probíhající během tvrdnutí betonu. Během těchto procesů vznikají v konstrukci reziduální napětí, která způsobují vznik a rozvoj tahových trhlin v povrchové vrstvě. Tato reziduální napětí jsou u malých konstrukcí menší, a proto porušení povrchové vrstvy je také menší.
3. *Statistický vliv velikosti* – způsobený náhodností materiálové pevnosti a pomocí něhož je vliv velikosti nejčastěji vysvětlován. Prvně byl systematicky testován a teoreticky vysvětlen Weibullem (Weibull [47]) na modelu řetězu, kde o porušení rozhoduje článek s nejmenší pevností.
4. *Lomově mechanický vliv velikosti* – velikost lomové procesní zóny u malé i velké konstrukce je podobná. K rozšíření trhliny na nosníku o jednotkovou délku je potřeba nějaké množství energie (nazývané lomová energie – pro stejný materiál je přibližně konstantní). Pro určení zatížení potřebného pro rozšíření trhliny se musí předepsat energetické bilanční rovnice (dostupná energie = energie potřebná pro šíření trhliny). Ve velké konstrukci je porušená relativně menší část objemu, proto je potřeba na porušení konstrukce relativně menší energie než u malé konstrukce.

5. *Fraktalita lomové plochy* – vliv nepravidelností lomové plochy, lomová plocha není nikdy ideálně rovinná (Carpinteri 1994).

Za hlavní zdroje vlivu velikosti lze považovat deterministický (energetický) vliv a statistický vliv.



Obr. 1.1: Porovnání odezvy geometricky podobných vzorků různých velikostí namáhaných trojbodovým ohybem. Úplně vpravo je křivka vlivu velikosti (závislost nominální pevnosti konstrukce na velikosti).

1.2 Statistický vliv velikosti a klasická Weibullova teorie

Proveďme nyní odvození, které vede k definici Weibullova integrálu pro pevnost konstrukcí (jako zdroj posloužily práce Bažant a Planas [8], Teplý a Novák [24]). Pro jednoduchost uvažujme konstrukci sestávající z mnoha článků spojených do série (např. řetěz na obr. 1.2 vlevo). Všechny články sdílí v každém okamžiku stejné namáhání vyjádřené napětím σ . Pravděpodobnost poruchy jednoho článku $P_1(\sigma)$ je pro všechny články stejná neboť uvažujeme, že články reprezentují výběry ze shodně rozdělených veličin. Pravděpodobnost, že zůstane daný článek při zatížení σ neporušen je tedy $1 - P_1(\sigma)$. Výrazným rysem sériově zapojených článků je, že pokud se poruší jeden článek dojde k porušení celého řetězu. Články řetězu uvažujme nezávislé. Pravděpodobnost, že nedojde k porušení řetězu s N články je pak součinem pravděpodobností odpovídajících každému z N článků

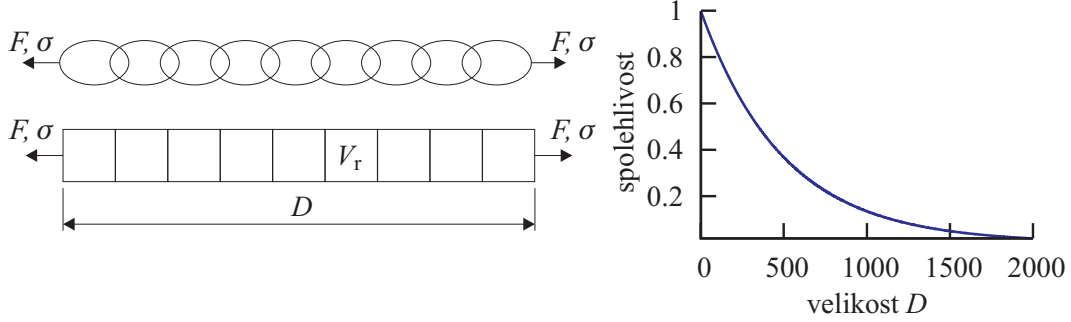
$$1 - P_f = \prod_{i=1}^N (1 - P_1) = \underbrace{(1 - P_1)(1 - P_1) \dots (1 - P_1)}_{N \text{ krát}} = (1 - P_1)^N \quad (1.2)$$

kde P_f je pravděpodobnost poruchy řetězu jako celku. Použitím přirozeného logaritmu dostaneme po zlogaritmování

$$\ln(1 - P_f) = N \ln(1 - P_1) \quad (1.3)$$

Protože v praxi P_1 je velmi malé, můžeme uvažovat $\ln(1 - P_1) \approx -P_1$. Potom lze výslednou pravděpodobnost zapsat

$$P_f(\sigma) = 1 - e^{-NP_1(\sigma)} \quad (1.4)$$



Obr. 1.2: Vlevo: Řetěz s N články a jednorozměrná tyč rozdělená na N referenčních objemů V_r . Vpravo: Spolehlivost této konstrukce o délce D podle rovnice 1.4 (při použití bilogaritmického měřítka je grafem přímka).

Tento vztah lze rozšířit na spojitě těleso ve stavu rovnoměrné napjatosti substitucí $N = V/V_r$, kde V je objem tělesa (celé konstrukce) a V_r je reprezentativní objem materiálu s P_f nezávislou na zbytku konstrukce, viz obr. 1.2. Dosazením do rovnice 1.4 dostaneme

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_r} P_1(\sigma) \right] \quad (1.5)$$

kde $P_1(\sigma)$ je pravděpodobnost poruchy referenčního objemu V_r při hodnotě zatížení σ . Nyní zavedeme tzv. koncentrační funkci

$$c(\sigma) = \frac{P_1(\sigma)}{V_r} \quad (1.6)$$

která představuje hustotu (koncentraci) pravděpodobnosti poruchy konstrukce.

Weibull (1939, 1951) definoval empirický vztah pro koncentrační funkci (dvouparametrická, zjednodušená verze), např. jako:

$$c(\sigma) = \frac{1}{V_r} \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (1.7)$$

kde m = parametr tvaru, σ_0 = parametr měřítka Weibullova rozdělení, $\langle \cdot \rangle$ značí kladnou část argumentu $\langle \cdot \rangle = \max(0, \cdot)$. Tvar tříparametrické koncentrační funkce lze najít v práci Bažant a Planas [8]. Napětí σ může být např. hlavní napětí v konstrukci, nebo jiná míra napětí. Kombinací rovnic 1.5, 1.6 a 1.7 dostaneme

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_r} \left\langle \frac{\sigma}{\sigma_0} \right\rangle^m \right] \quad (1.8)$$

Uvedme nyní obecnou podobu Weibullova integrálu pro libovolnou prostorovou koncentrační funkci $c[\sigma(\mathbf{x}); m, \sigma_0]$:

$$-\ln(1 - P_f) = \int_V c[\sigma(\mathbf{x}); m, \sigma_0] dV(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

kde P_f = pravděpodobnost (součtová hustota pravděpodobnosti) zatížení, při kterém dojde k poškození konstrukce; $c[\bullet]$ = koncentrační funkce napětí.

Nevýhody klasické Weibullové teorie lze stručně shrnout následovně (Bažant a Planas [8]):

1. neumožňuje přerozdělení napětí
2. libovolnou konstrukci idealizuje na jednoose namáhaný prut
3. neuvažuje rozdíl mezi geometrickou podobou ve 2D nebo 3D konstrukce
4. nezohledňuje uvolňování energie z konstrukce (velikost lomové zóny roste s velikostí konstrukce)
5. zanedbává prostorovou korelaci

1.3 Weibullův integrál pro konstrukce s nerovnoměrným namáháním

Výše uvedené řešení se snadno aplikuje pro konstrukce s *konstantní* úrovní napětí do vzniku první trhliny. Nyní následuje odvození (modifikace) Weibullova integrálu pro konstrukce s nerovnoměrným polem napětí (Bažant et al. [7]). Pro lepší vzhled odvodíme veličiny pomocí bezrozměrných souřadnic. Nechť $\xi = \mathbf{x}/D$, kde $\mathbf{x}$ je bod uvnitř oblasti Ω vymezující uvažovanou konstrukci. Uvažujme maximální elastické pole hlavního napětí $\sigma_I(\mathbf{x}) = \sigma_N \mathbf{S}(\xi)$, kde σ_N je nominální napětí a $\mathbf{S}(\xi)$ je bezrozměrné rozdělení napětí nezávislé na velikosti D . Dosazením tohoto a $dV(\mathbf{x}) = D^n dV(\xi)$ do rovnice (1.9), dostaneme $-\ln(1 - P_f) = (\sigma_N/\sigma_0)^m N_{eq}$ nebo také

$$P_f(\sigma_N) = 1 - \exp \left[-N_{eq} \left(\frac{\sigma_N}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (1.10)$$

kde počet ekvivalentních článků řetězu

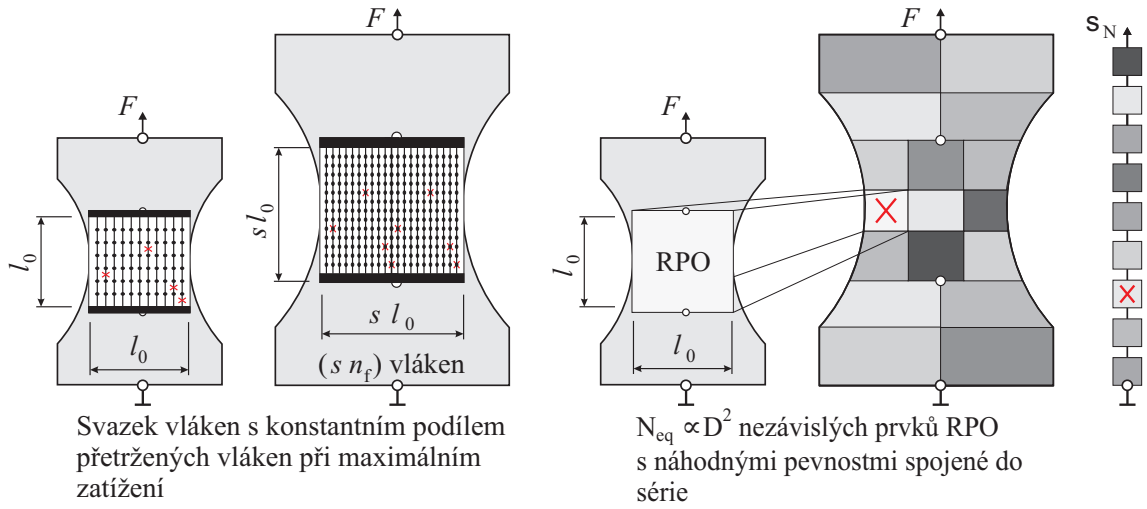
$$N_{eq} = \left(\frac{D}{l_0} \right)^n \Psi \quad (1.11)$$

závisí na parametru geometrie

$$\Psi = \int_V S^m(\xi) dV(\xi) \quad (1.12)$$

Tento parametr geometrie charakterizuje pole napětí, které závisí pouze na geometrii konstrukce a okrajových podmínkách. Číslo N_{eq} představuje ekvivalentní počet rovnoměrně zatížených materiálových elementů o velikosti, pro kterou byly změřeny referenční statistické materiálové vlastnosti (Bažant et al. [7]).

S rostoucí velikostí konstrukce se tato konstrukce blíží svým chováním k řetězu o N_{eq} sériově zapojených referenčních prvcích objemu (RPO), viz obr. 1.3 vpravo. Počet těchto článků řetězu je úměrný dimenzi n . Tento případ (2D) je možné modelovat pomocí svazku vláken v oblasti, kde se očekává průběh trhliny (obr. 1.3).



Obr. 1.3: Znázornění náhodné pevnosti pomocí svazku vláken a referenčního prvku objemu. Referenční velikost a s -krát zvětšená konstrukce Vlevo: nesprávné škálování použitím svazku vláken. Vpravo: použití referenčních prvků objemu v řešení využívajícím Weibullův integrál.

V tomto odvození je RPO definován jako nejmenší prvek objemu, který když se poruší, tak dojde k poškození celé konstrukce (při porušení jednoho RPO se poruší celá konstrukce).

Uvažuje se, že všechny RPO (reprezentativní prvky objemu) jsou nezávislé. Protože konstrukce se neporuší pouze pokud vydrží všechny RPO, můžeme zapsat pravděpodobnost, že nedojde k poruše jako $1 - P_f = (1 - P_1)^{N_{eq}}$ nebo (Bažant a Pang [6], Bažant et al. [7]):

$$P_f(\sigma_N) = 1 - [1 - P_1(\sigma_N)]^{N_{eq}} \quad (1.13)$$

tato pravděpodobnost poruchy se blíží k

$$\lim_{N_{\text{eq}} \rightarrow \infty} P_f(\sigma_N) = 1 - \exp[-N_{\text{eq}} P_1(\sigma_N)] \quad (1.14)$$

kde $P_1(\sigma_N)$ je kumulativní distribuční funkce pevnosti jednoho RPO. Pokud $N_{\text{eq}} \rightarrow \infty$, rozdělení pevnosti konverguje k Weibullovu rozdělení.

Při použití rovnice (1.10) můžeme snadno popsat vztah mezi *materiálovou pevností* a střední hodnotou *nominální pevnosti konstrukce*:

$$\overline{\sigma_N} = \frac{\sigma_0}{N_{\text{eq}}^{1/m}} \Gamma(1 + 1/m) = \frac{\mu_0}{N_{\text{eq}}^{1/m}} \quad (1.15)$$

kde $\Gamma(\cdot)$ je gama funkce¹. Materiálová pevnost je daná parametry náhodné pevnosti RPO je uvažovaná s Weibullovým nebo Gaussovým rozdělením s Weibullovým levým ocasem definovaným parametrem tvaru m a odpovídajícím parametrem měřítka σ_0 , dvojice udávající střední hodnotu pevnosti μ_0 jednoho prvku RPO o velikosti l_0 .

1.4 Nelokální Weibullova teorie

U diskrétních modelů klasická Weibullova teorie (viz 1.2), která převádí každou konstrukci na jednorozměrné vlákno, se příliš nehodí pro použití u mnoha reálných konstrukcí. Šířka a rozdělení hustoty mikrotrhlin na čele trhliny se může lišit v závislosti na velikosti, tvaru konstrukce a druhu zatížení. Toto chování může být vystiženo pouze spojitým modelem. Nelokální kontinuum je definováno jako kontinuum, ve kterém napětí v bodě závisí nejenom na poměrném přetvoření v tom samém bodě, ale také na poměrných přetvořeních v okolí tohoto bodu (někdy průměrné poměrné přetvoření okolí, protože se získá vhodným průměrováním).

Základem je nahrazení lokálních napětí v klasickém Weibullově integrálu (rovnice 1.9) nelokálními napětími, získanými vhodným průměrováním lokálních poměrných přetvoření v okolí bodu. Potom nelokální Weibullův integrál je definován vztahem Bažant a Xi [10]:

$$P_f = 1 - \exp \left\{ - \int_V \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\overline{\sigma}_i(\mathbf{x})}{\sigma_0} \right\rangle^m \frac{dV(\mathbf{x})}{V_r} \right\} \quad (1.16)$$

kde n = počet dimenzí (1, 2 nebo 3), σ_0 = parametr měřítka Weibullova rozdělení, σ_i = hlavní napětí ($i = 1, \dots, n$) a pruh nad σ_i znamená, že se jedná o nelokální napětí získané průměrováním.

¹pro definici funkce viz např. stránky encyklopedie Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function); pro výpočty lze použít program Excel, kde je tato funkce implementována (přesněji řečeno její přirozený logaritmus)

Pro daný tvar Weibullova integrálu je nelokální objem (plocha, délka) řízen charakteristickou délkou ℓ (podobná autokorelační délce l_r), která pak představuje materiálové vlastnosti související např. s maximální velikostí zrna.

Fyzikální příčina energetické části vlivu velikosti (plynoucí z charakteristické délky c_b u crack band modelu nebo ℓ u nelokálního modelu) je přerozdělení napětí a uvolnění energie způsobené vzájemným spolupůsobením poměrně velké hraniční vrstvy trhlin a mikrotrhlin a délka je dána hlavně velikostí nehomogenity materiálu, tj. velikost zrn v betonu. Na druhé straně fyzikální příčina statistické části vlivu velikosti je hlavně náhodnost materiálové pevnosti.

Nelokální Weibullův integrál dává oba zdroje do souvislosti a modeluje oba dva zároveň. Původní motivací pro vložení nelokálního napětí do Weibullova integrálu byla divergence integrálu pro problémy se singularitami v poli napětí (konstrukce se zářezem a podobně, viz Bažant a Xi [10]). Později byl Weibullův integrál aplikován pro konstrukce bez koncentrátorů napětí (viz Bažant a Novák [2, 3]).

1.5 Vliv závislosti lokálních pevností

V mnohých situacích je předpoklad nezávislosti pravděpodobností poruch elementů konstrukce neoprávněný. Jako příklad lze uvést konstrukce, ve kterých lokální pevnosti můžeme aproximovat autokorelovaným náhodným polem s nenulovou autokorelační délkou. Tímto případem se do hloubky zabýval Vořechovský [37, 36]. Bylo ukázáno, že náhodná pevnost konstrukcí s autokorelovaným polem pevnosti konverguje s rostoucí velikostí konstrukce k řešení pomocí Weibullové teorie. Pokud je ovšem rozměr konstrukce menší než autokorelační délka (a s ní související plocha či objem), náhodná pevnost má limitovanou střední hodnotu diktovanou střední hodnotou lokální pevnosti. Závislost tedy způsobuje přechod mezi dvěma limitními případy reprezentované konstantní střední pevností nekonečně malých konstrukcí a mocninným zákonem platným pro nekonečně velké konstrukce. Korelační délka má roli statistického délkového měřítka. Průsečík obou asymptot vymezuje oblast velikostí, ve které je nutno aplikovat teorii náhodných polí. Výsledky byly aplikovány pro teorii statistické pevnosti svazků vláken a textilního betonu Vořechovský a Chudoba [41] a také na pevnost betonových konstrukcí Vořechovský et al. [40], Bažant et al. [9]. V této práci se teorie náhodných polí pro vnesení závislosti bude využívat.

2 NELINEÁRNÍ VÝPOČTOVÁ LOMOVÁ MECHANIKA

Existuje několik zdrojů nelinearit Šmirák [18]:

- *fyzikální* – materiál se neřídí Hookovým (lineárním) zákonem. Mezi deformacemi a napětími je nelineární vztah.
- *geometrická* – velikost deformace ovlivňuje nezanedbatelně silové veličiny
- *konstrukční* – během zatěžování se mění statické schéma konstrukce (např. dosednutí na další podporu).

Vzhledem k povaze studovaného materiálu (beton) a jednoduchým okrajovým podmínkám studovaných konstrukcí se v dalším textu budeme zabývat výhradně fyzikální nelinearitou.

Protože bude využíván komerční program ATENA, představíme si v této kapitole podstatné rysy modelů v něm implementovaných (Červenka a Pukl [32]) a rámcově popíšeme způsob řešení nelineárních rovnic.

2.1 Vztah mezi napětím a poměrným přetvořením v betonu

2.1.1 Jednoosé ekvivalentní poměrné přetvoření

Ekvivalentní jednoosé poměrné přetvoření se zavádí z důvodu odstranění Poissonova efektu ve stavu rovinné napjatosti.

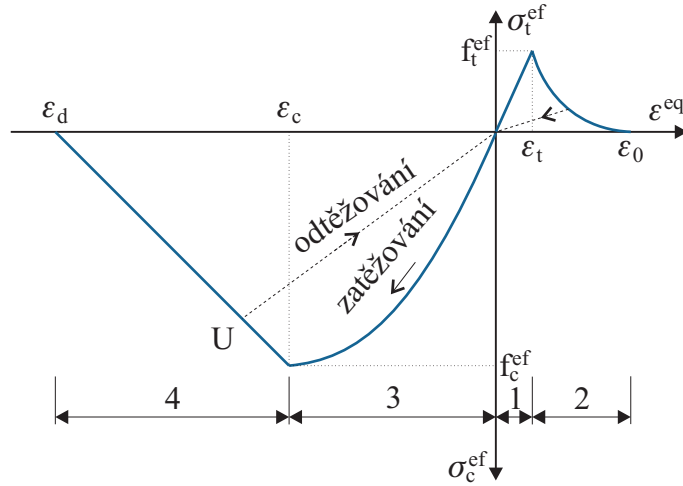
$$\varepsilon^{\text{eq}} = \frac{\sigma_{ci}}{E_{ci}} \quad (2.1)$$

kde σ_{ci} = hlavní napětí, E_{ci} = aktuální modul pružnosti související se směrem i .

Ve dvouosém stavu napjatosti lze nelineární chování betonu popsat pomocí tzv. efektivního napětí σ_c^{ef} a ekvivalentního jednoosého poměrného přetvoření ε^{eq} . Efektivní napětí je obvykle hlavní napětí. Na obr. 2.1 je zobrazen celý σ – ε diagram pro beton, který se skládá ze čtyř částí 1–4.

Jednotlivé části diagramu:

1. Tah před vznikem trhliny



Obr. 2.1: Graf ekvivalentního jednoosého napětí a poměrného přetvoření rozdělený na čtyři materiálové stavy.

2. Tah po vzniku trhliny – tahové změkčení (na obr. 2.8 exponenciální změkčení (Hordijk [14]), rovnice 2.8, 2.9)
3. Tlak před dosažením maximálního napětí
4. Tlak po dosažení maximálního napětí – tlakové změkčení (lineární)

2.1.2 Tah před vznikem trhliny

Chování betonu bez trhlin v tahu je lineárně elastické.

$$\sigma_c = E_c \varepsilon^{eq} \quad 0 \leq \sigma_c \leq f_t^{ef} \quad (2.2)$$

kde E_c je počáteční modul pružnosti betonu a f_t^{ef} je efektivní tahové napětí odvozené z funkce porušení viz 2.5.1.

2.1.3 Tah po vzniku trhliny

Existuje více tvarů tahového změkčení, které se používají.

- lineární (Červenka a Pukl [32])
- exponenciální - použit u materiálového modelu 3D Nonlinear Cementitious 2 (dále NLCEM) (viz část 2.2.2)
- lineární založené na poměrném přetvoření (Červenka a Pukl [32])

- SFRC založené na lomové energii (Červenka a Pukl [32])
- SFRC založené na poměrném přetvoření (Červenka a Pukl [32]).

2.1.4 Tlak před dosažením maximálního napětí

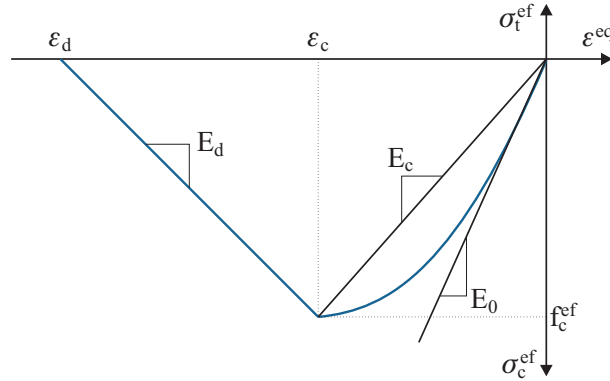
Tvar zatěžovací větve (obr. 2.2) je dán vztahem 2.3, který umožňuje definovat tvar od linie po křivku.

$$\sigma_c^{\text{ef}} = f_c^{\text{ef}} \frac{kx - x^2}{1 + (k - 2)x}, \text{ kde } x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}, k = \frac{E_0}{E_c} \quad (2.3)$$

Lineární průběh bychom získali substitucí $k = 1$. Pro materiály na bázi cementu je nejvhodnější použít parabolu druhého stupně, jejíž vztah dostaneme z rovnice 2.3 dosazením $k = 2$:

$$\sigma_c^{\text{ef}} = f_c^{\text{ef}} (2x - x^2), \text{ kde } x = \varepsilon^{\text{eq}} \frac{E_c}{2f_c^{\text{ef}}} \quad (2.4)$$

kde σ_c^{ef} = napětí betonu v tlaku, f_c^{ef} = efektivní tlaková pevnost betonu, x = normované poměrné přetvoření, ε = poměrné přetvoření, ε_c = poměrné přetvoření při maximálním napětí f_c^{ef} , k = parametr tvaru, E_0 = počáteční modul pružnosti a E_c = sečný modul pružnosti při maximálním napětí $E_c = f_c^{\text{ef}}/\varepsilon_c$.



Obr. 2.2: σ - ε diagram betonu při tlakovém namáhání.

2.1.5 Tlak po dosažení maximálního napětí

Tlakové změkčení se uvažuje jako lineární po dosažení maxima na parabolické vzestupné větvi $E_c = E_0/2$, viz obr. 2.2.

$$\sigma_c^{\text{ef}} = E_d (\varepsilon^{\text{eq}} - \varepsilon_d), \quad \varepsilon_d = \frac{f_c^{\text{ef}}}{E_c} \left(2 - \frac{E_c}{E_d} \right), \quad \varepsilon_c = \frac{2f_c^{\text{ef}}}{E_c} \quad (2.5)$$

2.2 Lokalizace přetvoření a její omezovače

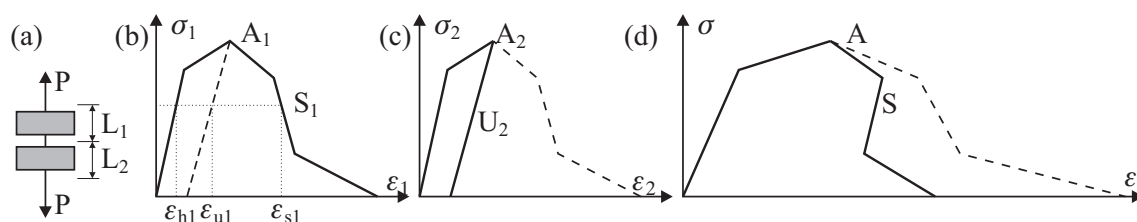
Nejrozšířenější a nejjednodušší způsob omezení závislosti výsledku na síti je crack band model (Pietruszczak a Mróz [22], Bažant a Oh [4]).

2.2.1 Zdůvodnění zavedení Crack band modelu

V následujícím textu bude stručně vysvětleno proč je potřeba u konečných prvků zamezovat nevhodné lokalizaci poškození.

Dva prvky spojené do série

Spojíme-li dva identické články do série, jejichž pracovní diagramy jsou zobrazeny na obrázku 2.3, lze vypočítat podstatné rysy chování po dosažení pevnosti článků. Podstatná je shoda napětí v obou člancích v každém okamžiku procesu ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$). Prvek 1 má nepatrně nižší pevnost než prvek 2. Plná linie zobrazuje monotónní protažení a čárkovaná odlehčení.



Obr. 2.3: (a) Dva články spojené do série, (b) σ – ϵ křivka materiálu prvního článku, (c) σ – ϵ křivka druhého článku a (d) výsledná σ – ϵ křivka.

Při zatěžování této série dojde k dosažení vrcholu A_1 prvku 1. Jelikož prvek 1 dosáhl maximálního zatížení, dochází u něj při dalším zatěžování ke změkčení. Prvek 2, který ještě nedosáhl maximálního zatížení se začne odlehčovat (nikoliv změkčovat) po větvi A_2 – U_2 . Poměrné přetvoření se soustředí pouze do jednoho prvku vlivem změkčení. Výsledný diagram zatížení je zobrazen plnou linií (obr. 2.3d). Čárkovaná linie ukazuje (chybný) výsledek, ke kterému by došlo kdyby oba prvky přešly do změkčení (stejná deformace, stejné protažení obou prvků).

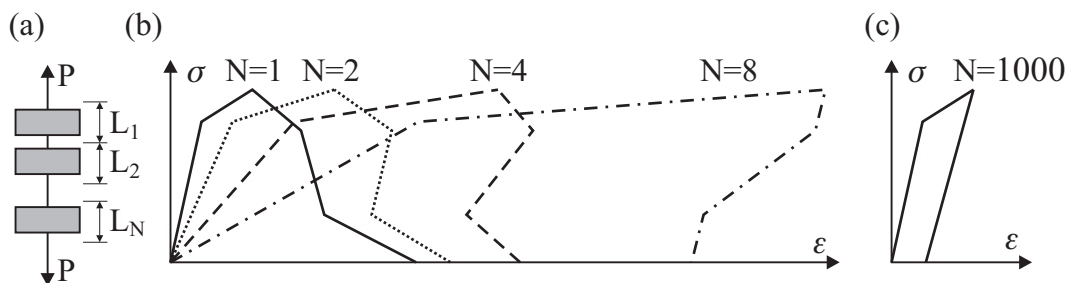
Jakmile jeden prvek dosáhne maximálního zatížení, dalším poměrným přetvořením u něj dochází ke změkčování a u druhého prvku k odlehčování. V praxi obvykle nevíme, který prvek je slabší, proto můžeme říci, že pravděpodobnost poruchy obou prvků je stejná tedy 50 % (za předpokladu, že zatěžovací soustava je dokonale symetrická).

Více prvků zapojených do série

Uvažujme řetěz délky L o N stejných prvcích: $L = NL_i$, u kterých může dojít k tahovému změkčení (obr. 2.4). Jako u předchozího případu při dosažení maximálního zatížení prvku dojde k jeho změkčení a přechodu k nelineárnímu chování a u ostatních $N - 1$ prvků k odlehčování. Potom střední poměrné přetvoření řetězu o N prvcích můžeme zapsat:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^N L_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^N L_i} = \frac{L_i \sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (2.6)$$

kde i = počet prvků a ε_i = poměrné přetvoření elementu i .



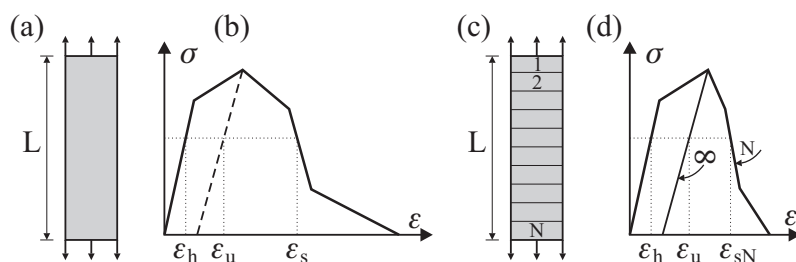
Obr. 2.4: (a) N stejných článků spojených do série, (b) σ - ε křivka pro různý počet prvků $N = 1, 2, 4, 8$ a (c) křivka pro $N = 1000$ (pozn. osa ε není v měřítku).

Na obrázku 2.4 jsou vykresleny výsledky pro $N = 1, 2, 4, 8, 1000$. Zatěžovací křivka jednoho prvku je stejná jako na obr. 2.3b. Zatímco se maximální možné zatížení nemění s počtem prvků, větší počet prvků způsobuje strmější sklon větve změkčení (zvětšuje se křehkost, může docházet ke snap-backu – nekontrolovatelná katastrofa po dosažení maximálního zatížení při řízeném nárůstu deformace u).

Poměrné přetvoření na prutu s tahovým změkčením

Předpokládejme, že máme homogenní prut počáteční délky L (obr. 2.5) tvořený materiálem, jehož σ - ε křivka vykazuje změkčení. Za předpokladu, že je prut homogenní, můžeme prut rozdělit na části (N stejných kratších prutů), které představují N prvků spojených do série obr. 2.5c. Z předchozí části víme, že u série N prvků při dosažení maximálního zatížení pouze jednoho prvku dochází k lokalizaci poměrného přetvoření za vrcholem (viz obr. 2.4b).

Tudíž změkčení prutu po dosažení maximálního zatížení závisí na počtu částí, na které je prut rozdělen. Toto není fyzikálně možné, aby výsledek závisel na počtu

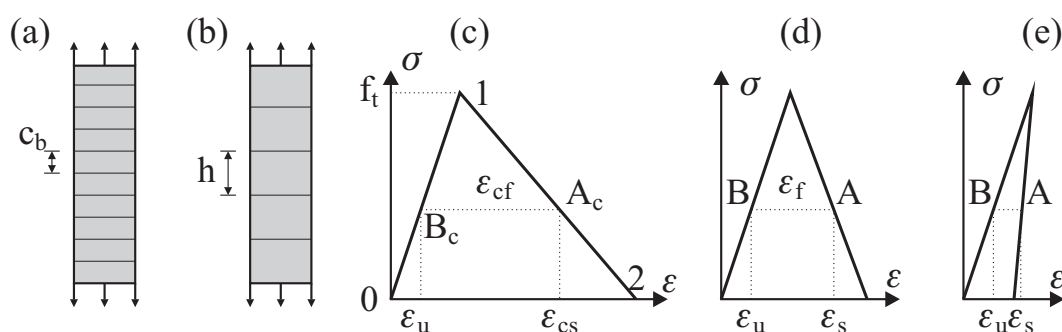


Obr. 2.5: (a) Homogenní prut, (b) σ – ε křivka materiálu, (c) prut rozdělený na N stejných částí a (d) výsledná σ – ε křivka.

myšlených částí. A dále by to znamenalo, že při použití metody konečných prvků by výsledky závisely na počtu a velikosti konečných prvků. Je potřeba zavést omezovač lokalizace přetvoření. V současné době se používá Crack Band model, nelokální kontinuum nebo gradientní modely. Vzhledem k transparentnosti a jednoduchosti si cestu ke komerčním produktům našel pouze Crack Band model.

2.2.2 Crack band model

Z předchozího je zřejmé, že je potřeba zabránit lokalizaci změkčení do libovolně malé oblasti pomocí vhodného vztahu (např. způsob pomocí crack band modelu). Crack band model udává vztah mezi poměrným změkčením a určitou zabudovanou šířkou c_b (crack band – šířka pásu trhlin), která představuje referenční šířku a je s ní obvykle zacházeno jako s materiálovou vlastností (obvykle tři průměry maximálního zrna kameniva).



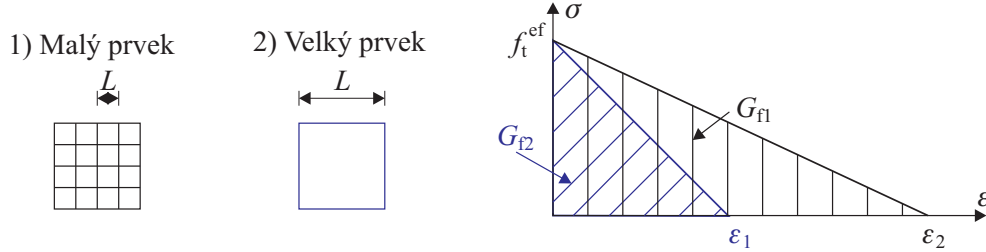
Obr. 2.6: (a) Prut rozdělený na konečné prvky o velikosti c_b (crack band), (b) prut rozdělený na prvky $h \neq c_b$, (c) σ – ε křivka prutu (a), (d) σ – ε křivka prutu (b) a (e) velmi velký prvek (snapback).

Na obrázku 2.6a,b je zobrazen prut rozdělený na různý počet dílů zatěžovaný stejnou silou. Pro jednoduchost je zvolen konstitutivní zákon materiálu lineární do

pevnosti f_t (větev 0–1) poté dochází k lineárnímu změkčení (větev 1–2). Chování všech prvků bude lineárně-pružné až do dosažení pevnosti. Poté u porušeného prvku dojde ke změkčení po větvi 1–2 a ostatní prvky se začnou odlehčovat po větvi 1–0. Elastické poměrné přetvoření ε_u je pro každou síť stejné (viz obr. 2.6c–e). Pro udržení stejného lomového přetvoření ε_f (udržení konstantní lomové energie G_F) je nutná úprava větve změkčení podle vztahu:

$$\varepsilon_f = \frac{c_b}{h} \varepsilon_{cf} \quad (2.7)$$

Pro danou síť lze vypočítat lomovou energii prvku (reprezentovanou v integračních bodech) jako $G_f = G_F/L$ (z podmínky, že součin lomové energie prvku G_f a šířky pásu trhlin je roven lomové energii materiálu G_F a je konstantní $G_f L = G_F = konst$), viz obrázek 2.7. L je velikost prvku kolmo k trhlíně.



Obr. 2.7: Úprava σ - ε diagramu pro různé velikosti prvků (podle Vořechovský [34]).

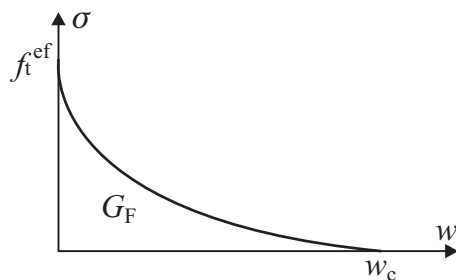
Toto umožňuje řešení konstrukce pomocí standardní metody konečných prvků. Diskrétní trhlina je modelována pomocí pásu trhlin. Tato metoda by měla být nezávislá na síti, ale jak ukazují některé studie Kika et al. [15], tak tomu tak úplně není, ale při správné volbě velikosti a tvaru sítě je tento vliv minimální.

Funkce exponenciálního změkčení odvozená experimentálně (obr. 2.8, Hordijk [14]) použitého u materiálového modelu 3D Nonlinear Cementitious 2:

$$\frac{\sigma}{f_t^{\text{ef}}} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right\} \exp \left(-c_2 \frac{w}{w_c} \right) - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) \quad (2.8)$$

$$w_c = 5.14 \frac{G_F}{f_t^{\text{ef}}} \quad (2.9)$$

kde w = otevření trhliny, w_c = otevření trhliny po uvolnění veškerého napětí, G_F = lomová energie potřebná k vytvoření trhliny s nulovým napětím o jednotkové ploše, f_t^{ef} = efektivní tahová pevnost odvozená z funkce porušení (rovnice 2.10, σ = normálové napětí v trhlíně (soudržnost trhliny).

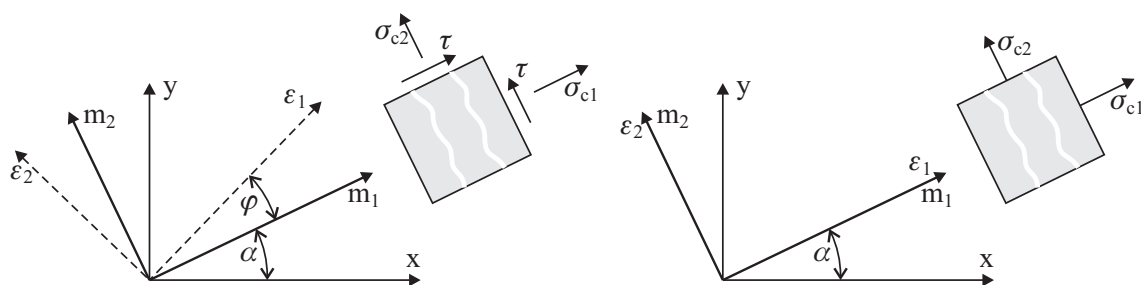


Obr. 2.8: Exponenciální funkce pro otevření trhliny (w = šířka trhliny).

2.3 Modely rozetřených (rozmazaných) trhlín

Existují dva typy rozetřených trhlín: model fixovaných (pevných) a rotovaných trhlín. U obou modelů vzniká trhlina, když hlavní napětí překročí hodnotu tahové pevnosti. Předpokládá se, že jsou trhliny rozděleny rovnoměrně nezávisle na objemu materiálu.

1. *Model fixovaných trhlín* – U modelu fixovaných trhlín (obr. 2.9 vpravo) je směr trhliny určen směrem hlavního napětí v okamžiku vzniku trhliny. Během dalšího zatěžování se směr této trhliny již nemění a představuje materiálovou osu ortotropie. Směry hlavních napětí a poměrných přetvoření se shodují na nepotrhaném vzorku, protože se předpokládá izotropie materiálu. Po vzniku trhlín dochází ke vzniku ortotropie. Osy hlavních poměrných přetvoření ε_1 a ε_2 rotují a nemusí se shodovat s osami ortotropie m_1 a m_2 . Napětí σ_{c1} a σ_{c2} nejsou hlavní napětí díky vlivu smykových napětí.



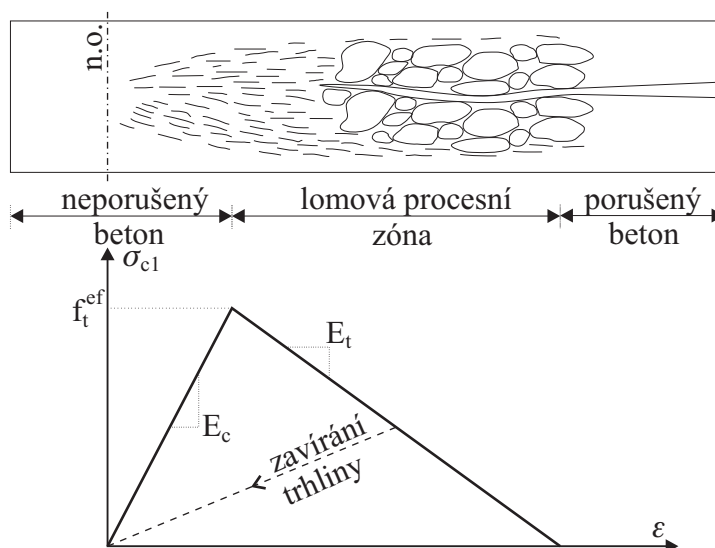
Obr. 2.9: Fixované (vpravo) a rotované (vlevo) trhliny.

2. *Model rotovaných trhlín* – U modelu rotovaných trhlín (obr. 2.9 vlevo) se směr hlavního napětí shoduje se směrem hlavních poměrných přetvoření. Tudíž nedojde ke vzniku smykových přetvoření na lomové ploše, a proto musí být definována pouze dvě normálová napětí, která jsou zároveň hlavními napětími.

Modely rotovaných trhlin se uplatní tam, kde se výrazně mění směry hlavních napětí během procesu rozvoje trhlin. Úlohy porovnané s reálnými experimenty ukazují, že optimální je kompromis mezi fixovanými a rotovanými modely trhlin (měnit směr pouze částečně).

2.4 Vznik trhliny

Průběh vzniku trhliny lze rozdělit na tři fáze, viz obr. 2.10. 1. fáze – pohybujeme se před dosažením tahové pevnosti (neporušený beton). 2. fáze – v lomové procesní zóně (LPZ) se vytvářejí trhliny s klesajícím tahovým napětím na lici trhliny vlivem efektu přemostění (lomová procesní zóna). 3. fáze – po úplném uvolnění napětí dochází ke spojitému otevření trhliny bez přenosu napětí (porušený beton).



Obr. 2.10: Aproximace napětí při otvírání trhliny. Platí při lineárním rozdělení poměrných přetvoření (Vořechovský [34]).

2.5 Dvoustá napjatost – kritéria porušení

2.5.1 Tahové porušení

Ve stavu tah–tah je tahová pevnost konstantní a rovná se tahové pevnosti v jednoosém tahu f_t . Ve stavu tah–tlak je tahová pevnost redukována podle vztahu:

$$f_t^{\text{ef}} = f_t r_{\text{et}} \quad (2.10)$$

kde r_{et} je redukční součinitel tahové pevnosti ve směru 1 vlivem tlakového napětí ve směru 2. Redukční funkce můžeme definovat jedním z následujících vztahů:

$$r_{et} = \frac{A + (A - 1)B}{AB}, \quad B = Kx + A, \quad x = \frac{\sigma_{c2}}{f_c} \quad (2.11)$$

$$r_{et} = 1 - 0,8 \frac{\sigma_{c2}}{f_c} \quad (2.12)$$

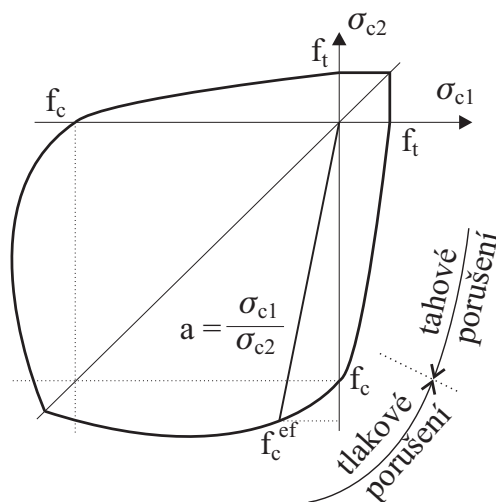
Vztah 2.12 definuje lineární pokles tahové pevnosti a rovnice 2.11 hyperbolický pokles.

2.5.2 Tlakové porušení

Ve stavu tlak–tlak je funkce porušení

$$f_c^{ef} = \frac{1 + 3.65a}{(1 + a)^2} f_c, \quad a = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} \quad (2.13)$$

kde σ_{c1} , σ_{c2} jsou hlavní napětí v betonu a f_c je válcová pevnost při jednoosém namáhání. Ve stavu dvouosé napjatosti je pevnost betonu spočítána za předpokladu proporcionální dráhy napětí.



Obr. 2.11: Funkce poruchy betonu při dvouosém namáhání.

Ve stavu tah–tlak pokračuje funkce porušení lineárně z bodu σ_{c1}, σ_{c2} do oblasti tah–tlak:

$$f_c^{ef} = f_c r_{ec}, \quad r_{ec} = 1 + 5.3278 \frac{\sigma_{c1}}{f_c}, \quad 1.0 \geq r_{ec} \geq 0.9 \quad (2.14)$$

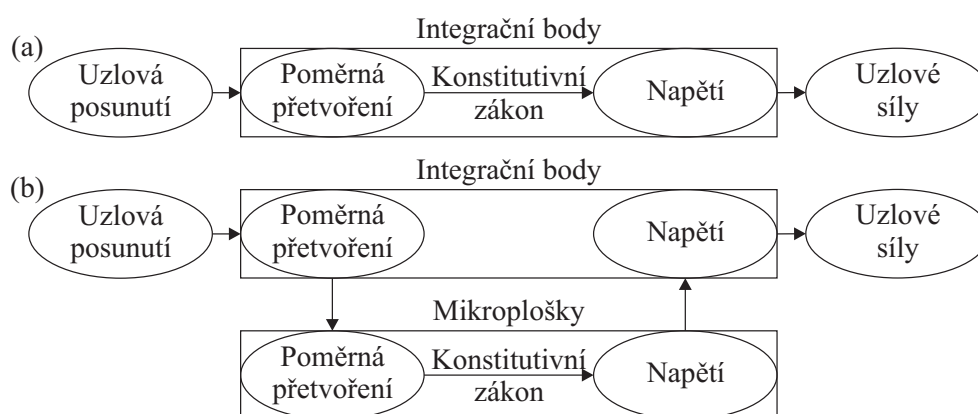
kde r_{ec} je redukční součinitel tlakové pevnosti v hlavním směru 2 vlivem tahového napětí v hlavním směru 1.

2.6 3D Nonlinear Cementitious 2

Jedná se o lomově-plastický materiál, který kombinuje 2 základní modely pro chování tahové (lomové) a tlakové (plastické). Je založen na klasické teorii rozetřených trhlin a na modelu pásu trhlin. Využívá Rankinova kritéria porušení, exponenciální změkčení a může být využito modelu rotovaných nebo pevných trhlin. U tohoto materiálu je použita přírůstková formulace, proto je možno během analýzy měnit materiálové vlastnosti. Podrobnější informace viz Červenka a Pukl [32].

2.7 Materiálový model Microplane

Tento model reprezentuje zobecnění základní myšlenky G. I. Taylora (1938), který navrhoval, aby se konstrukční chování kovů charakterizovalo vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi na mnoha ploškách různých orientací uvnitř materiálu. Makroskopická napětí a deformace se pak získají jako výslednice (sumace) všech příspěvků na ploškách. Výslednice se získá pomocí předpokladu statických či kinematických vazeb (viz Bažant a Planas [8]). Model byl od doby formulace mnohokrát použit. Původně byl tento model nazýván jako „slip theory of plasticity“ při použití na kovy a „multi-laminate model“ při použití na horniny. Tyto modely nebyly vhodné pro popis porušování kvazikřehkých materiálů (beton), proto ho Bažant (1984) upravil, začal ho nazývat Microplane model. Rozdíl určování statických veličin u klasického materiálového modelu a modelu Microplane je znázorněn na obrázku 2.12.



Obr. 2.12: Postup výpočtu poměrných přetvoření, napětí a sil při použití různých materiálových modelů (a) klasický materiálový model, (b) materiálový model Microplane.

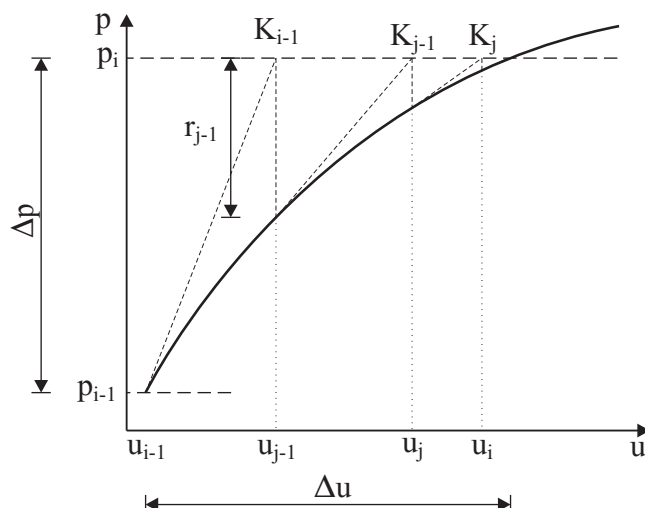
2.8 Výpočtová iterační metoda Newton-Raphson

Pro výpočet modelů v této práci byla používána Newton-Raphsonova metoda, která umožňuje zatěžování přírůstkem deformace a u studovaných konstrukcí získání kvazistatické odezvy z celého průběhu zatěžování.

Jedná se o přírůstkovou iterační metodu. Tvar nelineární rovnice:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (2.15)$$

kde $\Delta \mathbf{u}$ = přírůstek deformace vlivem přírůstku zatížení, $\mathbf{p}$ = vektor celkového uzlového zatížení, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ je matice tuhosti obecně závislá na deformačním tvaru konstrukce (vztah mezi přírůstkem zatížení a přírůstkem deformace). Hledá se řešení, jehož hodnota nevyvážené síly $r(u)$ je „nulová“ (dostatečně malá – splňující požadovanou přesnost, obr. 2.13).



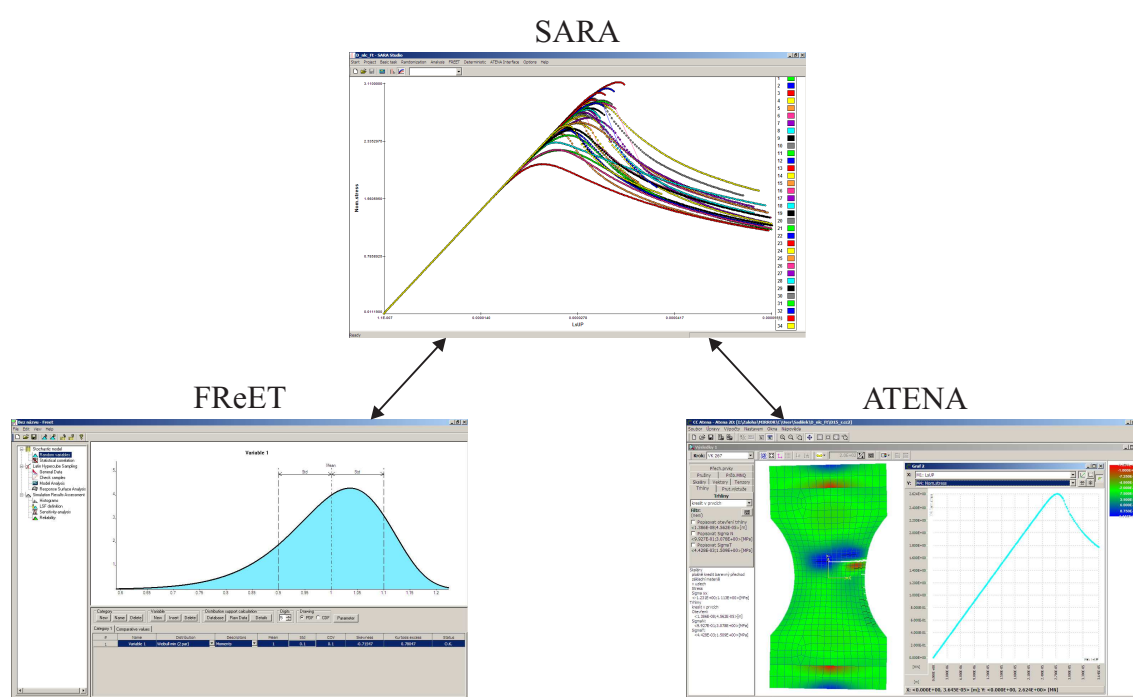
Obr. 2.13: Grafické znázornění principu klasické Newton-Raphsonovy metody.

V každém kroku je potřeba vypočítat matici tuhosti, což je časově náročné. Proto lze používat modifikovanou Newton-Raphsonovu metodu, u které je vypočtena matice tuhosti v prvním kroku a potom se již během výpočtu nemění. Tato metoda obvykle vede na větší počet iterací, které jsou ovšem podstatně rychlejší, neboť není třeba sestavovat a faktorizovat aktuální matici tuhosti.

3 POUŽITÉ PROGRAMY

3.1 ATENA

Jedná se o komerční program firmy Červenka Consulting založený na deformační variantě metody konečných prvků (MKP). Program umožňuje řešení odezvy především betonových a železobetonových konstrukcí pomocí nelineární lomové mechaniky (tj. včetně vzniku trhlin, drcení betonu a plastického tečení výztuže). Má dvě základní varianty 2D a 3D, které byly při zpracování této práce využity. 2D varianta umožňuje modelování stavu rovinné napjatosti i rovinné deformace pomocí plošných prvků.



Obr. 3.1: Vzájemná interakce programů Sara, Atena a FReET.

3.2 FReET a SARA

Univerzální pravděpodobnostní software FReET (Feasible Reliability Engineering Tool) program vyvinutý na Ústavu stavební mechaniky fakulty stavební VUT Brno pro statistickou, citlivostní a pravděpodobnostní analýzu výpočtově jednoduchých i náročných inženýrských úloh (Novák et al. [20, 21]). V programu je k dispozici pro práci s náhodnými veličinami rozsáhlá databáze pravděpodobnostních rozdělení (Gaussovo (normální), Weibullovo, lognormální, ...). Mezi jednotlivými veličinami

lze zadat korelaci pomocí přehledné korelační matice. Zavedení statické závislosti se pak děje pomocí metody simulovaného žíhání (Vořechovský [35], Vořechovský a Novák [43, 44]). Pro generování jednotlivých realizací může být využito metody Monte Carlo nebo LHS (Latin Hypercube Sampling). FReET umožňuje simulaci náhodných polí. V současné komerční verzi jsou však implementovány pouze elementární metody. V praxi byla tedy používána školitelova vývojová verze programu, kde jsou implementovány metody publikované v článku Vořechovský [39].

Program Sara, vytvořený pracovníky firmy Červenka Consulting, si lze představit jako obálku (obr. 3.1), která komunikuje s programy ATENA a FReET a umožňuje tak jejich vzájemnou spolupráci. Pro statistické výpočty je potřeba velké množství modelů s různými vstupními parametry, proto se sada těchto vstupních parametrů znáhodní pomocí programu FReET a poté program SARA vygeneruje modely s těmito parametry pro program ATENA. SARA dále dokáže volat tyto jednotlivé úlohy, provést výpočet, uložit výsledky a zobrazit výsledky v monitorovacích bodech (graficky).

4 MODELOVÁNÍ VZORKŮ TVARU KOSTI

4.1 Úvod

Tato kapitola se věnuje modelování komplexního vlivu velikosti na nominální pevnosti betonových konstrukcí ve tvaru psí kosti. Cílem je identifikovat hlavní zdroje vlivu velikosti a sledovat jak spolu jednotlivé vlivy interagují. Kapitola se také zabývá vlivem změny materiálové délky (lomová houževnatost G_F , šířka pásu trhlin c_b (neelastická délka)). Tato kapitola byla prezentována na konferenci „Physical Aspects of Fracture Scaling and Size Effects“ v Monte Verità (vyžádaná přednáška) a je zaslána k posouzení a případné publikaci v časopise *International Journal of Fracture* (Vořechovský a Sadílek [33]).

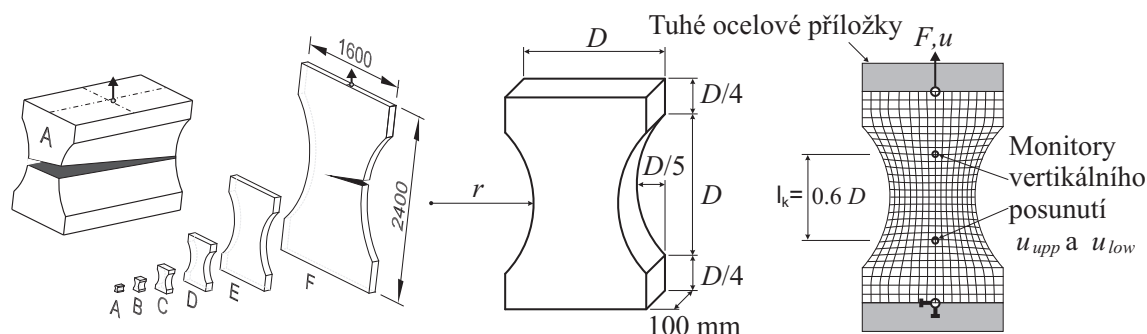
Přestože bylo snahou studovat vliv velikosti obecně, pro názornost a možnost kvantifikace bylo použito konkrétního příkladu. Jako základ byla použita experimentální studie tahových zkoušek na vzorcích tvaru psí kosti, s možností pootočení příložek, různých velikostí (rozsah velikostí 1:32), provedená a publikovaná van Vlietem a van Mierem (v článkách van Vliet a van Mier [28, 29, 30, 31], van Mier a van Vliet [26], Dyskin et al. [12] a souhrn celé studie v dizertační práci van Vliet [27]). Tato práce se zabývá především vzorky z betonu o velikosti A–F „suché“ série (charakteristický rozměr vzorků D se pohybuje od 50 do 1600 mm, viz obr. 4.1. Jedná se o tahové trhací zkoušky. Práce se snaží vysvětlit komplexní vliv velikosti na střední hodnotu nominální pevnosti za použití simulací náhodných polí, vlivu „oslabeného okraje“ a nelineárních lomově-mechanických výpočtů. Snahou bylo vysvětlit vliv velikosti z různých úhlů pohledu.

Tato práce se nejprve snaží vysvětlit vliv velikosti pomocí deterministických zdrojů (neuvažuje se proměnlivost lokální materiálové pevnosti nebo jiných parametrů materiálového modelu). Jsou zde porovnány dva materiálové modely (Microplane model a 3D Nonlinear Cementitious 2) implementované v programu ATENA (Červenka a Pukl [32]). Tyto efekty poskytují částečně klesající tendence křivky vlivu velikosti (závislost nominální pevnosti na velikosti v bilogaritmickém měřítku). Dále byl modelován statistický vliv velikosti definováním lokální materiálové pevnosti pomocí autokorelovaných náhodných polí. Asymptota statistického vlivu byla ověřena pomocí simulací v programu ATENA i výpočtem Weibullova integrálu. Výše zmíněné jevy byly modelovány ve 2D prostředí. Aby bylo možné ověřit všechny možné vlivy velikosti, byly vytvořeny 3D modely pro ověření hypotézy vlivu ohybu z roviny namáhání vlivem různé tuhosti po tloušťce vzorku (vrstevnatost vzorku způsobená

postupem betonáže). Byl sledován také vliv změny materiálové délky na nominální pevnost konstrukce (lomová houževnatost G_F , šířka lokalizační zóny c_b).

4.2 Základní údaje z experimentů

Vychází se z experimentu zdokumentovaného van Vlietem a van Mierem. Zde budou uvedena nejnutnější data; podrobné info lze získat ze zdrojů citací v úvodu kapitoly 4. Použité vzorky mají tvar psí kosti a jsou zatěžované jednoosým tahem s excentricitou závislou na velikosti vzorku $e = D/50$. Horní i dolní příložce byla umožněna volná rotace ve všech směrech kolem zatěžovacího uzlu. Příložky byly k betonovému vzorku přilepeny. Bylo testováno 6 různých velikostí A – F (viz obr. 4.1). Vzorky byly geometricky podobné až na jejich tloušťku, která byla konstantní ($b = 0.1$ m). Betonová směs byla navržena tak, aby průměrná krychlová pevnost f_{CU} byla 50 MPa a maximální velikost kameniva $d_{max} = 8$ mm.



Obr. 4.1: Vzorky tvaru psí kosti testované van Vliet a van Mier [28]: velikost A až F, modelováno 2D v programu ATENA

Nutno poznamenat, že šířka vzorku velikosti A je v místě zúžení pouze 30 mm. V porovnání s maximální velikostí zrna kameniva ($d_{max} = 8$ mm) je otázkou zda tento malý vzorek může být uvažován a porovnán s ostatními vzorky ze série.

Autoři experimentu zmiňují, že vzorky byly betonovány ve třech vrstvách (van Vliet a van Mier [29]). Tento postup pravděpodobně způsobil rozdílnou tuhost ve směru betonáže, která se může projevit u relativně silných malých vzorků (A, B) a nehraje významnou roli u velkých a relativně štíhlých vzorků (E, F) (kapitola 4.4.3), viz obr. 4.1.

Tab. 4.1: Data získaná z experimentu. Velikost vzorku D , nominální pevnost σ_N , variační koeficient COV a jemu odpovídající parametr tvaru Weibullova rozdělení m a počet realizací.

	D	r	σ_N	Počet	COV	m
		$0.725D$	stř. hod. (sm. odch.)	vzorků		
	mm	mm	MPa	[ks]	[%]	[-]
A	50	36.25	2.54 (0.41)	10	16.2	7.27
B	100	72.5	2.97 (0.19)	4	6.28	19.7
C	200	145	2.75 (0.21)	7	7.67	16.0
D	400	290	2.30 (0.09)	5	4.02	31.1
E	800	580	2.07 (0.12)	4	5.91	21.0
F	1600	1160	1.86 (0.16)	4	8.67	14.1

4.3 Nominální napětí, pevnost a poměrné přetvoření

Aby bylo možné výsledky experimentů a simulací pro různé velikosti D porovnávat, definujeme si nominální napětí σ . Protože je excentricita geometricky závislá na velikosti vzorku (u experimentů i výpočtových modelů), můžeme její vliv na lineární rozdělení pole napětí zanedbat a nominální napětí definovat jednoduše jako funkci charakteristického rozměru vzorku D (maximální šířka vzorku), skutečná tahová síla F použitá v obou zatěžovacích uzlech na excentricitě e a průřezová plocha A ($= 0.6Db = 0.06D \text{ m}^2$) uprostřed vzorku:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.1)$$

Nominální pevnost σ_N je nominální napětí dosažené při maximální zatěžovací síle $F_{\max}$:

$$\sigma_N = \frac{F_{\max}}{A} \quad (4.2)$$

Poměrné přetvoření je zde definováno jako podíl oddálení monitorovacích bodů a kontrolní délky:

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{l_k} = \frac{u_{\text{upp}} - u_{\text{low}}}{0,6D} \quad (4.3)$$

kde l_k = kontrolní délka, Δu oddálení monitorovacích bodů, u_{low} osový (podélný) posun dolního monitoru a u_{upp} posun horního monitoru, viz obr. 4.1 vpravo.

4.4 Deterministický model

4.4.1 2D modelování

Většina studií je provedena užitím 2D modelů. První studie byla provedena na modelech s materiálem „Microplane4“ a porovnána se studií s materiálovým modelem „3D Non Linear Cementitious 2“.

Modely byly zatěžovány přírůstkem deformace a byla sledována síla F , viz obr. 4.1. S rostoucí velikostí vzorku není uvažován přechod z rovinné deformace na rovinnou napjatost – pro všechny modely byl použit model rovinné napjatosti, i přestože napjatost malých vzorků se odchyluje od rovinné napjatosti k rovinné deformaci. Materiálové charakteristiky pro Microplane model byly vygenerovány programem ATENA po zadání krychelné pevnosti betonu $f_{CU} = 50$ MPa. Byly získány následující materiálové parametry: $K1=1.5644E-04$, $K2=500$, $K3=15$, $K4=150$ (Caner a Bažant [11]), šířka lokalizační zóny $c_b = 30$ mm, počet mikroplošek 21 (tj. hodnota, která dává dostatečně přesné hodnoty při integraci na kouli (Bažant a Oh [5])). Parametry $K1$ – $K4$ vyjadřují vlastnosti materiálového modelu Microplane, ale nemají fyzikální význam; můžeme je chápat jako parametry měřítko daného kritéria popisujícího tzv. „boundaries“ (Bažant et al. [1]). Parametr $K1$ tvoří hranici pro normálové tahové napětí (potřebné pro tahové porušení, rozevírání a uzavírání trhliny); $K1$ a $K2$ ovlivňují smykové podmínky; $K1$, $K3$ a $K4$ mají vliv na tahové a tlakové objemové podmínky; bližší popis viz Bažant et al. [1].

4.4.2 Škálování pomocí šířky lokalizační zóny a lomové energie

Šířka lokalizační zóny byla změněna na $c_b = 8$ mm, tato hodnota lépe odpovídá výsledkům získaným z experimentu v tom smyslu, že umožní vysvětlit maximum z naměřeného rozdílu σ_N deterministickými efekty, viz dále. Šířka lokalizační zóny souvisí s lomovou energií materiálu a řídí, při které velikosti modelu dochází k přechodu z plastického na křehké porušení (přechod mezi dvěma vodorovnými asymptotami v grafu zachycujícím vliv velikosti, viz obr. 4.2). Z výpočtů je patrné, že změnou hodnoty c_b je možné křivkou vlivu velikosti posouvat doprava a doleva. Vypočítáme-li deterministicky nominální pevnost pro určitou velikost D při použití hodnoty c_b , pak tuto hodnotu nominální pevnosti získáme také při výpočtu velikosti sD s hodnotou

šířky lokalizační zóny $s c_b$.

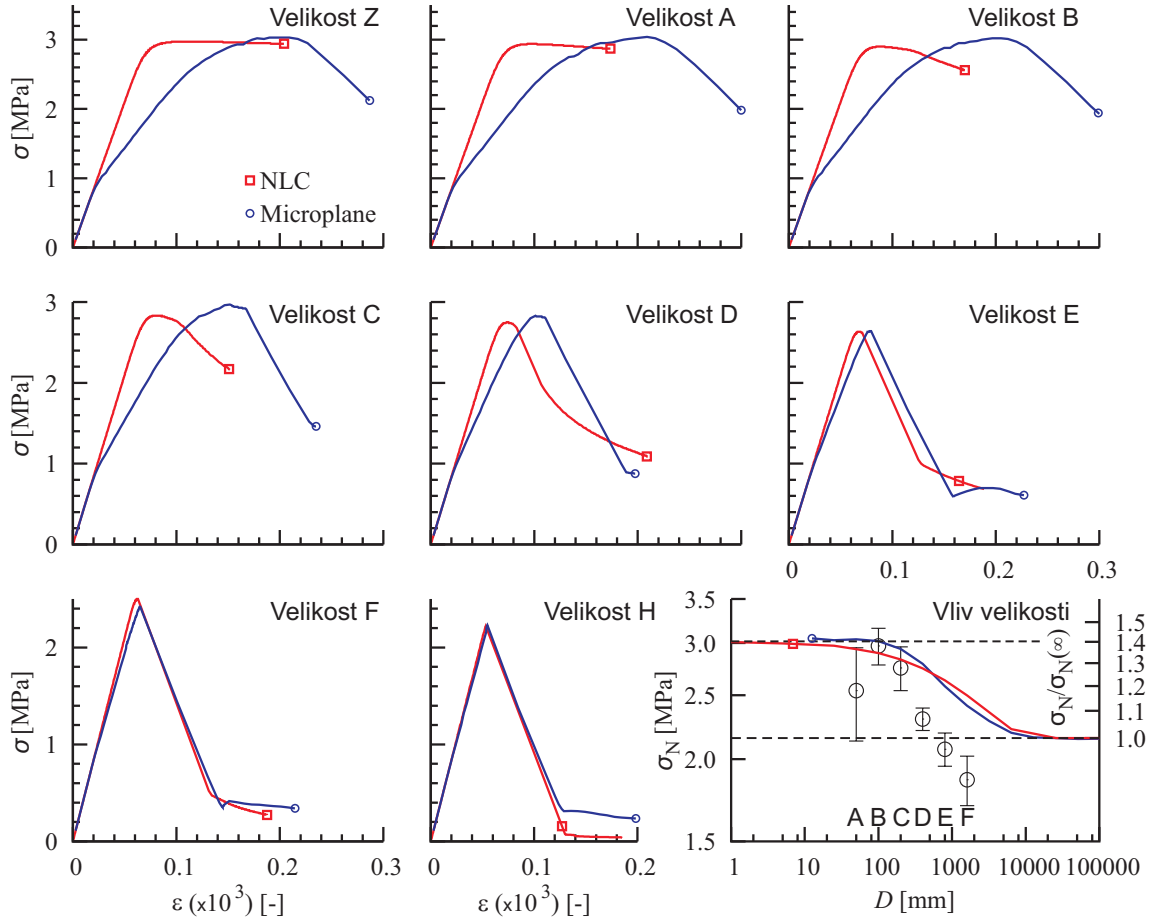
$$\text{pro } \forall s > 0 : \sigma_N^{\text{det}}(D, c_b) = \sigma_N^{\text{det}}(s D, s c_b) \quad (4.4)$$

Pokud konstrukci i šířku lokalizační zóny zvětšíme s -krát, pak pole napětí a poměrných přetvoření nabude stejných hodnot jako na nezvětšené konstrukci (pouze se „roztáhne“ přes nové souřadnice). Tohoto poznatku lze s výhodou využít pro zjednodušení tvorby výpočtových modelů různých velikostí, kdy stačí vytvořit model jedné velikosti a další získáme změnou c_b .

Pro porovnání se studií s materiálovým modelem Microplane byla vytvořena obdobná studie s použitím lomově-plastického materiálového modelu „NLCEM“ (3D Nonlinear Cementitious 2). Pro tento model byly vygenerovány základní parametry pro krychelnou pevnost $f_{CU} = 50$ MPa (tato hodnota byla použita i pro model Microplane viz tab. 4.2), tlaková pevnost $f_c = 42.5$ MPa, modul pružnosti $E = 36.95$ GPa, tahová pevnost $f_t = 3.2$ MPa a specifická lomová energie $G_F = 200$ N/m s exponenciálním změkčením podle práce Hordijk [14]. Použitím tohoto materiálu byla spočtena odezva širšího spektra velikostí než bylo testováno při experimentu. Porovnání deformačních diagramů obou materiálových modelů je provedeno na obr. 4.2 spolu s grafem vlivu velikosti. Na obrázcích vidíme téměř ideálně plastické chování modelů malých velikostí a pružně-křehké chování velkých modelů. U konstrukcí malých velikostí vykazuje materiálový model Microplane výrazné snížení tuhosti před dosažením maximální síly, přestože počáteční tuhost je shodná s materiálem NLCEM. Asymptota nominální pevnosti pro velmi malé i velmi velké vzorky je u obou materiálových modelů totožná, viz obr. 4.2 vpravo dole.

Tab. 4.2: Materiálové charakteristiky NLCEM modelu použité pro numerickou analýzu

Parametr	Hodnota
Krychelná pevnost f_{CU}	50 MPa
Modul pružnosti E	36950 MPa
Poissonovo číslo μ	0.2 [-]
Pevnost v tahu f_t	3.2 MPa
Pevnost v tlaku f_c	42.5 MPa
Specifická lomová energie G_F	200 N/m



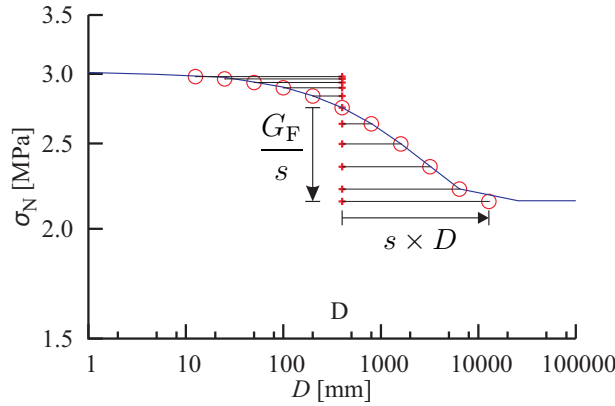
Obr. 4.2: Porovnání grafů napětí vs. poměrné přetvoření získaných deterministickým výpočtem pro materiálový model Microplane a NLCM pro různé velikosti konstrukce. Vpravo dole: nominální pevnost v závislosti na velikosti konstrukce pro oba materiálové modely, porovnání se středními hodnotami pevnosti získanými z experimentu.

Vliv specifické lomové energie v modelu NLCM je velmi podobný vlivu šířky lomové procesní lokalizační zóny. Lze jednoduše konstatovat, že

$$\text{pro } \forall s > 0 : \sigma_N^{\text{det}}(D, G_F) = \sigma_N^{\text{det}}(s D, s G_F) \quad (4.5)$$

To znamená, že body na křivce vlivu velikosti můžeme posouvat doprava a doleva právě změnou hodnoty specifické lomové energie G_F , viz obr. 4.3. Nejenže nominální pevnost je závislá na velikosti konstrukce. Pokud zvětšíme velikost konstrukce a lomovou energii s -krát, pak pole napětí a poměrných přetvoření bude stejné jako u nezvětšené konstrukce (pouze se „roztáhne“ přes nové souřadnice). Tento fakt umožňuje, že můžeme pro všechny analyzované velikosti použít model pouze jedné

velikosti D a výsledky pro ostatní velikosti získáme změnou hodnoty G_F . Pro názornost byl proveden výpočet na konstrukci velikosti D s původní lomovou energií G_F přenásobenou parametrem s ($s = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 2, 4, 8, 16, 32$, poměr největší a nejmenší velikosti je 1:1024) a hodnoty nominální pevnosti byly vyneseny do grafu v závislosti na velikosti konstrukce. Při posunutí těchto bodů o hodnotu D/s padly tyto body přesně na křivku vlivu velikosti vypočtenou pro konstantní G_F a proměnnou velikost D , viz obr 4.3. Toho lze využít pro studium vlivu náhodné lomové energie G_F : tento vliv lze (mnohdy analyticky) transformovat na vliv velikosti. Pokud bychom znáhodnili spolu s G_F i jiné parametry, potom by výsledný efekt byl komplikovanější. Nejčastěji používaná kombinace v akademických studiích je současné znáhodnění lomové energie G_F a tahové pevnosti f_t . Již dříve bylo ukázáno (Vořechovský [37], Vořechovský a Novák [45]), že silná pozitivní korelace těchto dvou parametrů, kdy se oba náhodně mění v prostoru, způsobuje zvýšení sklonu křivky vlivu velikosti v přechodové oblasti mezi oběma limitními asymptotami.



Obr. 4.3: Graf změny velikosti konstrukce pomocí G_F v bilogaritmickém měřítku.

Můžeme zapsat, že hodnota $\sigma_N(\infty, G_F) \equiv \sigma_{N,\infty}$ se blíží k asymptotě pro velké velikosti (obr. 4.15). Je to nominální napětí, kdy hlavní tahové napětí dosáhne právě tahové pevnosti f_t . V definici (viz rovnice 4.2) není zahrnuta excentricita zatížení a možná koncentrace napětí v místě krčku, proto $f_t \neq \sigma_{N,\infty}$. Poměr $f_t/\sigma_{N,\infty}$ může být získán uvažováním dvou vlivů: (a) koncentrace napětí v místě krčku vlivem zakřivení stěn vzorku a (b) excentricita zatížení. První vliv lze vyjádřit násobitelem 1.24 (poměr mezi maximálním napětím získaným se zakřivením a druhotným stejnoměrným napětím). Druhý vliv lze kvantifikovat hodnotou 1.2 tedy násobitelem napětí, který je možné vypočítat z normálového napětí vzniklého centrickým zatížením normálovou silou a ohybovým momentem $= F/A (1 + 6e/0.6D) = F/A (1 + 0.2)$. Vynásobe-

ním těchto dvou hodnot $1.24 \times 1.2 = 1.49$ dostáváme hodnotu, která odpovídá hodnotě získané výpočtem MKP vzorku velké velikosti, kde $f_t/\sigma_{N,\infty} = 3.2/2.152 = 1.49$.

Asymptota pevnosti pro malé velikosti $\sigma_N(0, G_F) \equiv \sigma_{N,0}$, vzorek dokonale elasto-plastický by měl dosáhnout maximálního zatížení při napětí, které se rovná jeho tahové pevnosti f_t (celý průřez krčku je plasticky přetvořen, materiál teče). Numerické simulace, ale ukázaly, že tomu tak není a že maximální napětí malých vzorků je $\sigma_{N,0} \approx 0.95f_t = 1.42 \sigma_{N,\infty}$. Tato hodnota je zároveň vzdálenost mezi asymptotami vlivu velikosti získanými deterministicky (uvážením redistribuce napětí, plastická rezerva $\approx 42\%$), viz pomocná svislá osa grafu obr. 4.2 vpravo dole.

Aproximace průběhu křivky vlivu velikosti

Nominální pevnost v závislosti na velikosti může být v našem případě pro model psi kosti dobře aproximována pomocí vztahu (Bažant a Planas [8]):

$$\sigma_N^{\text{det}}(D) = \sigma_{N,\infty} \left(1 + \frac{D_b}{D + l_p} \right) \quad (4.6)$$

kde deterministická charakteristická délka $D_b \approx 300$ mm, l_p je druhá deterministická charakteristická délka, která řídí polohu středu přechodové větve křivky vlivu velikosti (přechod mezi plastickou a elastickou asymptotou). Hodnota l_p může být odvozena z poměru limitní pevnosti pro „ideálně plastický“ a „elasticko-křehký“ stav $\eta_p = (1 + D_b/l_p) \approx 1.42$; tudíž $l_p \approx 714$ mm (tato hodnota je velmi blízká hodnotě Irwinovy charakteristické délky $\ell_{ch} = E G_F/f_t^2 \approx 720$ mm). Vztah (4.6) vyjadřuje přechod z dokonale plastického chování pro hodnotu $D/l_p \rightarrow 0$ (odpovídá elastickému vzorku jehož trhliny jsou vyplněny dokonale plastickým lepidlem) k dokonale křehké chování pro $D/D_b \rightarrow \infty$. Bližší informace o parametrech a vztahu lze získat z nedávno publikované práce Bažant et al. [9]. S odvoláním na tvrzení o transformaci G_F na D lze tvrdit, že rozdělení nominální pevnosti σ_N pro danou velikost D může být zapsána analyticky pokud známe rozdělení náhodné c_b nebo G_F (za předpokladu, že platí rovnice 4.6).

4.4.3 3D modely

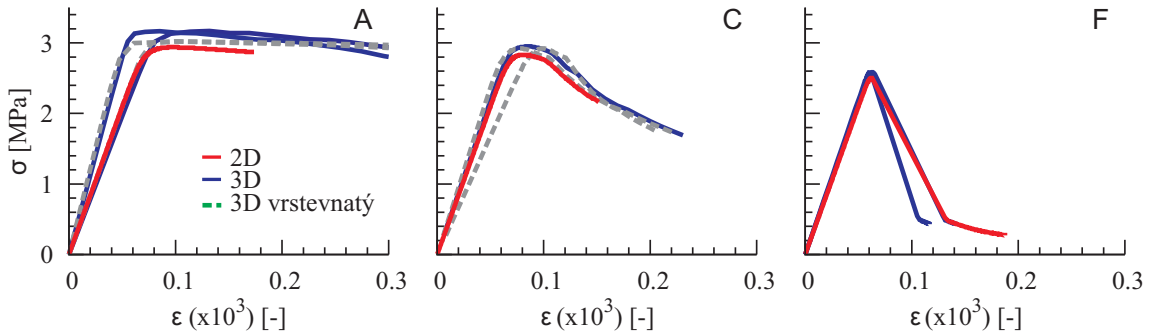
Již bylo zmíněno, že 2D model byl vytvořen s použitím modelu rovinné napjatosti. Toto by mohlo být zdrojem jisté chyby, protože tloušťka nejmenšího vzorku není zanedbatelná vzhledem k ostatním rozměrům, viz obr. 4.1.

Byly vytvořeny modely všech velikostí použitých v experimentu v programu ATENA 3D s použitím stejného materiálového zákona jako ve 2D verzi (lomově-plastický materiál NLCEM). Studie byla provedena ve dvou modifikacích:

- (i) konstantní rozdělení tuhosti po celé konstrukci
- (ii) model se třemi vrstvami, které mají různou tuhost díky různému modulu pružnosti E

Konstantní rozdělení tuhosti

V případě homogenního modelu byl použit modul pružnosti stejný jako ve 2D modelu. Vzájemným porovnáním odezvy 2D a 3D modelů bylo zjištěno, že nelze nalézt významné rozdíly. Maximální síla a σ - ε grafy jsou téměř shodné, viz obr. 4.4. Rozdíl je pouze u konstrukce malé velikosti, kdy poměrná přetvoření zjištěná v krčku jsou nepatrně větší než na přední a zadní straně. To může být způsobeno koncentrací napětí v místě příložek, které nejsou dokonale tuhé vlivem bodového zatěžování. Toto umístění uzlového zatížení bylo použito pro umožnění všesměrného natáčení obou příložek. Grafy střední a velké velikosti se na vzestupné větvi neliší, viz obr. 4.4. Velký vzorek ve 3D modelu má rozdílnou sestupnou větev pro přední a zadní stranu. Toto je způsobeno ztrátou numerické symetrie - vzorek se ohýbá i v druhém směru (z roviny).



Obr. 4.4: Porovnání σ - ε grafů 2D a 3D modelů.

Model se třemi vrstvami

V případě nehomogenního modelu byly použity hodnoty materiálových parametrů podle předešlé studie, kterou provedli van Vliet a van Mier [29]. Toto publikoval také Vořechovský [38]: vlivem ohybu z roviny mohlo dojít k dalšímu snížení pevnosti sledované na malých vzorcích, viz obr. 4.1 zcela vlevo. Autoři experimentu

tvrdí, že při betonáži vzorků dochází k různému rozdělení vlastností materiálu po tloušťce vzorku. Proto by vlivem proměnné tuhosti, vzniklé při betonáži, mohla začít vznikat trhlinka blíže k přednímu líci vzorku a dojít k ohybu vzorku ve směru z roviny modelované ve 2D. van Vliet a van Mier [29] ukázali, že pokles nominální pevnosti pro nejmenší velikost může být vysvětlen pomocí průběhu poměrných přetvoření (napětí), která mohou vznikat vlivem tvaru vzorku, excentricity vnějšího zatížení, materiálové nehomogenity a vnitřních napětí od nerovnoměrného smršťování. Provedli studii za použití lineárního modelu, ve kterém uvažovali nominální napětí způsobené

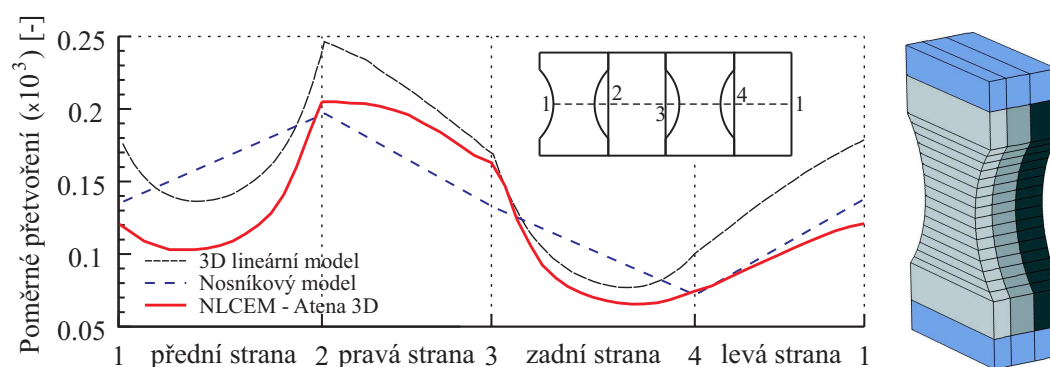
- (i) tahem (s faktorem koncentrace napětí odpovídajícího tvaru vzorku (psí kosti))
- (ii) ohybovým momentem v rovině od excentricity zatížení
- (iii) ohybovým momentem z roviny způsobený rozdílnou tuhostí vzniklé při betonáži

Ukázali, že většina pozorovaných vlivů velikostí může být uspokojivě vysvětlena tímto lineárním modelem.

Zde prezentovaný homogenní 3D model byl modifikován rozdělením modelu na tři vrstvy o různé tloušťce v závislosti na výrobním postupu (viz obr. 4.5 vpravo). Vážený průměr tří modulů pružnosti byl roven hodnotě použité u homogenního modelu. Hodnoty E modulů byly nastaveny na 35.13, 30.59, 24.93 GPa ve stejném poměru jaký použili u nelineárního modelu van Vliet a van Mier [29]. Důvod je následující: přední stěna je méně tuhá, a proto se ochotněji protahuje a to způsobí vnitřní excentricitu a ohyb z roviny, což je způsobeno vrstevnatostí modelu vzniklé postupem betonáže. Tudíž mikrotrhlinka začne vznikat na předním líci konstrukce a to povede k lokálnímu snížení tuhosti a k zvýšenému vzniku mikrotrhlin než dříve. Přesto naše výpočty s 3D modely s použitím nelineárního materiálového zákona nepotvrdili tuto myšlenku.

Pro velké konstrukce nemají tyto vrstvy žádný vliv díky zanedbatelné tloušťce vzhledem k ostatním rozměrům konstrukce. U malých velikostí byla odezva relativně duktilní, viz obr. 4.2 a 4.4. Fakt, že chování vzorků velikosti A je téměř ideálně plastické, je způsobeno volbou G_F a c_b . Přestože trhliny vznikají nejdříve na předním povrchu než na zadním (viz obr. 4.1 vlevo), neelastická odezva materiálových bodů je téměř dokonale elasto-plastická a celkové chování modelu je také ideálně elasto-plastické (ohyb z roviny záhy vymizí a celý průřez plasticky teče). Největší

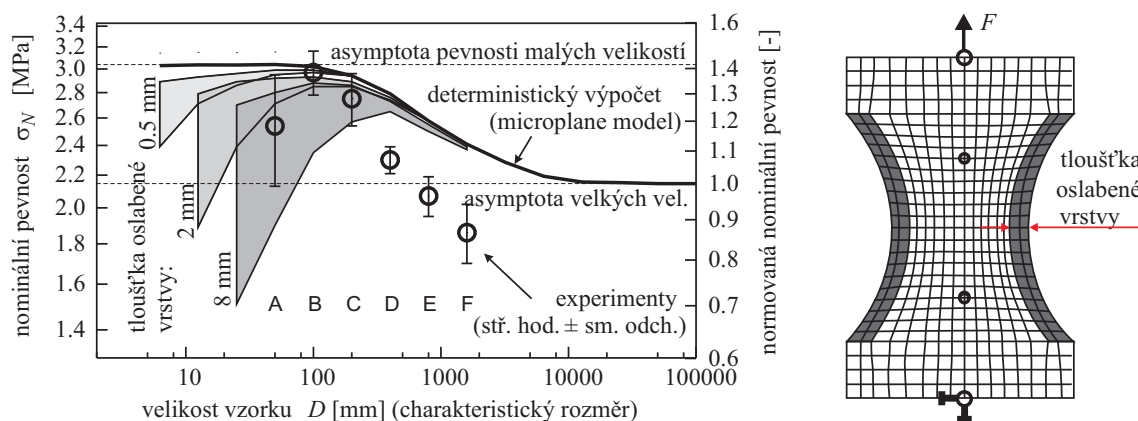
rozdíl je vidět na modelu střední velikosti C, jehož odezva je mezi křehkým a elastickým chováním a jeho tloušťka 100 mm je stále porovnatelná s jeho ostatními rozměry. Pro model velikosti C byl graf s průběhem poměrného přetvoření na hraně v úrovni zúžení vytvořen pro hodnotu zatížení z oblasti lineární vzestupné větve. Obr. 4.5 porovnává vypočtené hodnoty s dříve získanými výsledky z článku van Vliet a van Mier [29]. Výpočty potvrdily, že poměrné přetvoření není rovnoměrně rozdělené po průřezu a že mikrotrhliny nevznikají současně. Tento fakt potvrzuje závěry, které publikovali van Vliet a van Mier [29], že nominální pevnost σ_N roste od A do C a klesá pro velikosti blíží se F, toto můžeme částečně vysvětlit gradientem poměrných přetvoření. Na druhé straně pokud vezmeme pro porovnání nelineární materiálovou odezvu, je zřejmé, že gradient poměrných přetvoření získaný lineární analýzou nemusí úplně platit pro malý vzorek potrháný mikrotrhlinami. Na obr. 4.5 průběh poměrných přetvoření po povrchu vzorku v místě krčku, získaný za použití NLCEM materiálového modelu, nedosahuje takových špiček jako lineární model vlivem přerozdělení tuhosti. Pokles pevnosti u malých velikostí je možné vysvětlit vysokou nehomogenitou vzorku (velikost zrna 8 mm) v kombinaci s ohybem z roviny (excentricita vzniklá během betonáže), nelze to však vystihnout homogenním modelem kohezivních napětí (dokonale plastický materiál).



Obr. 4.5: Levý: Rozdělení poměrného přetvoření po hraně průřezu v místě zúžení. Porovnání výsledků z ATENY s analýzou, kterou provedli van Vliet a van Mier [29]. Vpravo: Model se třemi homogenními vrstvami v programu ATENA 3D.

4.5 Vliv oslabení okrajové vrstvy

Možným vysvětlením poklesu pevnosti u vzorků malých velikostí může být oslabení okrajové vrstvy. Pokud odhlédneme od různých nepravidelností jako např. rozdělení poměrného přetvoření vlivem ohybu z roviny (van Vliet a van Mier [29]), největší vliv má u nejmenších vzorků okrajová vrstva, která má nižší pevnost a nejspíš i tuhost. Okrajová vrstva nezatížených vzorků, vlivem přerozdělení napětí během vysychání vzorků, je namáhána tahem a dochází v ní ke vzniku trhlin (RILEM-TC-QFS [23], van Mier [25]). Diferenční smršťování a různá teplota uvnitř vzorku během tvrdnutí betonu způsobuje vnitřní napjatost. Toto vnitřní pnutí má podstatný vliv na chování malých vzorků díky velké specifické ploše (van Vliet a van Mier [30]). U velmi velkých vzorků nedochází k vysoušení jádra průřezu až do provedení tahové zkoušky, a proto má na vliv velikosti jen malý vliv.



Obr. 4.6: Porovnání křivek vlivu velikosti „deterministické“ a „oslabené vrstvy“ provedené s Microplane modelem.

Jednoduchý způsob zavedení tohoto vlivu do modelu je snížení materiálové pevnosti v okrajové vrstvě, viz obr. 4.6vpravo. Provedená parametrická studie má objasnit tyto vlivy: (i) vliv tloušťky oslabené vrstvy (ii) vliv míry snížení materiálové pevnosti okrajové vrstvy. Na obrázku 4.6vlevo je vykresleno šest křivek vlivu velikosti vypočtených s deterministickým modelem doplněným o okrajovou vrstvu se sníženou materiálovou pevností na obou zakřivených stranách vzorku (viz obrázek vpravo). Byly zvoleny tři tloušťky okrajové vrstvy t_w (0.5, 2 a 8 mm) a pro každou tloušťku se uvažovaly dva různé redukční parametry materiálové pevnosti r_t (0.5 a 0.9). Na obrázku jsou pro každou tloušťku vrstvy vykresleny dvě křivky (horní křivka vždy odpovídá redukčnímu parametru 0.9 a dolní parametru 0.5). Můžeme pozorovat, jak se tloušťka vrstvy stává zanedbatelnou vzhledem k velikosti vzorku

D a také vliv na nominální pevnost klesá. Poměr mezi redukovanou pevností a deterministickou nominální pevností můžeme použít jako redukční koeficient pevnosti pro bezrozměrný poměr t_w/D . To vede na jednoduché pravidlo, porovnáním deterministické pevnosti bez okrajové vrstvy a vzorku oslabeného okrajovou vrstvou:

$$r_\sigma \left(\frac{t_w}{D} \right) = \frac{\sigma_N(D, t_w)}{\sigma_N^{\text{det}}(D)} \cong \frac{\sigma_N(s/D, s t_w)}{\sigma_N^{\text{det}}(s/D)} \quad (4.7)$$

kde s = kladný násobitel a r_σ = redukční faktor pevnosti vzorku. $r_\sigma \in \langle r_t; 1 \rangle$, kde $\sigma_N^{\text{det}}(D)$ = deterministická pevnost pro velikost D ; $\sigma_N(D, t_w)$ = deterministická pevnost pro velikost D a oslabenou vrstvu tloušťky t_w ; r_t = redukční parametr pro materiálovou pevnost oslabené vrstvy $r_t \in \langle 0; 1 \rangle$.

Nejlepší výsledky byly získány s tloušťkou vrstvy $t_w = 2$ mm a redukčním parametrem $r_t = 0.5$. Jak můžeme vidět na obr. 4.6, jsme schopni částečně vystihnout prudký pokles pevnosti malých vzorků, jejichž poměr tloušťky okrajové vrstvy t_w a tloušťky krčku $0.6D$ není zanedbatelný. Deterministický vliv velikosti, který byl studován v předcházející podkapitole, je automaticky zahrnut ve výpočtech, neboť používáme stejný materiálový model i parametry. Nicméně nejdůležitější zdroj redukce pevnosti velkých vzorků nemůže být modelován žádným z doposud studovaných vlivů. Také nejsme schopni modelovat rozptyl pevností, protože v modelu ještě nebyla uvažována žádná náhodnost.

4.6 Stochastický model

V dalším textu představíme modelování nehomogenity materiálu pomocí autokorelovaných náhodných polí, která lépe vystihují rozdělení materiálových vlastností na reálné konstrukci.

4.6.1 Náhodná pole lokální pevnosti

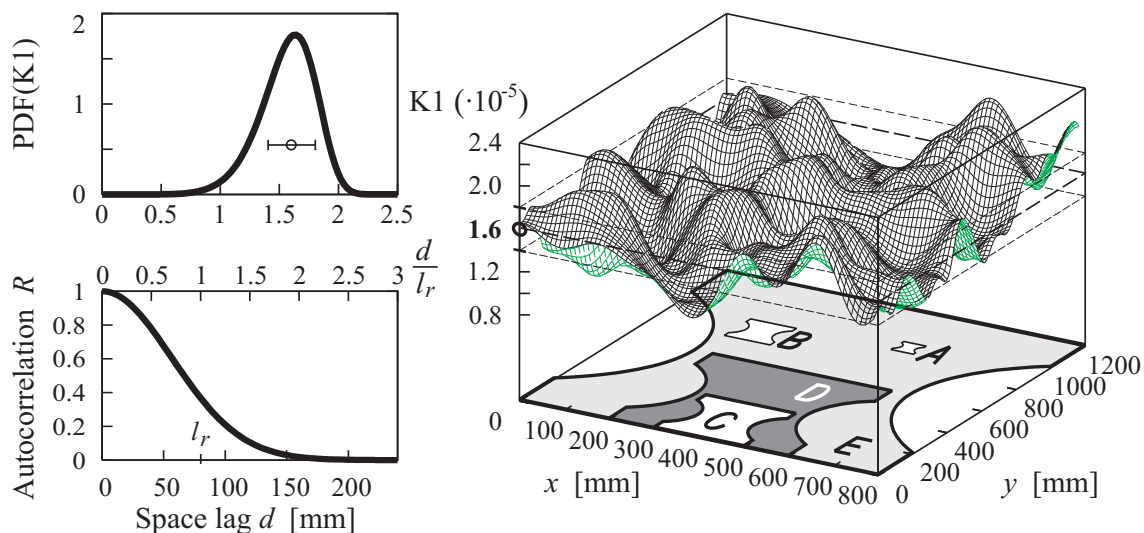
Vzhledem k tomu, že energeticko-deterministický vliv velikosti je schopen vysvětlit pouze 49% pokles pevností velkých konstrukcí proti malým konstrukcím, lze očekávat, že významnou roli hrají statistické aspekty pevnosti. To potvrzuje i rozptyl pevností vzorků u každé velikosti. Věříme, že podstatnou složkou vlivu velikosti je statistická část způsobená prostorovou variabilitou/náhodností lokální materiálové pevnosti. Proto ve studii s materiálovým modelem Microplane byl v programu ATENA znáhodněn parametr $K1$, který souvisí s pevností materiálu, pomocí metody Monte Carlo pro všechny velikosti. Stejný způsob byl použit i u materiálového

modelu NLCEM, u kterého byl znáhodněn parametr f_t . Bylo vytvořeno 64 realizací náhodných polí parametru K1 (resp. f_t) pro každou velikost a spočítána odezva v programu ATENA (σ - ε grafy, pole napětí, tvar trhlin, atd.). Numericky bylo testováno zda je pevnost konstrukce lineárně závislá na parametru K1 v širokém rozmezí hodnot kolem střední hodnoty použité v deterministickém modelu, viz oddíl 4.6.1 této kapitoly. Důvodem pro definování lokální pevnosti materiálu pomocí náhodného pole místo nezávislé náhodné proměnné je předpoklad, že ve skutečnosti pevnosti dvou blízkých oblastí musí být silně závislé (korelované) a tudíž jejich vztah může být modelován pomocí autokorelovaného náhodného pole, viz obr. 4.7 vpravo.

Rozdělení lokální pevnosti v každém materiálovém bodě má Weibullovo rozdělení, viz obr. 4.7 vlevo nahoře. Pro lokální pravděpodobnost poruchy P_f (kumulativní distribuční funkce F_σ) závislé na úrovni napětí σ platí:

$$P_f = F_\sigma(\sigma) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (4.8)$$

kde σ_0 = parametr měřítka Weibullova rozdělení ($1.6621 \cdot 10^{-4}$ MPa pro parametr K1 a 3.4 MPa pro tahovou pevnost f_t), m = tvarový parametr Weibullova rozdělení (bezrozměrný, závislý výhradně na COV = variační koeficient; $m = 7.91$ shodně v obou studiích).



Obr. 4.7: Nahoře-vlevo: Weibullovo rozdělení pravděpodobnosti znáhodněného parametru K1 (Eq. 4.8). Dole-vlevo: Autokorelační funkce (Eq. 4.9). Vpravo: Realizace Weibullova náhodného pole K1 v porovnání se vzorky velikosti A – E. Čárkované linie znázorňují střední hodnotu a střední hodnotu $\pm$ směrodatná odchylka odchylka parametru K1.

Pro získání výsledků porovnatelných s předchozí deterministickou analýzou byla použita hodnota parametru $K1$ (f_t) jako střední hodnota tj. $1.5644 \cdot 10^{-4}$ MPa (3.2 MPa). Druhý parametr Weibullova rozdělení byl nastaven s ohledem na COV nominální pevnosti nejmenší velikosti A (v experimentu byla hodnota COV pro velikost A 0.16) z důvodu, že velikost A má největší rozsah výběru (10 realizací, viz tab. 4.1). Tudíž odhad variability má vyšší statistickou významnost než u ostatních velikostí. Pro jednoduchost byla hodnota COV zvolena 0.15 (15% variabilita lokální materiálové pevnosti). Toto je relativně vysoká hodnota naznačující neobvykle nízký Weibullův modul zmíněný výše. Jiná volba Weibullova modulu založená např. na rozptylu nominální pevnosti pro velikost C by vedla k většímu m (≈ 16) a tudíž menšímu rozptylu výsledků ($COV \approx 0.08$) a mírnějšímu sklonu na asymptotické části křivky vlivu velikosti pro $D \rightarrow \infty$. Na druhé straně rozptyl experimentálně získaných sil na mezi porušení je mnohem vyšší pro velikost A , což ukazuje na silný vliv tvarových, geometrických imperfekcí (excentricita, atd.).

Autokorelační funkce a délka

Diskretizované náhodné pole můžeme považovat za souhrn (auto)korelovaných náhodných proměnných. Nejdůležitější parametr (pro získání autokorelované funkce) je autokorelační délka, která řídí vzdálenost, na které je náhodná materiálová pevnost korelována. Je použita kvadratická exponenciální autokorelační funkce (obr. 4.7 vlevo-dole):

$$R = \exp \left[- \left(\frac{d}{l_r} \right)^2 \right] \quad (4.9)$$

kde d = vzdálenost mezi dvěma body; l_r = korelační délka (80 mm pro náhodné pole s parametrem $K1$).

Korelační délka l_r byla uvažována jako materiálová konstanta související s mikrostrukturou (velikost zrn a rozdělení poruch a jejich četnost, tj. vzdálenost mezi jednotlivými jevy) a způsobu výroby (betonáž, zhutňování, atd.). Hodnoty pro autokorelační funkce jsou blízké jedničce pro páry velmi blízkých bodů (horní limit korelace je jedna). Pro pár vzdálených bodů autokorelace klesá k nule (vymizí statistická korelace materiálových vlastností mezi těmito body). Pro nosník o velikosti menší než autokorelační délka pak získáme náhodné pole lokální pevnosti (f_t , $K1$) jako téměř konstantní funkci přes celý model (viz obr. 4.7 vpravo), a proto by všechny lokální pevnosti celého vzorku mohly být nahrazeny právě jednou náhodnou proměnnou (namísto mnoha prostorově korelovaných proměnných). Protože nominální

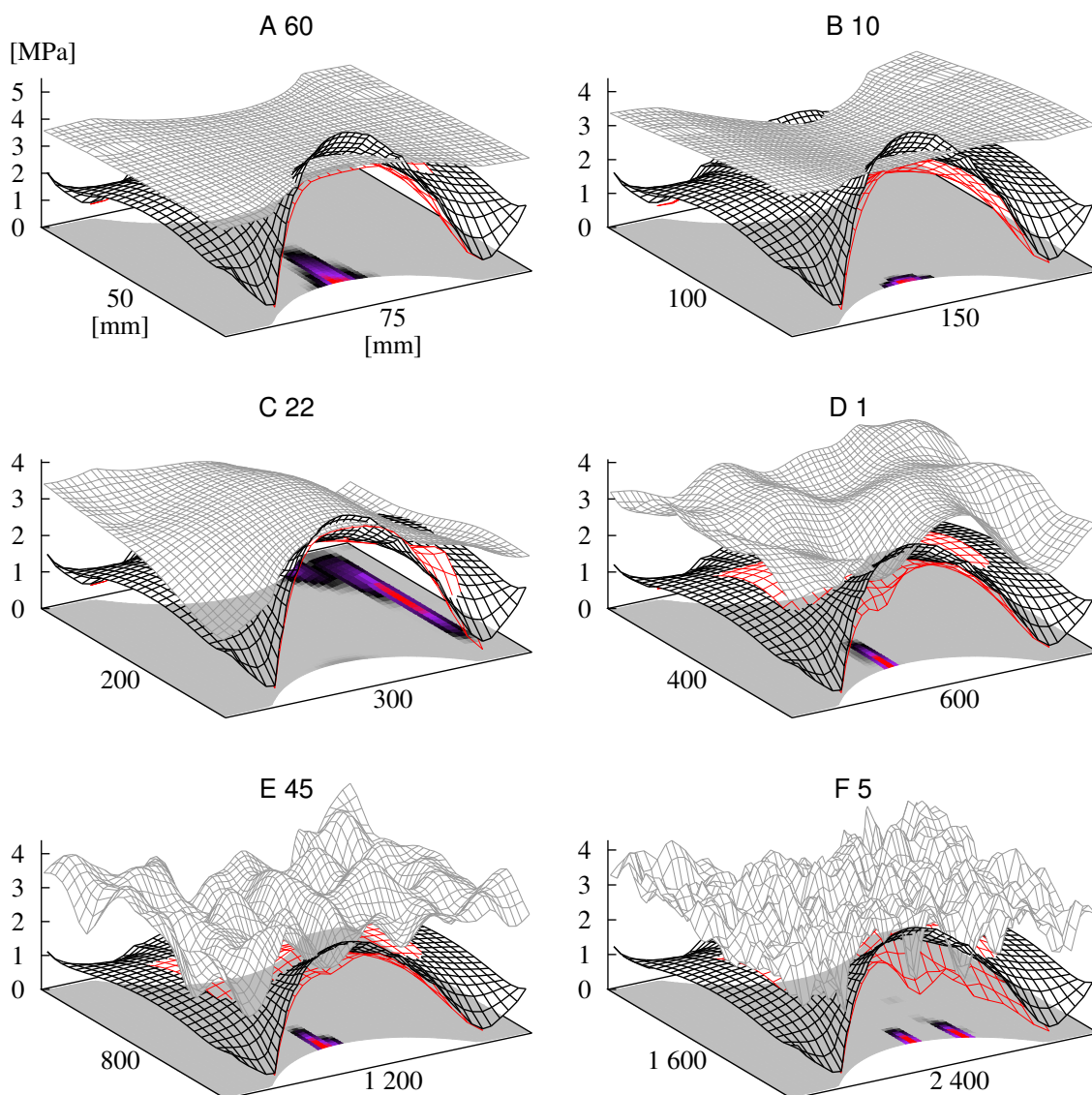
pevnost vzorku je jednoduchá transformace vstupního parametru f_t (K1) (nevyskytuje se zde žádná prostorová variabilita, která by umožňovala vznik trhlin jinde než při deterministickém výpočtu), střední hodnota nominální pevnosti nejmenšího vzorku bude stejná jako ta získaná deterministickou analýzou. To je důvod, proč byla použita hodnota f_t (K1) z deterministického výpočtu jako střední hodnota náhodných polí.

Simulace realizací náhodných polí

Realizace jednotlivých polí definovaných hodnotami v integračních bodech byly vytvořeny metodou popsanou v článcích Vořechovský [37, 39], Vořechovský a Novák [46]. V této metodě jsou pole diskretizována (uzly sítě náhodného pole se mohou přímo shodovat s integračními body MKP sítě). Podle diskretizace a dané autokorelační funkce (rovnice 4.9) je sestavena autokorelační matice $\mathbf{C}$. Tato matice je symetrická a pozitivně definitní, má ortogonální vlastní vektory Φ a s nimi související vlastní čísla Λ taková, že $\mathbf{C} = \Phi \Lambda \Phi^T$. Gaussovské náhodné pole $\mathbf{X}$ lze získat za pomoci Gaussovského náhodného vektoru ξ a spočtených vlastních čísel jako $\mathbf{X} = \Phi (\Lambda)^{1/2} \xi$. Pokud jsou potřeba ne-Gaussovská pole, použije se Natafův model (viz např. Liu a Der Kiureghian [17]). Vytvořená náhodná pole jsou stacionární, ergodická a homogenní. Popsaná ortogonální transformace byla použita v kombinaci s LHS (Latin Hypercube Sampling) k reprezentaci náhodné složky pole (Novák et al. [19]). Tato kombinace poskytuje velmi efektivně vzorky náhodných polí, které vedou k statistickým odhadům s menší variabilitou odezvy v porovnání s klasickou metodou Monte Carlo (viz numerické studie Vořechovský [39, 37], Vořechovský a Novák [46]). Toto je velmi důležitá vlastnost, protože výpočet každé odezvy zabere mnoho času (v anglické literatuře se vlastnost označuje jako „variance reduction“). V našem případě to je získání této hodnoty pomocí nelineární metody konečných prvků s materiálovým modelem Microplane (NLCEM), což je samozřejmě časově velmi náročné. Proto se snažíme provést minimální nutný počet simulací. Během testování bylo zjištěno, že počet simulací 64 je dostatečný a poskytuje stabilní a dostatečně přesné statistické odhady (průměry, odchylka, autokorelace) stejně tak jako reprodukovatelné odhady statistické odezvy konstrukce (nominální pevnost, atd.).

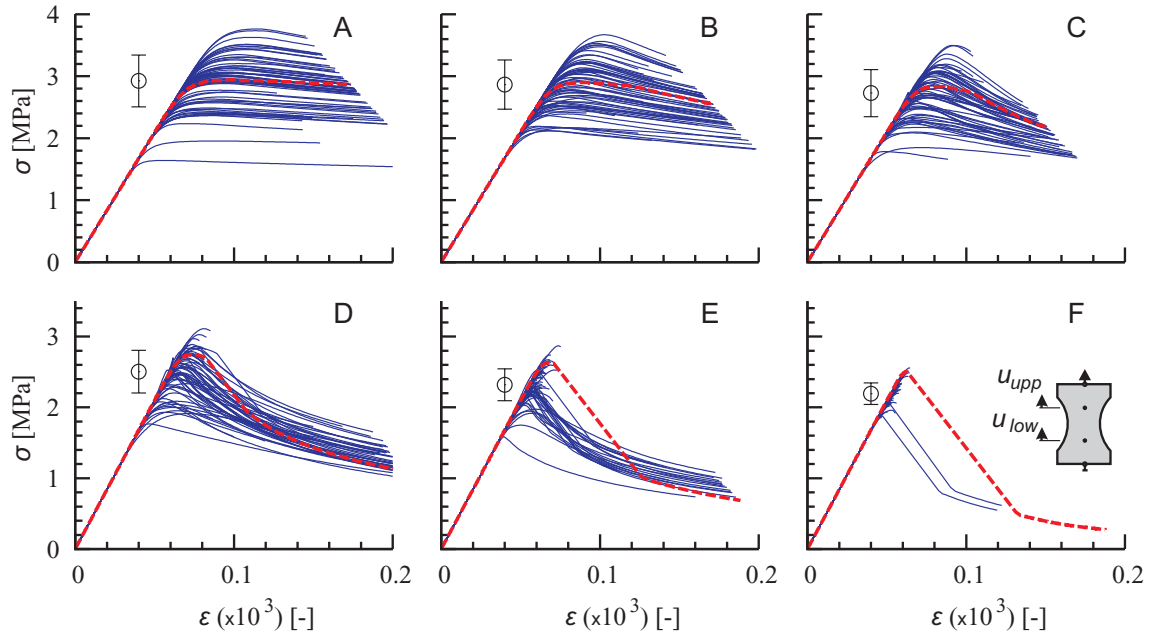
Test závislosti tahové pevnosti elementu na parametru K1

Předpokládá se, že závislost tahové pevnosti na parametru K1 v materiálovém modelu Microplane je lineární. Pro testování linearit vztahu v Ateně 2D byla zvolena



Obr. 4.8: Pole pevnosti/napětí odpovídající maximálnímu zatížení pro danou realizaci a velikost vzorku. Výsledky jsou vypočteny s náhodným polem a materiálovým modelem NLCem. Pole shora: náhodné pole pevnosti, hlavní napětí pro křehký materiál pro maximální vrcholové zatížení (nominální pevnost), skutečné hlavní napětí, dolní rovina přetvoření od vzniku trhlin. Viz také vybrané realizace na obr. 4.12.

co nejjednodušší konfigurace, model ve tvaru krychle o hraně 1 m. Byl použit materiálový model Microplane4, jehož parametry jsou vygenerovány pro $f_{CU} = 50$ MPa (viz tab. 4.3). Šířka lokalizační zóny byla změněna na $c_b = 8 \cdot 10^{-3}$. Síť MKP je prostá: konstrukce je tvořena jedním konečným prvkem. Krychle je podepřena a zatěžována spojitě na protilehlých liniích přírůstkem deformace (Obr. 4.10).



Obr. 4.9: σ - ε grafy (64 realizací) získané znáhodněným NLCEM materiálovým modelem.

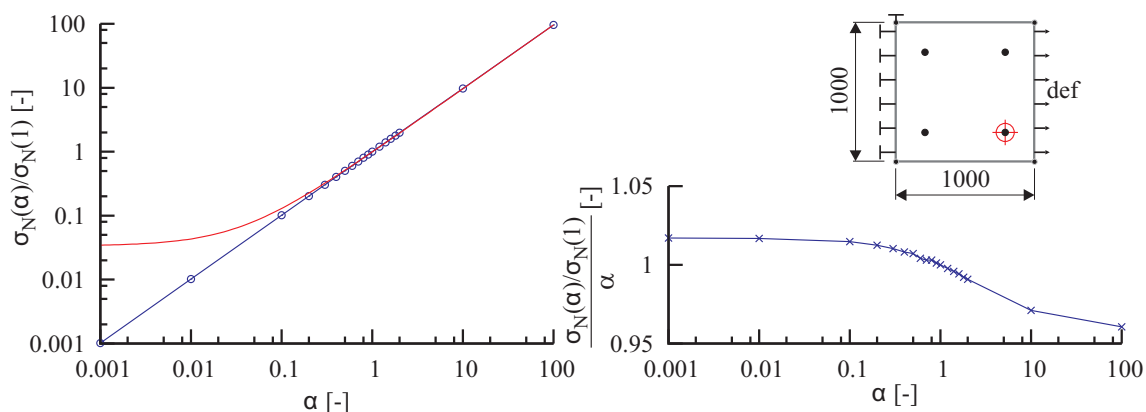
Tab. 4.3: Materiálové charakteristiky Microplane modelu použité pro analýzu

Parametr	Hodnota	Jednotka
Krychelná pevnost f_{CU}	50	MPa
Modul pružnosti E	36950	MPa
Poissonovo číslo μ	0.180	-
Microplane parametr $K1$	$1.560 \cdot 10^{-4}$	-
Microplane parametr $K2$	500	-
Microplane parametr $K3$	15	-
Microplane parametr $K4$	150	-
Počet mikro-ploch	21	-
Šířka lokalizační zóny c_b	0.008	m

Výpočet byl proveden standardní Newton-Raphson metodou pro široký rozsah hodnot $K1$. Byly sledovány hodnoty napětí a přetvoření v jednom integračním bodě. Parametr $K1$ byl volen jako α násobek ($\alpha = 0.001, \dots, 1, \dots, 100$) výchozí hodnoty $K1(1) = 1,56 \cdot 10^{-4}$, viz rovnice 4.10, 4.11.

$$K_1(\alpha) = \alpha K_1(1) \quad (4.10)$$

$$\alpha = \frac{\alpha \cdot \sigma_N(1)}{\sigma_N(1)} = \frac{\alpha \cdot K_1(1)}{K_1(1)} = \frac{K_1(\alpha)}{K_1(1)} = \frac{\sigma_N(\alpha)}{\sigma_N(1)} \quad (4.11)$$



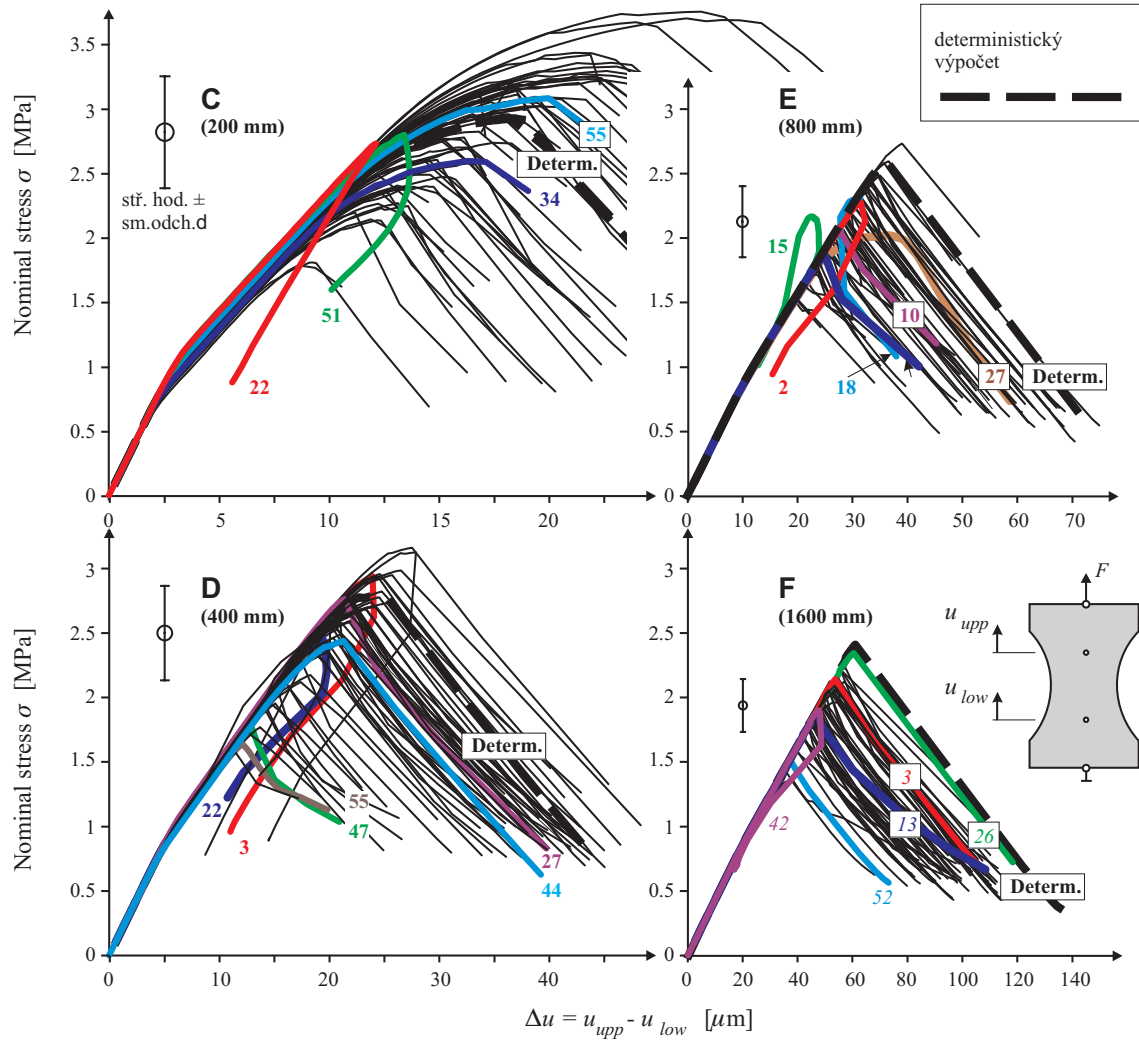
Obr. 4.10: Grafická závislost výsledného napětí na parametru K_1 .

Z grafů na obr. 4.10 je patrné, že závislost mezi tahovou pevností a parametrem K_1 je téměř lineární. Pro malé hodnoty α , které nás nejvíce zajímají, neboť trhliny se v modelech rozvíjejí v místech s malou lokální pevností, tato odchylka tvoří nejvýše 1 %.

Výpočty s náhodnými poli pevnosti

Na obr. 4.9 a 4.11 jsou vykresleny grafy (σ - ε nominální napětí-poměrné přetvoření) a zvýrazněná křivka získaná deterministickým výpočtem pro materiálové modely Microplane a NLCem. Odpovídající realizace s materiálovým modelem Microplane, jejichž σ - ε diagramy jsou na obrázku 4.11. Jsou zde zvýrazněny vybrané křivky s neobvyklým tvarem (snap-back, loop). Během testování betonových konstrukcí v běžné praxi může být příležitostně tento průběh experimentálně naměřen. Výskyt takové křivky ukazuje, že kontrolní délka nebyla správně navržena (vzhledem k tvaru vzorku a variabilitě materiálové pevnosti) a neelastická přetvoření se lokalizují mimo kontrolní délku. Během analýzy s materiálovým modelem NLCem se tyto smyčky téměř nevyskytovaly. Na obr. 4.9 značí velká písmena A – F velikost vzorku. Rozdíl mezi deterministicky získanou hodnotou a stochasticky získanou střední hodnotou roste s velikostí vzorku. Zatímco pro velikost C se střední hodnota téměř shoduje s deterministicky získanou hodnotou, pro velikost F je deterministická hodnota vyšší než střední hodnota téměř všech 64 simulací, viz obr. 4.9.

Na obrázku 4.12 jsou vykresleny vybrané realizace náhodných polí pevností pro všechny velikosti A – F včetně průběhu trhlin. Pro statistickou délku je možno napsat podobný vztah jako v rovnici (4.4) (v našem případě autokorelační délku). Pro dané

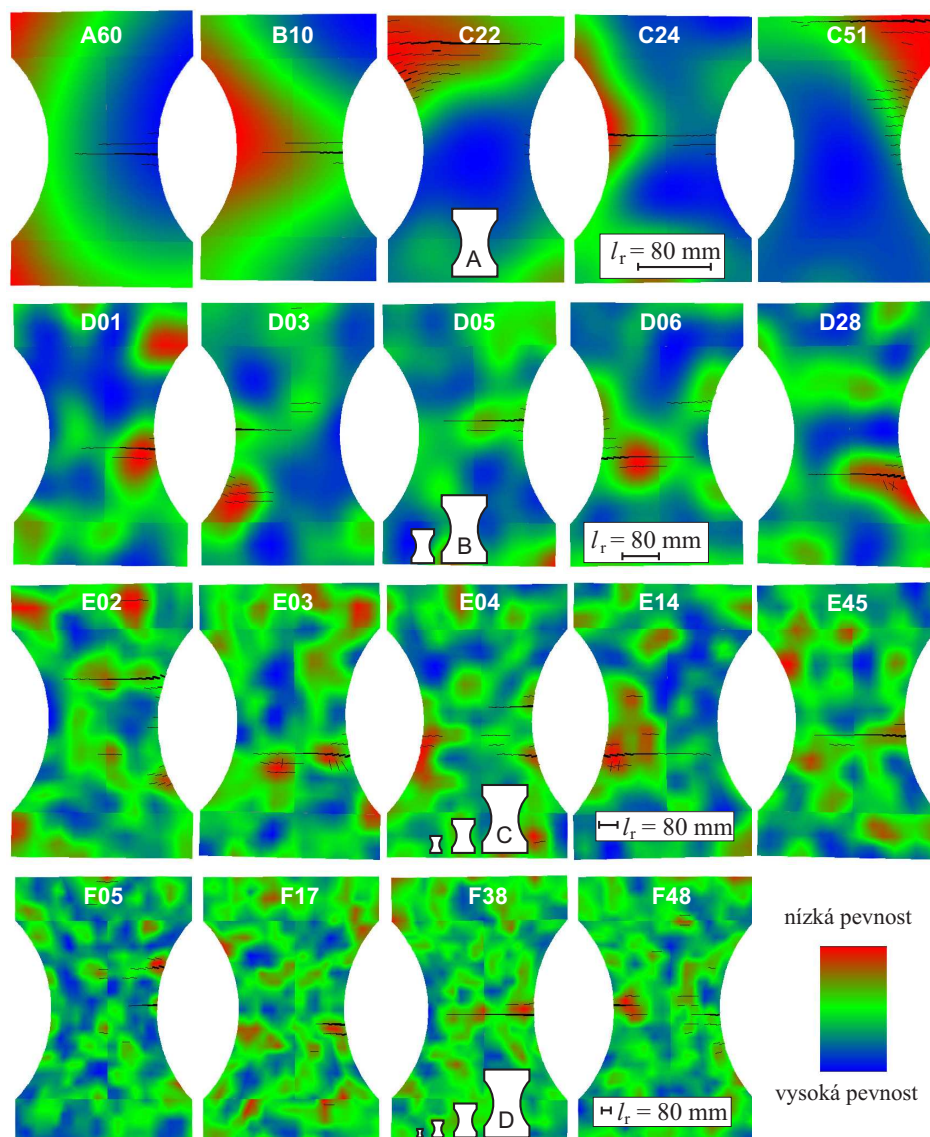


Obr. 4.11: Diagramy σ - ε vzorků velikosti C – F modelovaných materiálovým modelem Microplane.

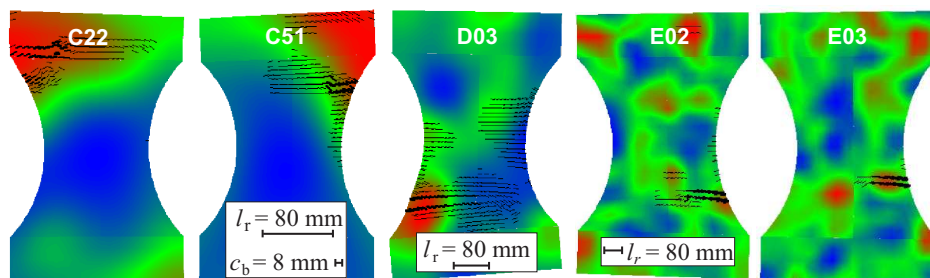
náhodné pole pevnosti (statistické rozdělení a autokorelační závislost):

$$\text{pro } \forall s > 0 : \sigma_N(D, l_r) = \sigma_N(s D, s l_r) \quad (4.12)$$

Této vlastnosti opět můžeme využít při modelování, kdy nám stačí pouze model jedné velikosti a ostatní získáme změnou l_r . Podobně jako u deterministického vlivu velikosti dochází k přechodu křivky mezi dvěma asymptotami z důvodu přerozdělení napětí v LPZ, tak i u pravděpodobnostního vlivu velikosti dochází k přechodu mezi dvěma asymptotami (horizontální pro $D \rightarrow 0$ a skloněnou pro $D \rightarrow \infty$). K přechodu dochází při hodnotách bezrozměrného poměru D/l_s v rozmezí hodnot přibližně 0.1 a 10 (přechodová velikost l_s), viz Vořechovský [36, 37], Vořechovský a Chudoba [41]. To je přímý důsledek zavedení závislosti lokální materiálové pevnosti.



Obr. 4.12: Vypočtené realizace náhodných polí a odpovídající tvary trhlin na deformovaném modelu za použití materiálového modelu NLCM.



Obr. 4.13: Vybrané vzory trhlin ze série s materiálovým modelem Microplane pro porovnání s obr. 4.12.

S klesajícím poměrem mezi autokorelační délkou l_r a velikostí vzorku D roste „rychlost“ prostorové proměnlivosti náhodného pole. To má za následek přibývající množství míst s nízkou materiálovou pevností (oblasti náchylné na vznik poruchy). S rostoucí velikostí vzorku roste pravděpodobnost, že v oslabeném místě bude i vysoké namáhání. Tento efekt byl dlouho uváděn jako statistický vliv velikosti. Klasický statistický vliv velikosti je modelován jako jednoduchý řetězový model a obvykle se dá vyjádřit pomocí Weibullova zákona (Weibull [47]). Avšak jak je vysvětleno v pracích Vořechovský [36, 37], Vořechovský a Chudoba [41], klasický Weibullův model není schopný vystihnout prostorovou korelaci mezi lokální materiálovou pevností. Weibullův model je založen na IID náhodných proměnných (nezávislé, shodné pravděpodobnostní rozdělení) spojených do série. Důsledek takové úvahy je, že pevnost nekonečně malého vzorku je nekonečná. Každá konstrukce vytvořená Weibullovým modelem je shodná s řetězem namáhaným jednoosým tahem (řetězec nezávislých článků se stejným pravděpodobnostním rozdělením napětí). Pokud je pevnost modelována autokorelovaným náhodným polem (a autokorelační délku bereme jako materiálovou vlastnost), pak asymptota pro malé velikosti má stejné pravděpodobnostní rozdělení jako lokální materiálová pevnost. Na druhou stranu asymptota pro velké velikosti je shodná s tímto Weibullovým modelem (při správné volbě referenční délky a souvisejícího parametru měřítka pro Weibullovo rozdělení ve Weibullově modelu). Autokorelační délka hraje důležitou roli jako *statistická škálovací délka*, která kontroluje přechod mezi modelem o téměř konstantní pevnosti (plná korelace u malých konstrukcí) a modelem s mnoha nezávislými lokálními pevnostmi (velké konstrukce, Weibull model), viz Vořechovský [37].

Tvar trhlin u dvou náhodně vybraných vzorků A 60 a B 10 (viz obr. 4.12) ukazují nejčastější místo lokalizace trhlin. Obrázek 4.8 ukazuje jak by vypadalo maximální hlavní napětí, pokud by nedocházelo k redistribuci a kdyby napětí mohlo být vyšší než lokální pevnost. Dále tento obrázek ukazuje skutečné (redistribuívané) napětí, které si můžeme představit jako „deformovatelný míč tlačенý zespodu proti stropu“ (pole pevnosti). Malá excentricita a relativně úzký krček vzorku téměř jistě předurčují vznik trhliny na pravé straně krčku vzorku. Realizace náhodných polí těchto dvou skupin A a B jsou téměř konstantní funkce, a proto se zde neuplatní princip nejslabšího článku. Vzorek C 22 ve stejném obrázku ukazuje, že lokální pevnost v některém místě může být tak nízká, že i relativně nízká napětí mohou v této oblasti iniciovat vznik trhliny. U tohoto vzorku došlo k rotaci příložek v opačném směru než obvykle a variabilita pevnosti přehluší vliv excentricity. Protože místo vzniku trhlin je mimo oblast, kde je měřeno posunutí Δu , můžeme na tvaru σ - ε grafu vidět

jev nazývaný „snap-back“. Způsob jakým se vzorek porušuje v oblasti s relativně nízkým napětím je spojen s relativně vysokou variabilitou lokální materiálové pevnosti. Realizace pole pevnosti v oblasti trhliny byla velmi blízká tvaru pole hlavního tahového napětí, viz obr. 4.8. Zvolením jiného rozdělení pevnosti (především s nižší variabilitou) by byl vznik trhliny mimo krček potlačen. Vzorek C 51 je také neobvyklý, zde dochází ke vzniku trhliny těsně pod příložkou. Podobný jev můžeme nalézt i v sérii velikosti D. V sérii F je autokorelační délka tak malá v poměru k ostatním rozměrům vzorku, že ke vzniku trhlin dochází opět zejména na pravé straně krčku, obr. 4.8. U vzorku F 5 na obrázku 4.8 a 4.12 je zachycen případ, kdy pole pevnosti je proniknuto polem napětí ve dvou bodech současně. V takovém případě mohou vzniknout dvě paralelní trhliny při maximálním zatížení pouze u relativně velkých konstrukcí.

U série A nebyl nikdy zaznamenán „snap-back“ způsobený vznikem trhliny mimo kontrolní délku, protože náhodné pole je téměř konstantní funkce nad celým vzorkem. K nejzajímavějšímu chování dochází u vzorků jejichž rozměr je porovnatelný s jednou nebo dvěma korelačními délkami.

Zajímavé je porovnání tvaru trhlin získaného při použití materiálového modelu Microplane s NLCЕМ modelem za použití identických realizací náhodného pole f_t (K1) (jedno pole je násobkem druhého). Je vybráno pět vzorů trhlin z předešlé studie s Microplane modelem (Vořechovský [38]) a zobrazeny zde pro porovnání. Čtenář musí nalézt stejnou velikost a číslo vzorku na obrázcích 4.12 a 4.13. Je vidět, že microplane model predikuje mnohem více trhlin v porovnání s NLCЕМ modelem. Na vzorku D03 oba materiálové modely předpovídají lokalizaci trhliny rozdílně. U Microplane modelu dochází ke vzniku trhliny mimo krček v místě nejnižší pevnosti materiálu, kdežto u NLCЕМ modelu se trhlínky původně lokalizují v místě s nízkou pevností, ale nakonec vznikne hlavní trhlina v místě krčku. Relativně rozdílný vývoj trhlin lze spojit se změkčením na vzestupné větvi u materiálového modelu Microplane, viz obr. 4.2.

4.6.2 Použití Weibullova integrálu

Simulace náhodné odezvy vzorků menších než A s náhodným polem parametru K1 je možná, protože lze využít jednoduché znáhodnění proměnné, která reprezentuje náhodnost pevnosti na vzorcích (každá realizace se stává náhodnou konstantní funkcí přes celý vzorek). Na druhé straně je velmi problematické modelovat realizace náhodných polí na vzorcích větších než F. Již existují způsoby jak tyto problémy s pravdě-

podobnostními výpočty pomocí konečných prvků překonat (Vořechovský et al. [42]), zde však bude uveden jiný způsob.

V našich výpočtech je naštěstí znáhodněna pouze pevnost, a proto můžeme použít Weibullův integrál pro velké konstrukce. Jak je vysvětleno v pracích (Vořechovský [36, 37], Vořechovský a Chudoba [41]), pokud je konstrukce dostatečně velká, prostorová korelace lokální pevnosti materiálu se stává nedůležitou a Weibullův integrál dává výsledky ekvivalentní s plně stochastickým výpočtem metodou konečných prvků.

Ve Weibullově integrálu 1.9 existuje mnoho možných definic koncentrační funkce napětí, viz Bažant a Planas [8]. Na sledovaných vzorcích nejvíce do tenzoru napětí přispívá normálové napětí σ_{yy} . Pole napětí σ_{yy} je téměř shodné s hlavním napětím σ_I . Protože pouze tahová napětí způsobí vznik poruchy, je koncentrační funkce definována jednoduše jako:

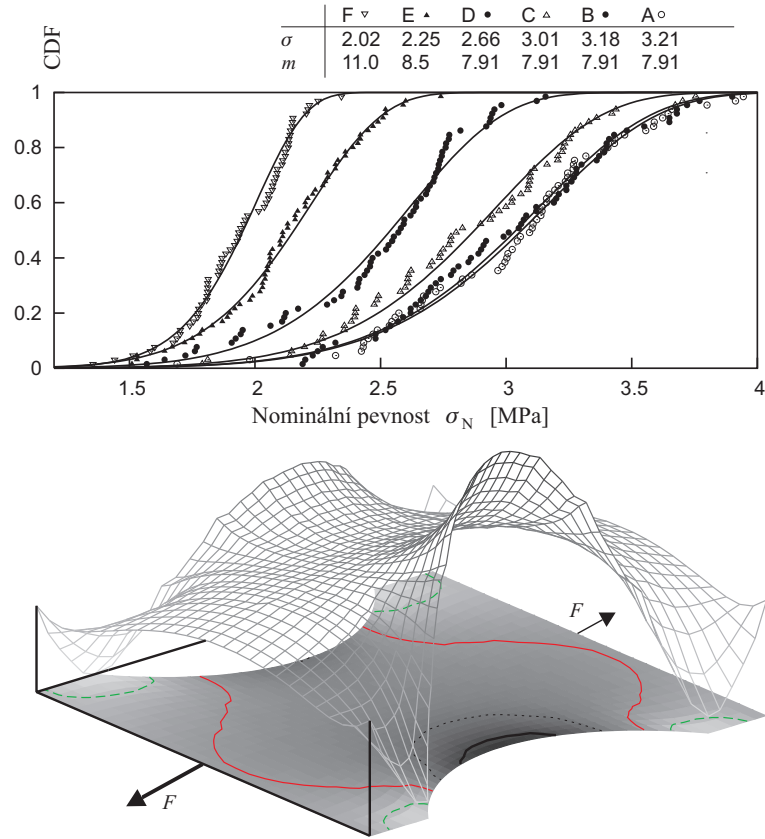
$$c[\sigma(\mathbf{x}); m, \sigma_0] = \frac{1}{V_r} \left\langle \frac{\sigma_I(\mathbf{x})}{\sigma_0} \right\rangle^m \quad (4.13)$$

kde $V_r = l_0^n$ = referenční objem sdružený s m a σ_0 .

Na obrázku 4.14 je vykresleno maximální pole hlavního napětí (tah) nad vzorkem při pružném chování. Numerická integrace tohoto pole napětí pro různé velikosti a pravděpodobnosti poruchy může být přepsána v bezrozměrných souřadnicích, takže se výpočet stává velmi snadným, viz kapitola 4.

V případě studie vzorků ve tvaru kosti dává Weibullovo řešení tyto výsledky. Tloušťka vzorku $b = 100$ mm se s velikostí vzorku nemění, proto nepřispívá ke změně pevnosti a můžeme ji ignorovat – a objemy definovat jako plochy. Je-li $m = 7.91$, pak výpočtem parametru geometrie z rovnice (1.12) získáme hodnotu $\Psi \approx 0.574$. Zvolíme-li hodnotu délky l_0 rovnu autokorelační délce $l_r = 0.08$ m, každý RPO má střední hodnotu pevnosti $\mu_0 = 3.2$ MPa a s ní asociovaný parametr měřítka Weibullova rozdělení $\sigma_0 = 3.4$ MPa. Počet ekvivalentních RPO na vzorcích různých velikostí můžeme vypočítat použitím rovnice (1.11), pro velikost F tento vztah dává $N_{eq} \approx 230$. Tudíž, střední nominální pevnost velikosti F je 1.61 MPa. Výsledky ostatních středních hodnot vlivu velikosti jsou vyneseny v grafu na obr. 4.15 (asymptota statistického vlivu velikosti).

Protože statistická a energetická fyzikální příčina vlivu velikosti jsou různé a nezávislé, statistická délka l_r nemůže být ovlivněna změnou deterministické délky G_F (nebo změnou c_b). Střední hodnota náhodné nominální pevnosti σ_N musí být omezena hodnotou $D \rightarrow 0$, (tj. statistický vliv velikosti nemůže způsobit nárůst pevnosti,



Obr. 4.14: Nahoře: vypočtené rozdělení nominální pevnosti vzorků s náhodným Weibullovým polem s parametrem $K=1$. Weibullovo rozdělení (Eq. 4.8), které nejlépe aproximuje výsledky. Dole: vypočtené pole hlavních napětí v pružném stavu.

pokud je konstrukce příliš malá jako v klasické Weibullově teorii. Horní mez středního statistického vlivu velikosti může být vypočtena jako deterministická pevnost konstrukce bez přerozdělení napětí ($c_b/D \rightarrow 0$ or $G_F/D \rightarrow 0$), viz dolní horizontální asymptota obr. 4.15.

Při zkoumání statistického vlivu velikosti bez redistribuce musíme zvolit velikost RPO v případě, kdy náhodná materiálová pevnost je popsána náhodným polem. V případě nekorelovaných Weibullových pevností je volba libovolná; referenční délka souvisí s parametrem měřítka pevnosti přes mocninovou funkci. V případě autokorelace volba závisí na autokorelační délce – délka l_0 se musí rovnat délce, přes kterou je lokální pevnost téměř nekorelovaná. Proto byla zvolena rovnost mezi autokorelační délkou (rovnice 4.9) a délkou l_0 :

$$l_r = l_0 \quad (4.14)$$

Plocha $A_0 = l_0^2$ nebo objem $V_r = l_0^3$ má nyní střední hodnotu pevnosti μ_0 .

Pro ukázání rozdílu mezi statistickým vlivem velikosti podle Weibullova výkladu a při předpokládané autokorelované pevnosti je nutno od sebe oddělit statistický a deterministický vliv. Čistý statistický vliv velikosti (tj. vliv velikosti u konstrukce bez přerozdělení napětí) může být numericky simulován dosazením za lomovou energii G_F (nebo šířku pásu trhlin c_b) nulové hodnoty a použitím stejných realizací náhodných polí pevnosti. Numerické výsledky jsou zobrazeny na obrázku 4.15. Je vidět, že křivka vlivu velikosti z vypočtených středních hodnot tvoří hladký přechod mezi dvěma asymptotickými případy: konstantní horní hranice pro malé velikosti a Weibulova asymptota pro velké velikosti. Přechodová velikost l_s může být vypočtena z rovnosti deterministické pevnosti velké konstrukce $\sigma_{N,\infty} \equiv \sigma_N^{\text{det}}(\infty, c_b) \equiv \sigma_N^{\text{det}}(D, 0) = 2.15 \text{ MPa}$ a střední Weibullové pevnosti 3.2 MPa v rovnici (1.15). Tato rovnost vede na

$$l_s = l_0 \Psi^{-1/n} \left[\frac{\mu_0}{\sigma_{N,\infty}} \right]^{m/n} \quad (4.15)$$

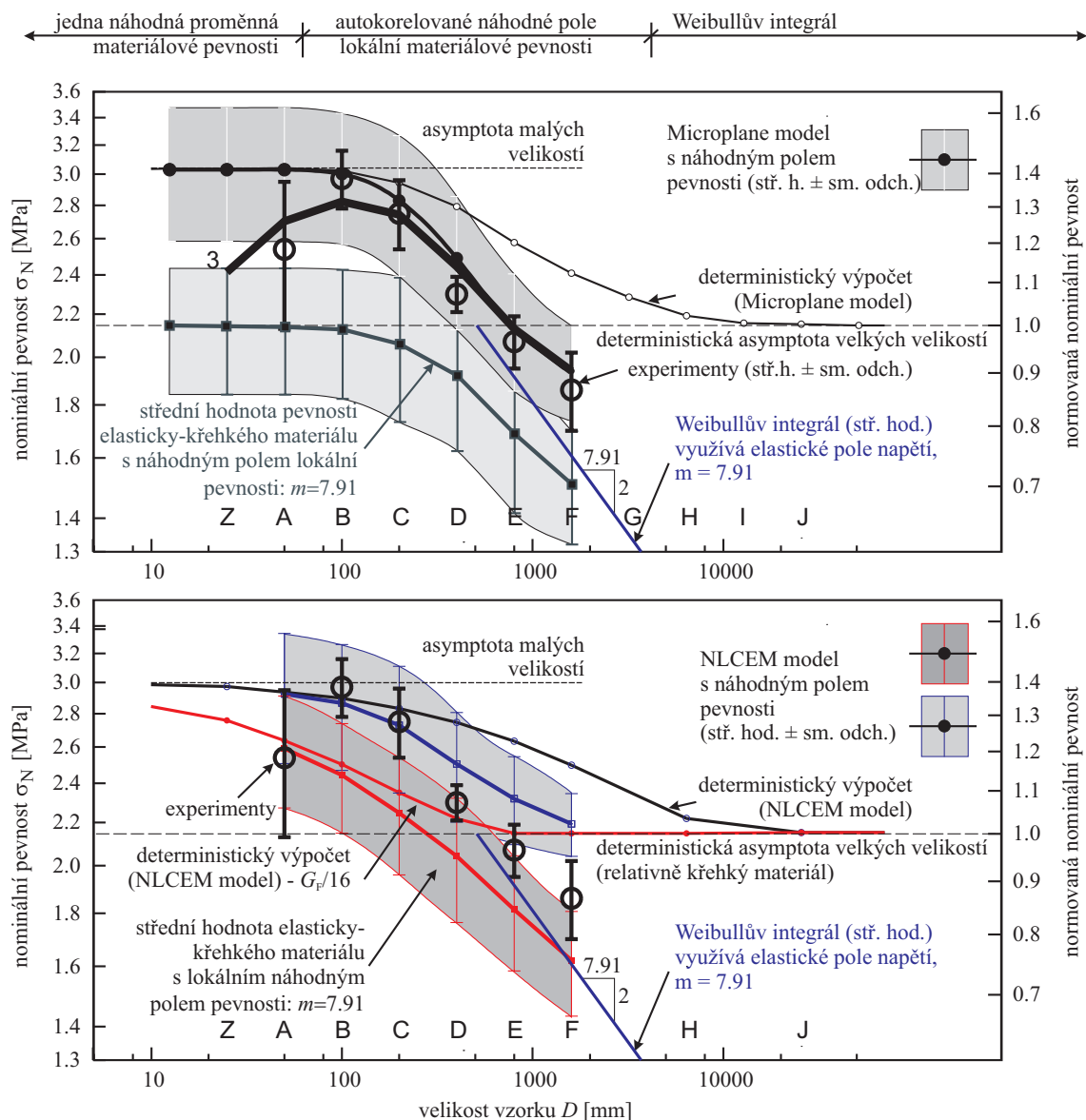
která dává v našem numerickém příkladu $l_s \approx 510 \text{ mm}$, viz hodnota vyznačená na vodorovné ose obr. 4.15.

4.7 Výsledky

Uvedením tří různých délek měřítka je možné nezávisle spojit tři různé efekty získané z výsledků modelů tří vlivů velikosti na nominální pevnost, které interagují. Šířka pásu trhlin c_b (deterministické měřítko délky) řídí, u které velikosti dojde k přechodu z duktilního na pružno-křehké chování Microplane modelu, tj. řídí přechod mezi dvěma horizontálními asymptotami na grafu vlivu velikosti (viz obr. Fig. 4.6). To samé musí platit také pro lomovou energii G_F u NLCEM materiálového modelu. Druhá uvedená délka (oslabení okrajové vrstvy t_w) spolu se snížením materiálové pevnosti řídí, pod kterou velikostí dojde k významnému poklesu nominálního napětí. Pokles roste se zmenšující se velikostí vzorku a způsobuje opačný sklon křivky vlivu velikosti než je u deterministického a statistického vlivu velikosti (viz obr. 4.6). Poslední zmíněná délka je autokorelační délka l_r , která řídí přechod z náhodnosti způsobené celkovým rozptylem materiálové pevnosti (jedna náhodná proměnná pro materiálovou pevnost) na soubor nezávislých náhodných proměnných se shodným rozdělením lokálních materiálových pevností přes autokorelované náhodné pole (řídí konvergenci k čistému Weibullovu statistickému vlivu velikosti založeném na principu nejslabšího článku).

Na obrázku 4.14 vlevo je vykreslena odhadnutá distribuční funkce nominálního napětí pro všechny zkoušené velikosti, které byly získány plně stochastickou nelineární MKP analýzou s Microplane parametrem K1 modelovaným náhodným polem s Weibullovým rozdělením. Tabulka nad grafy obsahuje parametry Weibullova rozdělení, které nejlépe proloží empirické histogramy. Z nějakého důvodu se stalo, že Weibullův modul se u velikostí E a F zvětšil i když sklon odpovídající křivky vlivu velikosti byl navržen na hodnotu 7.91 (očekávaná hodnota, která vychází z jednoduchého Weibullova vlivu velikosti pružno-křehké konstrukce). Odchyłky mohou být způsobeny numerickými chybami; především nedostatečnou diskretizací náhodného pole s ohledem na autokorelační délku. Variabilitu náhodného pole počínaje velikostí E není možné dostatečně vystihnout zvolenou hustotou integračních bodů, protože nezvyšujeme hustotu sítě s rostoucí velikostí modelu. Byl zvolen stejný počet konečných prvků pro všechny velikosti především z důvodu délky výpočtového času. Existuje určitý limit pro použití náhodných polí – pro velmi velké velikosti vzorků není možné metodu náhodných polí použít. Nad obrázkem 4.15 je naznačeno jaké metody je možné pro jisté rozsahy velikostí použít.

Výsledné nominální pevnosti pro všechny velikosti získané nelineární stochastickou MKP analýzou jsou vykresleny a porovnány s experimentem na obr. 4.15. Horní



Obr. 4.15: Grafické porovnání výsledků křivek vlivu velikosti. Nahoře: Výsledky získané použitím Microplane modelu. Dole: Výsledky s použitím materiálového modelu NLCEM.

obrázek zachycuje výsledky získané při použití Microplane modelu a dolní NLCEM modelu. Je vidět, že od velikosti C střední hodnota nominální pevnosti je řízena především pravděpodobnostními vlivy, což není možné vystihnout pouze deterministickými modely. Jsou zde zahrnuty také střední hodnoty nominálních pevností pro velikosti D, E, F a G získané výpočtem Weibullova integrálu (rovnice 1.9 a 4.13). Řešení Weibullova integrálu je přímá linie s negativním sklonem, která představuje asymptotu vlivu velikosti, způsobená především prostorovou náhodností pevnosti.

Weibullovo řešení je mocninná funkce s exponentem $-1/7.91$. Tento sklon se může zdát jako vhodný pro pokračování sklonu experimentálně získaných středních hodnot. Ve skutečnosti však bylo řešení s Weibullovým integrálem získáno za použití $m = 15.82$ (rovnice 1.9 a 4.13). To znamená, že sklon linie na obr. 4.15 by měl být lépe zapsán jako $-n/m = -2/15.82$. To je dáno tím, že počet dimenzí škálování konstrukce je $n = 2$ (2D), viz obr. 4.1. Budeme-li předpokládat, že ke vzniku trhliny u velmi velkého vzorku dojde při první inicializaci trhliny, pak pravděpodobnost poruchy je funkcí plochy, která přispívá k pravděpodobnosti poruchy P_f . To znamená, že při použití Weibullova parametru $m = 7.91$ u velikostí větších než F bude sklon asymptoty středních hodnot pevností jiný než by měl být. Sклон by byl $-1/3.955 = -2/7.91$.

Sклон asymptoty statistického vlivu velikosti, navrhnutý podle směru středních hodnot pevnosti velikostí E, F ($-n/m = -2/15.82 = -1/7.91$), je v dobré shodě s rozptylem naměřené nominální pevnosti pro velikost C. Weibullův modul $m = 16.1$ získaný pro velikost C, dává hodnotu blízkou 15.82 z tabulky 4.1. Pokud nebudeme brát v úvahu nejmenší velikost A, kde jsou příčinou variability pevnosti sporné, pak C je velikost s největším počtem realizací (sedm). Tudíž směrodatná odchylka získaná z experimentu je nejvýznamnější u velikosti C. Ostatní velikosti dávají následující hodnoty parametru m , viz tabulka 4.1. Většina těchto hodnot m je větší než u C, což se shoduje s faktem, že bylo provedeno méně realizací (pouze 4 nebo 5).

Obrázek 4.15 dole představuje obdobnou studii, kde je použit lomově-plastický materiálový model NLCEM. Již dříve byl zmíněn rozdílný přechod z plastického chování na elastické v porovnání s Microplane modelem. Křivka získaná při použití náhodného pole pevnosti je podobná bez ohledu na materiálový zákon. Avšak v případě NLCEM měla velikost F o trochu větší průměr a menší směrodatnou odchylku. Důvod není úplně jasný. Pro ověření a také porozumění jak se statistická délka měřítka (l_r) a deterministické měřítko (dáno lomovou energií G_F) ovlivňují, byla snížena lomová energie G_F šestnáctkrát. Výsledná křivka vlivu velikosti získaná deterministickým výpočtem je ta samá křivka pouze 16x posunutá doleva. Křivka získaná s náhodným polem pevnosti má jiný tvar než ta s původním G_F . Důvodem je různý poměr mezi deterministickou a statistickou délkou použitých náhodných polí, který není stejný jako v předešlé studii. Např. velikosti E a F jsou nyní obě „elasticky-křehké“, a proto má na výsledek vliv pouze náhodného pole pevnosti. To můžeme vidět na grafu: statistická hodnota má nyní mnohem strmější sklon - přibližuje se ke sklonu $-2/7.91$, který byl zmíněn výše, tj. limitní Weibullův sklon 2D problému s parametrem $m = 7.91$.

Pokud zabráníme redistribuci napětí (toho lze dosáhnout snížením G_F (c_b)) na velmi malou hodnotu vzhledem k velikosti konstrukce), potom je Weibullový asymptoty dosaženo zdola, viz křivka středních pevností vyznačená čtverečky v obr. 4.15. Jestliže je deterministická délka shodná se statistickou, pak k přechodu na Weibullovo řešení dochází odklonem křivky vlivu velikosti shora, protože velmi malé velikosti dosahují pevnosti $\sigma_{N,\infty}$, viz plná čára s plnými kroužky na obr. 4.15.

Numerické simulace ukázaly, že autokorelační délka může velmi výrazně ovlivnit celkovou odezvu a způsob porušení konstrukce. Především když se lokální pevnost mění náhodně a relativní variabilita je velká, může být šíření zóny porušení závislé na obou délkách (crack band a autokorelační délka). Když je korelační délka větší než velikost konstrukce, potom pole náhodné pevnosti je téměř konstantní funkce a porušení závisí především na deterministickém vlivu (série A). Tzv. velikost lomové procesní zóny závisí na aktuálním poli napětí, které je ovlivněno okrajovými podmínkami vzorku. Pokud je korelační délka mnohem menší než nelokální délka, pak způsob porušení závisí na spolupůsobení oblastí, ve kterých dochází k lokálnímu změkčení poškozeného materiálu. Oblasti s vysokou lokální pevností sousedící se zónami s nižší pevností působí jako *bariéra proti dalšímu šíření poškození*, obr. 4.12 vzorek F05. Velikost zóny porušení v našem modelu s danou geometrií a při použití uvedených proporcí materiálových délek závisí především na deterministické délce a velmi málo na autokorelační délce pole lokální pevnosti.

U velmi velkých konstrukcí bylo ukázáno ($D \rightarrow \infty$), že nelokální Weibullova teorie se zjednodušuje na klasickou (lokální) Weibullovu teorii (v rovnici 1.16 je nelokální $\bar{\sigma}(x)$ nahrazeno lokálním $\sigma(x)$). V klasické Weibullově teorii se nevyskytuje žádná charakteristická materiálová délka. Weibullův vliv velikosti je mocninný zákon, který nemá charakteristickou délku a ani horní hranici. Ve Weibullově teorii je l_T (nebo V_T) měrná jednotka, ke které je vztažena prostorová hustota pravděpodobnosti poruchy.

5 NOSNÍK NAMÁHANÝ NA ČTYŘBODOVÝ OHYB - KOIDE, AKITA

V této kapitole je studováno chování trámů bez zářezu zatěžovaných čtyřbodovým ohybem. Podobně jako v kapitole 4 jsou k dispozici experimentální data publikovaná v článku Koide et al. [16]. Pokusíme se určit modelové materiálové parametry pro získání odezvy shodné s výsledky získanými ze zkoušek na reálných nosnících. Určení parametrů bude provedeno za použití Weibullova integrálu. Také bude sledován vliv jednotlivých parametrů vstupujících do Weibullova integrálu.

5.1 Úvod

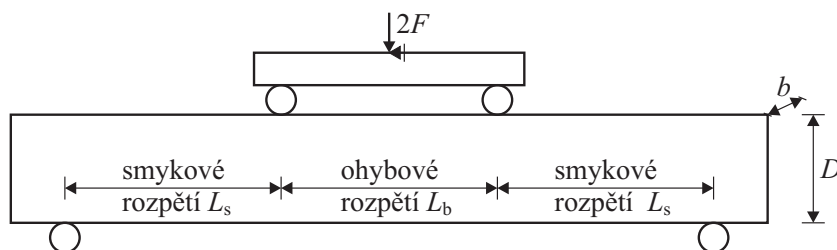
Práce vychází z experimentů provedených H. Koidem a H. Akitou (Koide et al. [16]). Pro testy byly vytvořeny sady zkušebních těles o třech různých průřezových plochách A, B a C. Celkem bylo testováno 140 vzorků (40 pro každé ohybové rozpětí), viz tab. 5.1. Vzorky každé sady byly zatěžovány čtyřbodovým ohybem s různým ohybovým rozpětím (vzdálenost shodných zatěžujících sil). Smykové rozpětí (vzdálenost podpory od nejbližší zatěžující síly) bylo pro každou sadu shodné, viz obr. 5.1. Tudiž bylo testováno 9 různých typů vzorků. Vzorky byly vyrobeny z betonu o maximální velikosti zrna $d_{\max} = 10$ mm pro sérii A a 20 mm pro série B a C. Vzorky zrály 28 dní ponořeny ve vodě a potom byly sušeny 7 dní na vzduchu. Autoři uvádějí průměrné 28 denní tlakové pevnosti, které jsou shrnuty v tab. 5.1.

Tab. 5.1: Rozměry testovaných vzorků série A, B a C

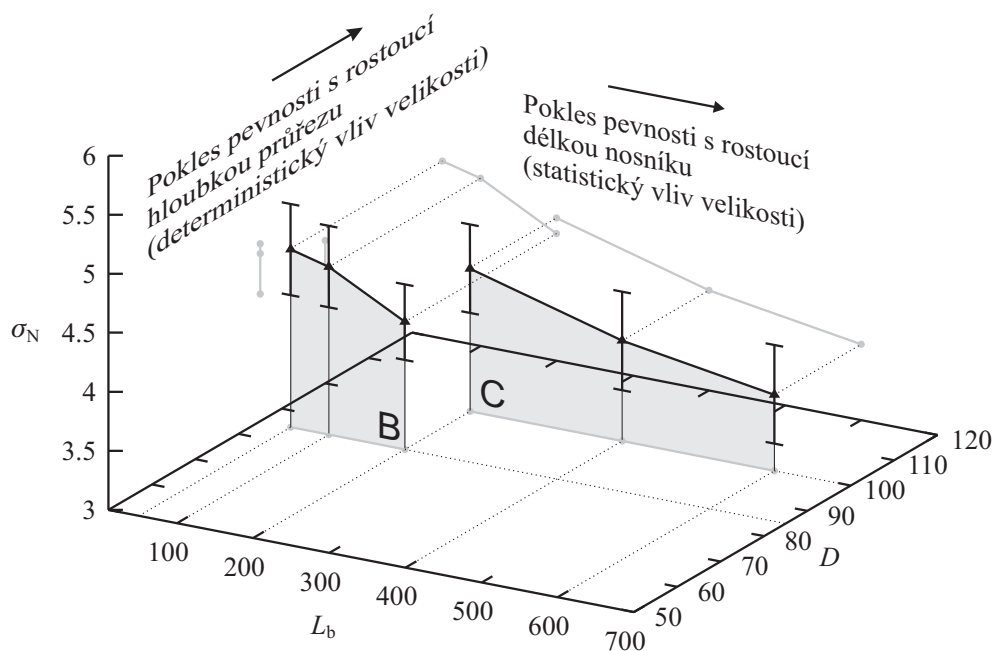
Série	Průřez $b \times D$ [mm]	Smykové rozpětí L_s [mm]	Ohybové rozpětí L_b [mm]	Tlaková pevnost f_c [MPa]
A	45×45	80	50, 70, 90	46.3
B	85×85	200	50, 100, 200	49
C	100×100	200	200, 400, 600	30

Vzhledem k odlišné velikosti maximálního zrna kameniva u série A a s tím spojenou nekompatibilitou s ostatními sériemi tuto sérii dále nebudeme uvažovat. Aby bylo možné velikosti B a C studovat současně, musí být modifikovány jejich materiálové vlastnosti, protože pevnost betonu každé série byla jiná. Použijeme-li automaticky vygenerované hodnoty materiálových parametrů pro beton z programu ATENA při dodržení experimentálních tlakových pevností pro vzorky B a C, poměr

jejich tahových pevností bude cca 0.73. Tento redukční faktor lze použít pro hrubou opravu naměřených pevností série B. Takto upravená nominální pevnost je vynesena na obrázku 5.2 a na obrázku 5.8 (černá křivka s plnými trojúhelníčky) ve formě závislosti nominálního napětí na ohybovém rozpětí. Dodejme, že velikost maximálního zrna kameniva, která má vazbu na charakteristickou délku (a lomovou energii), je u obou sérií stejná. Dále budeme s upravenými experimentálními výsledky zacházet jako by pocházely z jediné dávky betonu.



Obr. 5.1: Schéma uspořádání zatěžovací zkoušky na čtyřbodový ohyb. Stejné okrajové podmínky byly předepsány v numerickém modelu.



Obr. 5.2: Křivka vlivu velikosti (deterministického i statistického) ve 3D zobrazení.

Motivací při návrhu experimentu bylo studovat vliv délky nosníku na ohybovou pevnost. Návrh experimentu umožnil do značné míry izolovat 1D statistický vliv velikosti, neboť velikost konstrukce nebyla škálována ve dvou nebo třech směrech, což by nutně přineslo deterministický vliv velikosti. Zdá se tedy, že experimentální data

mohou posloužit jako vhodný zdroj informací o pravděpodobnostním vlivu velikosti zbaveného dalších rušivých vlivů. Dále se budeme snažit určit vstupní materiálové parametry včetně jejich rozptylu, s jejichž použitím by v nelineárním výpočtu v programu ATENA došlo k dobré shodě s experimentálními daty. K bližšímu studiu vlivu jednotlivých parametrů budeme používat Weibullův integrál.

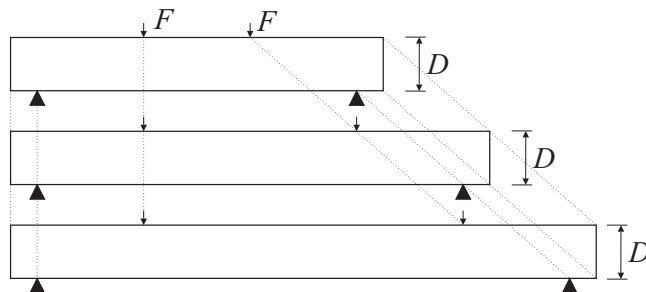
Definujme nyní nominální napětí σ a nominální pevnost σ_N :

$$\sigma = \frac{M}{W} = F \frac{6L_s}{bD^2}, \quad \sigma_N = \frac{M_{\max}}{W} = F_{\max} \frac{6L_s}{bD^2} \quad (5.1)$$

kde $W = bD^2/6 =$ průřezový modul.

5.2 Použití Weibullova integrálu

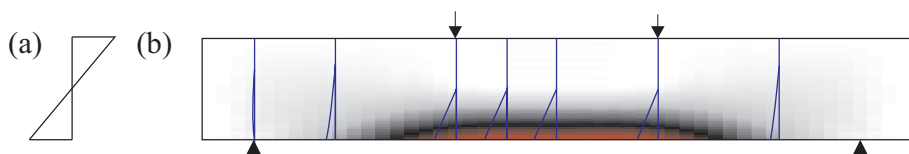
V této studii se nejedná o klasický 2D problém jako v předchozí studii (kapitola 4), tato úloha přechází na 1D škálování: zvětšování velikosti nosníku bylo provedeno pouze v jednom směru, viz obr. 5.3. Vliv velikosti v závislosti na velikosti ohybového rozpětí má pouze statistickou složku, deterministická složka se mírně projeví zvláště při přechodu ze série B na sérii C, neboť tyto dvě série měly jinou hloubku nosníku, viz obr. 5.2.



Obr. 5.3: Škálování nosníků v podélném směru (D zůstává u všech nosníků série stejné).

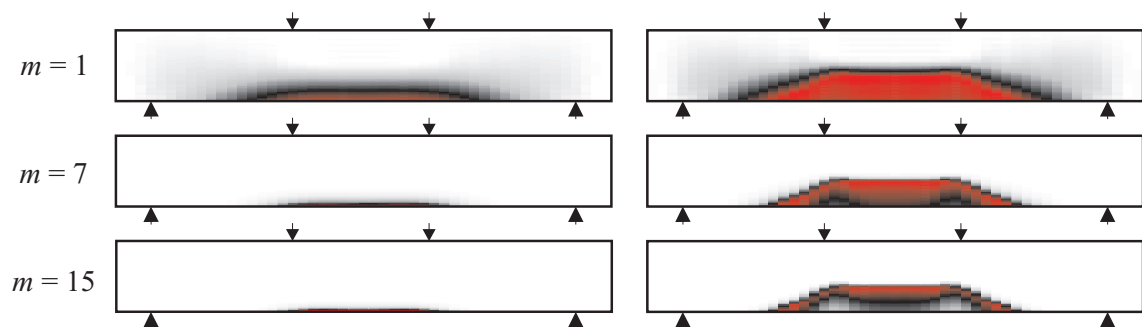
Pro Weibullův integrál (1.9) bylo použito pole hlavních napětí v oblasti elastického chování, které se v rozsahu ohybového rozpětí velmi dobře shoduje s napětím ohýbaných nosníků vypočtené podle teorie pružnosti (obr. 5.4a).

Na obrázku 5.5 je zobrazena oblast nosníku, která přispívá ke zvýšení pravděpodobnosti poruchy trámce ve Weibulově teorii. Pro pochopení vlivu parametru tvaru Weibullova rozdělení byl proveden výpočet s parametry $m = 1, 7$ a 15 . Protože se tento parametr vyskytuje v rovnici 1.12 jako mocnitel nad bezrozměrným polem napětí S , pak při hodnotě $m = 1$ má příspěvek stejný tvar jako pole hlavních napětí

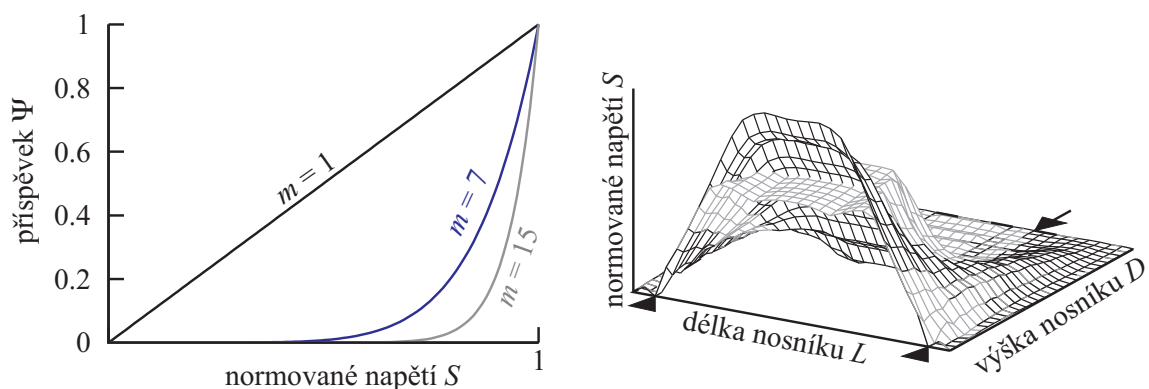


Obr. 5.4: (a) Průběh tahových napětí podle teorie pružnosti na nosníku za ohybu.
(b) Pole kladných hlavních napětí na nosníku včetně svislých řezů určené nelineárním výpočtem v programu ATENA.

v oblasti lineárního chování konstrukce (srovnej obr. 5.4b a 5.5 vlevo nahoře). Při umocnění hodnot napětí exponentem $m = 7$ a 15 dochází ke zmenšování oblasti, která významně přispívá do Weibullova integrálu, viz obr. 5.5. Vysvětlení je prosté: při definici pole σ_N podle rovnice 5.1 hodnoty pole napětí $S \in \langle 0, 1 \rangle$. Umocnění čísel S mocnitelem m lze napsat $S^m \leq S$ pro $\forall m > 0$, viz obr. 5.6.



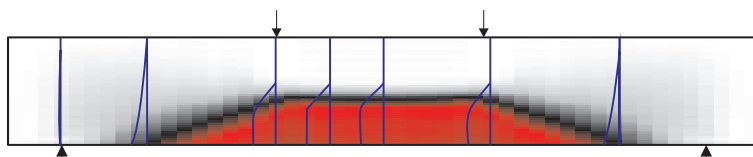
Obr. 5.5: Elastická pole napětí (vlevo) a neelastická napětí (vpravo): zmenšování oblasti příspěvků do Weibullova integrálu v závislosti na parametru m .



Obr. 5.6: Vlevo: umocnění napětí S mocnitelem m . Vpravo: pole elastického a neelastického napětí (poměr výšky a délky není v měřítku).

Křivka hodnot vypočtených z Weibullova integrálu, která prokládá experimentální křivku pro velikost C, je vykreslena na obrázku 5.8 (červená křivka s kroužky). Tvar experimentální křivky C napovídá vhodnosti použití Weibullova integrálu, protože průběh dat v bilogaritmickém měřítku je přímý, což nasvědčuje na mocninný zákon. Tvar křivky série B se zaobljuje, což svědčí ve prospěch domněnky, že lokální pevnosti jsou závislé; např. autokorelované viz kapitola 1.5. Křivka středních pevností pro B se totiž blíží k horní konstantní asymptotě vlivu velikosti malých konstrukcí. Na obr. 5.8 jsou křivky o větším sklonu (čárkovanou čarou), protínající vypočtenou křivku, získány výpočtem Weibullova integrálu na konstrukci, která by byla zvětšována v obou směrech (změna ohybového rozpětí i hloubky nosníku D). Červená křivka byla vypočtena s $m = 7$, $\sigma_0 = 4.2$ MPa, $l_0 = 0.05$ m = 50 mm. Sklon křivky vlivu velikosti série C velmi dobře vystihuje volba parametru $m = 7$, což příliš neodpovídá hodnotě vycházející z dat experimentu, která je $m \approx 11$. Tento nesoulad odporuje platnosti Weibullové teorie, kde m stanovený z rozptylu pevností jedné velikosti je roven sklonu střední křivky vlivu velikosti.

Další studium Weibullova integrálu bylo provedeno za použití neelastického pole hlavních napětí (obr. 5.7) získaných z numerické analýzy v programu ATENA při maximálním zatížení konstrukce. Tímto způsobem se zavede přerozdělení napětí v konstrukci do Weibullova integrálu, což simuluje podobné efekty jako v nelokální Weibullově teorii, viz kapitola 1.4. Problém je v určení tohoto pole, jehož tvar závisí na mnoha vlivech (např. materiálová variabilita, materiálové charakteristiky). Spočtené pole napětí je navíc nerealistické neboť je dokonale symetrické – skutečná neelastická napětí při maximální síle nejsou symetrická a porušení se inicializuje náhodně v celém ohybovém rozpětí.



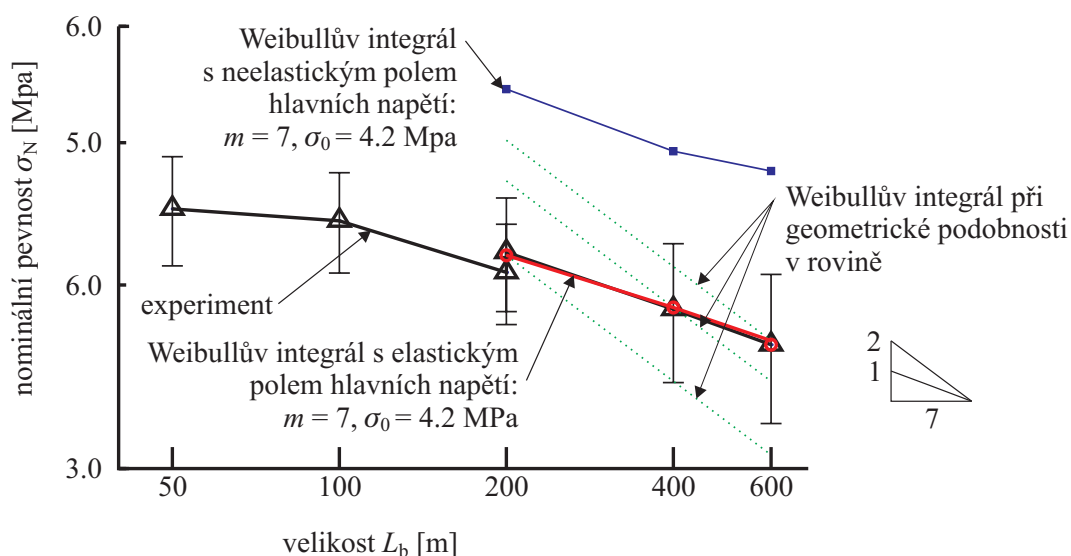
Obr. 5.7: Pole hlavních napětí při maximálním zatížení (neelastická) z programu ATENA.

Na obrázku 5.5 vpravo je zobrazena změna velikosti oblasti přispívající do Weibullova integrálu při použití neelastického pole hlavních napětí v závislosti na parametru m . Změna této oblasti při zavedení přerozdělení napětí má za následek výraznou změnu výsledků Weibullova integrálu, viz modrá křivka s vyplněnými čtverečky v obr. 5.8.

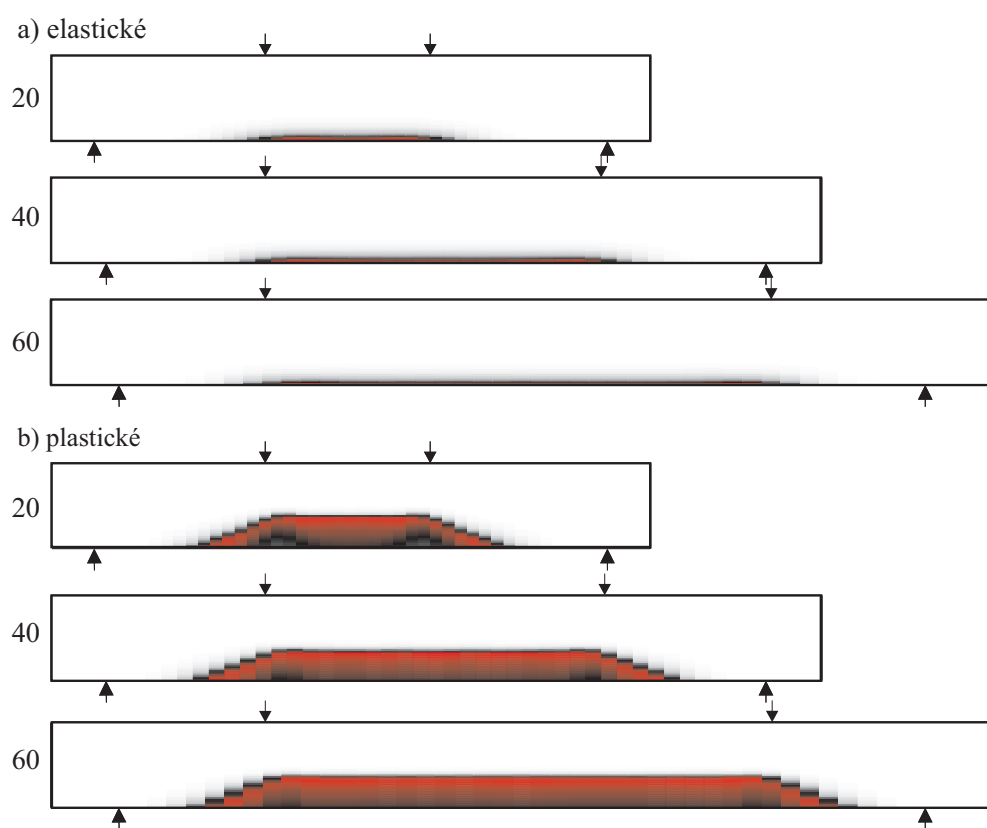
Tabulka 5.2 shrnuje hodnoty středních pevností konstrukce vypočtené pomocí Weibullova integrálu s elastickými i neelastickými poli napětí při použití shodných vstupních parametrů, viz výše. Je vidět, že přerozdělení napětí vede k vyšším pevnostem konstrukce. Dále je vidět, že linie spojující střední hodnoty pevností konstrukce s přerozdělením namáhání již není přímkou, a proto se nejedná o mocninný zákon. Závěrem lze říci, že nelokální Weibulova teorie neposkytuje konzistentní přístup pro všechny typy konstrukcí, např. u konstrukcí s nereálným symetrickým poškozením.

Tab. 5.2: Hodnoty výsledných nominálních napětí s použitím elastického pole hlavních napětí do Weibullova integrálu σ_N^{el} a neelastického pole hlavních napětí σ_N^{nl} v závislosti na velikosti ohybového rozpětí D .

	D	σ_N^{el}	σ_N^{nl}
	[m]	[Mpa]	[Mpa]
C20	0.2	4.195	5.439
C40	0.4	3.862	4.932
C60	0.6	3.667	4.783



Obr. 5.8: Grafické porovnání křivek vlivu velikosti.



Obr. 5.9: Srovnání oblastí příspěvku do Weibullova integrálu nosníků série C s parametrem $m = 7$.

6 ZÁVĚR

V práci byl ukázán způsob modelování porušování kvazi-křehkého materiálu za použití náhodných polí materiálových vlastností a nelineární výpočtové mechaniky. Výsledky provedených numerických simulací náhodné odezvy tahových zkoušek vzorků tvaru kosti jsou v dobré shodě s publikovanými daty van Vlieta a van Miera. Sledováním závislosti nominální pevnosti na velikosti konstrukce bylo zjištěno, že navržený model se třemi délkami měřítká je schopný zachytit nejdůležitější způsoby porušení. Bylo ukázáno, že část experimentálně zjištěného vlivu velikosti může být modelována za použití deterministické délky (šířka crack band). Další závislost pevnosti na velikosti u velkých konstrukcí je modelována pomocí náhodných polí pevnosti. Důležitá statistická veličina náhodného pole je autokorelační délka. Náhodná autokorelovaná pole pevnosti modelují nehomogenitu materiálových vlastností konstrukce (imperfekce), vlivem nichž dochází k poruše v místě s vysokým napětím. Bylo ukázáno, že deterministická vnitřní délka a statistická vnitřní délka spoluinteragují a mohou výrazně ovlivnit způsob porušení konstrukce.

Asymptota vlivu velikosti pro velmi velké konstrukce (způsobené náhodnou pevností) je klasický Weibullův mocninný zákon, který je možné použít pro asymptotickou predikci pevností velkých konstrukcí. Za použití realizací náhodných polí pevnosti bylo možné modelovat rozptyl výsledných nominálních pevností.

Práce dokumentuje fakt, že experimentální zjištění materiálových parametrů potřebných pro bezpečný návrh konstrukce a jejich zavedení do výpočtového modelu je velmi náročné pro kvazikřehké materiály (např. beton).

Vzhledem k velkému počtu simulací (64 pro jednu velikost, 384 pro jednu křivku velikosti) bylo nutné hromadné zpracování dat zalgoritmizovat. Byly vytvořeny programy v jazyce C++ pro zpracování σ - ε diagramů z textových výstupů získaných z programu, čímž byla eliminována možnost chyby při manuálním zpracování takového objemu dat.

Velmi náročnou částí této práce byla 3D analýza, přestože se jedná o relativně jednoduchý model. Nejdůležitější problémy, které komplikovali zpracování této studie jsou především:

1. Obtížná práce s velkým počtem makroprvků (nepřehledná správa vlastností přiřazených jednotlivým makroprvkům a nemožnost jejich hromadné editace)
2. Nedokonalá tvorba sítě konečných prvků (způsobené především excentricky umístěným uzlem zatížení)

3. vysoká časová náročnost výpočtu jednotlivých modelů (v řádu desítek hodin při použití moderní techniky)

Pro výpočet Weibullova integrálu pro různé geometrie konstrukcí studovaných v této práci bylo nutné výpočet algoritmovat. K tomuto účelu byl využit tabulkový procesor Excel. Vstupní data byla získávána z textového výstupu programu ATENA. V našem případě se jedná o soubory o velmi velkém počtu řádků (tisíce až desetitisíce), s nimiž je velmi obtížná „ruční“ práce. Proto pro získání a setřídění dat bylo vytvořeno několik programů v jazyce C++, které tuto činnost obstarávají. Pro Weibullův integrál bylo potřeba vytvořit databázi uzlů, integračních bodů a prostorových souřadnic z různých nekompletních textových výstupů programu ATENA. Klíčový byl pak automatizovaný výpočet plochy příslušející jednomu integračnímu bodu v rámci daného konečného prvku (souřadnic uzlů konečných prvků).

Práce představuje aplikace analytických i numerických metod na konstrukce experimentálně testované jinými autory. Získané zkušenosti je možné využít pro srovnávací studie s experimenty na vzorcích jiné geometrie a s jiným způsobem namáhání. Práce stimuluje k vytvoření vlastního experimentu studujícího vliv velikosti. Dále je v plánu porovnání se simulacemi s modely tzv. fyzikální diskretizace jako např. „lattice modely“ a „particle modely“.

Některé kapitoly této práce byly prezentovány na konferenci „Physical Aspects of Fracture Scaling and Size Effects 2008“ v Monte Verità (vyžádaná přednáška) a na jejich základě sestavený článek s názvem *Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension* byl zaslán k posouzení a případné publikaci v časopise *International Journal of Fracture*.

LITERATURA

- [1] Bažant, Z. P., Caner, F. C., Carol, I., Adley, M. D., Akers, S. A., 2000. Micro-plane model M4 for concrete: I. Formulation with work-conjugate deviatoric stress. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 126 (9), 944–961.
- [2] Bažant, Z. P., Novák, D., 2000. Probabilistic nonlocal theory for quasi-brittle fracture initiation and size effect I: Theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 126 (2), 166–174.
- [3] Bažant, Z. P., Novák, D., 2000. Probabilistic nonlocal theory for quasi-brittle fracture initiation and size effect II: Application. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 126 (2), 175–185.
- [4] Bažant, Z. P., Oh, B.-H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures* 16, 155–177.
- [5] Bažant, Z. P., Oh, B.-H., 1986. Efficient numerical integration on the surface of a sphere. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, Berlin 66 (1), 37–49.
- [6] Bažant, Z. P., Pang, S.-D., 2007. Activation energy based extreme value statistics and size effect in brittle and quasibrittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55 (1), 91–131.
- [7] Bažant, Z. P., Pang, S. D., Vořechovský, M., Novák, D., 2007. Energetic-statistical size effect simulated by SFEM with stratified sampling and crack band model. *International Journal of Numerical Methods in Engineering (Wiley)* 71 (11), 1297–1320.
- [8] Bažant, Z. P., Planas, J., 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, Boca Raton and London.
- [9] Bažant, Z. P., Vořechovský, M., Novák, D., 2007. Asymptotic prediction of energetic-statistical size effect from deterministic finite element solutions. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* 133 (2), 153–162.
- [10] Bažant, Z. P., Xi, Y., 1991. Statistical size effect in quasibrittle structures. II. Nonlocal theory. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 117 (11), 2623–2640.

- [11] Caner, F. C., Bažant, Z. P., 2000. Microplane model M4 for concrete: II. Algorithm and Calibration. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 126 (9), 954–961.
- [12] Dyskin, A., van Vliet, M., van Mier, J., 2001. Size effect in tensile strength caused by stress fluctuations. *International Journal of Fracture* 108, 43–61.
- [13] Fisher, R. A., Tippett, L. H. C., 1928. Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc., Cambridge Philosophical Society* 24, 180–190.
- [14] Hordijk, D., 1991. Local approach to fatigue of concrete. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, ISBN 90/9004519-8.
- [15] Kika, O., Kratochvíl, O., Křížan, J., Sadílek, V., Řoutil, L., 2008. Numerická analýza průběhu porušení betonového trámce za ohybu: část II. In: *Juniorstav – 10. ročník konference doktorského studia*.
- [16] Koide, H., Akita, H., Tomon, M., 2000. Probability model of flexural resistance on different lengths of concrete beams.
- [17] Liu, P., Der Kiureghian, A., 1986. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics* 1 (2), 105–111.
- [18] Šmiřák, S., 1998. Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti. Učební texty vysokých škol. Ústav stavební mechaniky, FAST VUT v Brně, doplňkový text pro distanční studium.
- [19] Novák, D., Lawanwisut, W., Bucher, C., 2000. Simulation of random fields based on orthogonal transformation of covariance matrix and latin hypercube sampling. In: Schuëller (Ed.), *International Conference on Monte Carlo Simulation MC 2000*. Swets & Zeitlinger, Lisse (2001), Monaco, Monte Carlo, pp. 129–136.
- [20] Novák, D., Vořechovský, M., Rusina, R., 2003. Small-sample probabilistic assessment - FREET software. In: Der Kiureghian, A., Madanat, S., Pestana, J. M. (Eds.), *ICASP 9, International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, held in San Francisco, USA. Millpress, Rotterdam, Netherlands, pp. 91–96.

- [21] Novák, D., Vořechovský, M., Rusina, R., 2006. FReET – *Feasible Reliability Engineering Efficient Tool*. Tech. rep., Brno/Červenka Consulting, Czech Republic, program documentation – Part 2 – User Manual.
URL <http://www.freet.cz>
- [22] Pietruszczak, S., Mróz, Z., 1981. Finite element analysis of deformation of strain softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, 327–334.
- [23] RILEM-TC-QFS, 2004. Quasibrittle fracture scaling and size effect. *Materials and Structures (RILEM Publications SARL)* 37 (272), 547–568.
- [24] Teplý, B., Novák, D., 2004. *Spolehlivost stavebních konstrukcí*. Akad. Nakl. CERM, Brno.
- [25] van Mier, J., 2004. Reality behind fictitious cracks? (key-note paper). In: Li, V., Leung, C., Willam, K., Billington, S. (Eds.), *5th International Conference on Fracture of Concrete and Concrete Structures (FraMCoS-V)*. IA-FraMCoS, Vail, Colorado, pp. 11–30.
- [26] van Mier, J., van Vliet, M., 2003. Influence of microstructure of concrete on size/scale effects in tensile fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 70, 2281–2306.
- [27] van Vliet, M., 2000. Size effect in tensile fracture of concrete and rock. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- [28] van Vliet, M., van Mier, J., 1998. Experimental investigation of size effect in concrete under uniaxial tension. In: Mihashi, H., Rokugo, K. (Eds.), *FRAMCOS-3*. Aedificatio Publishers, Japan, pp. 1923–1936.
- [29] van Vliet, M., van Mier, J., 1999. Effect of strain gradients on the size effect of concrete in uniaxial tension. *International Journal of Fracture* 95, 195–219.
- [30] van Vliet, M., van Mier, J., 2000. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. *Engineering Fracture Mechanics* 65, 165–188.
- [31] van Vliet, M., van Mier, J., 2000. Size effect of concrete and sandstone. *Engineering Fracture Mechanics* 45, 91–108.

- [32] Červenka, V., Pukl, R., 2005. Atena program documentation. Tech. rep., Červenka Consulting, Prague, Czech Republic, <http://www.cervenka.cz>.
- [33] Vořechovský, M., Sadílek, V., 2008. Computational modelling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture*, in review.
- [34] Vořechovský, M., 2000. K problematice výpočtu spolehlivosti u nelineárních úloh mechaniky kontinua (On reliability computations of nonlinear continuum mechanics problems). Master's thesis, Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic, in Czech.
URL <http://mujweb.cz/www/vorechovsky.m/papers/diplomka.htm>
- [35] Vořechovský, M., January 2002. Nové úpravy simulační metody Latin Hypercube Sampling a možnosti využití (New improvements to simulation technique Latin Hypercube Sampling and possibilities of its utilization). In: Stibor, M. (Ed.), *Problémy modelování (Problems of Modeling)*. Brno University of Technology, Faculty of Civil Engineering VŠB-TUO, Ostrava, Czech Republic, pp. 83–90, in Czech.
- [36] Vořechovský, M., 2004. Statistical alternatives of combined size effect on nominal strength for structures failing at crack initiation. In: Stibor, M. (Ed.), *Problémy lomové mechaniky IV (Problems of Fracture Mechanics IV)*. Brno University of Technology, Academy of Sciences - Institute of physics of materials of the ASCR, pp. 99–106, invited lecture.
- [37] Vořechovský, M., 2004. Stochastic fracture mechanics and size effect. Ph.D. thesis, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
- [38] Vořechovský, M., 2007. Interplay of size effects in concrete specimens under tension studied via computational stochastic fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures (Elsevier)* 44 (9), 2715–2731.
- [39] Vořechovský, M., 2008. Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety (Elsevier)* 30 (4), 337–363.
- [40] Vořechovský, M., Bažant, Z. P., Novák, D., 2005. Procedure of statistical size effect prediction for crack initiation problems. In: Carpinteri, A. (Ed.), *ICF XI*

- 11th International Conference on Fracture, held in Turin, Italy. Politecnico di Torino, pp. CD-ROM proc, abstract page 1166.
- [41] Vořechovský, M., Chudoba, R., 2006. Stochastic modeling of multi-filament yarns: II. Random properties over the length and size effect. *International Journal of Solids and Structures* (Elsevier) 43 (3-4), 435–458.
 - [42] Vořechovský, M., Chudoba, R., Jeřábek, J., 2006. Adaptive probabilistic modeling of localization, failure and size effect of quasi-brittle materials. In: Soares, C., Martins, J., Rodrigues, H., Ambrósio, J., Pina, C., Soares, C., Pereira, E., Folgado, J. (Eds.), III European Conference on Computational Mechanics (ECCM-2006), held in Lisbon, Portugal. National Laboratory of Civil Engineering, Springer, p. 286 (abstract), full papers on CD-ROM.
 - [43] Vořechovský, M., Novák, D., 2002. Correlated random variables in probabilistic simulation. In: Schießl, P., Gebbeken, N., Keuser, M., Zilch, K. (Eds.), 4th International Ph.D. Symposium in Civil Engineering held in Munich, Germany. Vol. 2. Millpress, Rotterdam, pp. 410–417.
 - [44] Vořechovský, M., Novák, D., 2003. Statistical correlation in stratified sampling. In: Der Kiureghian, A., Madanat, S., Pestana, J. M. (Eds.), ICASP 9, International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, held in San Francisco, USA. Millpress, Rotterdam, Netherlands, pp. 119–124.
 - [45] Vořechovský, M., Novák, D., 2004. Modeling statistical size effect in concrete by the extreme value theory. In: Walraven, J., Blaauwendaad, J., Scarpas, T., Snijder, B. (Eds.), 5th International Ph.D. Symposium in Civil Engineering, held in Delft, The Netherlands. Vol. 2. A.A. Balkema Publishers, London, UK, pp. 867–875.
 - [46] Vořechovský, M., Novák, D., 2005. Simulation of random fields for stochastic finite element analyses. In: Augusti, G., Schuëller, G. I., Ciampoli, M. (Eds.), ICoSSaR '05 the 9th International Conference on Structural Safety and Reliability, held in Rome, Italy. Millpress, Rotterdam, Netherlands, pp. 2545–2552.
 - [47] Weibull, W., 1939. The phenomenon of rupture in solids. Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingenioersvetenskaps Akad. Handl.), Stockholm 153, 1–55.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$\Gamma(\cdot)$	gama funkce
$\Delta \mathbf{u}$	vektor přírůstku deformace vlivem přírůstku zatížení
Δu	oddálení monitorovaných bodů
ε	poměrné přetvoření
ε_d	maximální poměrné přetvoření při jednoosém tlakovém namáhání
ε_f	lomové poměrné přetvoření
ε_u	elastické poměrné přetvoření
ε^{eq}	ekvivalentní jednoosé poměrné přetvoření
Λ	vlastní čísla autokorelační matice
μ	Poissonův součinitel
ξ	normální náhodný vektor
$\sigma(x)$	lokální pole napětí
σ_{ci}	hlavní napětí v závislosti na směru směru i
σ_I	hlavní (tahové) napětí
σ_N	nominální napětí
$\sigma_N^{\det}$	nominální napětí získané deterministickým výpočtem
$\sigma_{N,0}$	nominální napětí pro velmi malé konstrukce $D \rightarrow 0$
$\sigma_{N,\infty}$	nominální napětí pro velmi velké konstrukce $D \rightarrow \infty$
σ_{yy}	svislé normálové napětí
$\bar{\sigma}(x)$	nelokální pole napětí získané průměrováním
σ_0	parametr měřítka Weibullova rozdělení
Φ	ortonormální vlastní vektory autokorelační matice
Ψ	parametr geometrie

A	plocha průřezu v krčku
b	tloušťka vzorku
$c[\bullet]$	koncentrační funkce napětí
c_b	šířka lokalizační zóny
COV	variační koeficient
$\mathbf{C}$	autokorelační matice
d	vzdálenost dvou bodů
$d_{\max}$	maximální velikost zrna kameniva
D	velikost konstrukce
D_b	deterministická charakteristická délka (v originále „boundary layer of cracking“)
e	excentricita zatížení
E	modul pružnosti materiálu
E_c	sečný modul pružnosti při maximálním napětí
E_d	modul pružnosti lineární tlakové větve změkčení
E_{ci}	aktuální modul pružnosti v závislosti na směru i
E_0	počáteční modul pružnosti
f_c	válcová pevnost při jednoosém tlaku
f_c^{ef}	efektivní tlaková pevnost betonu
f_{CU}	krychelná pevnost
f_t	tahová pevnost
f_t^{ef}	efektivní tahová pevnost betonu
$F_{\max}$	maximální síla dosažená při zatěžování
G_F	lomová energie

k	parametr tvaru tlakové zatěžovací větve
$\mathbf{K}$	matice tuhosti
ℓ	charakteristická délka řídící velikost nelokálního objemu (plochy, délky)
l_{ch}	Irwinova charakteristická délka
l_k	kontrolní délka
l_p	druhá deterministická charakteristická délka (řídí polohu středu přechodové větve vlivu velikosti)
l_r	korelační délka
m	parametr tvaru Weibullova rozdělení
n	dimenze konstrukce (2D $n = 2$)
N	počet prvků konstrukce, článků řetězu
N_{eq}	ekvivalentní počet sériově zapojených identicky namáhaných článků s náhodnou pevností
$\mathbf{p}$	vektor celkového uzlového zatížení
P_f	pravděpodobnost poruchy
p_f	distribuční funkce, pravděpodobnost poruchy
P_1	pravděpodobnost poruchy jednoho článku (prvku) řetězu (prutu)
$r(u)$	nevyvážené síly (rezidua)
r_{ec}	redukční součinitel tlakové pevnosti v hlavním směru 2 vlivem tahového napětí ve směru 1
r_{et}	redukční součinitel tahové pevnosti ve směru 1 vlivem tlakového napětí ve směru 2
R	autokorelační funkce
s	pozitivní násobitel
u_{low}	velikost posunu dolního monitoru

u_{upp}	velikost posunu horního monitoru
V	objem prvku konstrukce
V_r	referenční objem související s parametry m a σ_0
w	otevření trhliny
w_c	konečné otevření trhliny
$\mathbf{X}$	Normálně rozdělené náhodné pole
LPZ	lomová procesní zóna (v anglické literatuře je používáno FPZ „Fracture Process Zone“)
LHS	simulační metoda Latin Hypercube Sampling
MKP	metoda konečných prvků (v anglické literatuře je používáno FEM „Finite Element Method“)
NLCEM	materiálový model 3D Nonlinear Cementitious 2
RPO	reprezentativní prvek objemu (v anglické literatuře je používáno RVE jako zkratka „Representative Volume Element“)